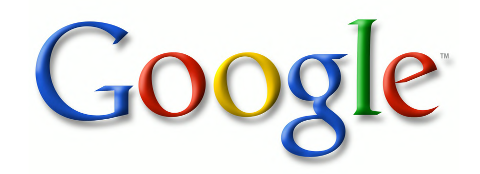








# INTEGRATION

DER

# LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

MIT

## CONSTANTEN UND VERÄNDERLICHEN COEFFICIENTEN.

VON

**JOSEPH PETZVAL.**

Auf Kosten der kais. Akademie der Wissenschaften.

ERSTER BAND.




WIEN, 1853.
IN COMMISSION BEI WILHELM BRAUMÜLLER,
Buchhändler des k. k. Hofes und der kais. Akademie der Wissenschaften.

# Vorrede.

Es ist allen mathematischen Naturforschern hinlänglich bekannt, dass bei weitem die meisten Untersuchungen auf dem Gebiete der Mechanik, Astronomie, Physik, als erstes Resultat, oder als Ausgangspunkt, eine Differentialgleichung oder ein System von solchen liefern; diese sind aber grösstentheils lineare, was seinen Grund im Wesentlichen darin hat, dass man entweder schwingende Bewegungen von sehr kleinen Amplituden zu erörtern, oder, zu bereits in erster Annäherung bekannten Bewegungselementen, sehr kleine Correctionen zu rechnen hat und daher jedesmal, die Glieder höherer Ordnung vernachlässigend, zur linearen Form gelangen muss. Diese Form ist es somit, welche mit Recht von jeher, als die in Bezug auf ihre Brauchbarkeit im Gebiete der Naturwissenschaften allerwichtigste angesehen und von den grössten Analysten mit besonderer Vorliebe gepflegt wurde, als allgemeine Form, in der uns zunächst die Naturgesetze durch die mathematische Analysis geboten werden, in einem so kurzen und inhaltreichen Lapidarstyle, dass es zur Entzifferung derselben einer eigenen Wissenschaft bedarf: Integration der Differentialgleichungen benannt. Gegenwärtiges Werk hat zum Zwecke, nicht sowohl diese Wissenschaft, insofern, als sie den Wissenschaftsforschern zugänglich geworden, zu erschöpfen, als vielmehr dasjenige, was der Verfasser selbst gefunden hat, in so viel möglich gerundeter Form mitzutheilen. Wenn man daher in demselben mitunter auch die Resultate der Forschungen Anderer findet, so geschieht diess nur in solchen Fällen, wo sie nothwendig sind, gewisse Lücken. die sonst übrigbleiben würden,

auszufüllen und jene Rundung herbeizuführen, die ein selbstständiges Werk von dieser Ausdehnung nicht wohl entbehren kann und welches, wenn es dem Studierenden mit Bequemlichkeit zugänglich sein soll, die Mitte halten muss zwischen einer academischen Denkschrift und einem Lehrbuche. Es schien daher dem Verfasser unerlässlich und er glaubte sich besonders den Dank der studierenden Jugend damit zu verdienen, dass er Lehren wie: die Methode der Variation der Constanten, die Ableitung der von Fourier, Liouville u. s. w. herrührenden Formeln, des Laplace'schen und anderer Integrale einschaltete und damit sein Werk, ohne Beihilfe grösserer Bibliotheken, zugänglich machte. Ältere Mathematiker, denen diess Alles bereits bekannt ist, sucht er durch die Auswahl der zu diesen Ableitungen verwendeten Methoden zu entschädigen. Man wird, trotz dieser gebothenen Erleichterungen, in dem Werke doch schwierige Stellen genug finden, die den Scharfsinn des Anfängers vollauf in Anspruch nehmen werden und die jede Erleichterung durch Interpolation bereits bekannter Lehren, besonders, wenn diese, wie es hier der Fall ist, von geringem Umfange sind, um so wünschenswerther erscheinen lassen.

Diejenigen unter den linearen Differentialgleichungen, welchen, ihres häufigen Vorkommens wegen, die höchste Wichtigkeit zuzuschreiben ist, sind die mit constanten Coefficienten. Man stösst jedesmal auf solche, wenn man die Gesetze der Fortpflanzung einer schwingenden Bewegung in einem gleichförmig dichten, wenn auch mit verschiedener Elasticität nach verschiedenen Seiten begabten und unbegränzten Mittel sucht, ja selbst in der Mechanik des Himmels hängen die Störungen der Elemente der Bahnen der Himmelskörper von solchen Gleichungen ab und das zwar in Folge der besonderen Form der Grundgleichungen, die den Beweis gestattet, dass die Störungscoefficienten von der Zeit $t$ unabhängig seien. Zur Integration solcher Differentialgleichungen besitzen wir die glänzendsten, beinahe durchaus von französischen Mathematikern herrührenden Methoden, deren kurze Exposition auch hier nicht fehlen durfte, ohne der Verständlichkeit des Ganzen zu schaden. Die Integration geschieht durch Summen von Exponentialgrössen, welche lineare Formen nach den Coordinaten und der Zeit im Exponenten tragen, also durch Übereinanderlegung von planen Wellen. Hat jedoch das fortpflanzende Mittel nicht die gleiche Beschaffenheit in allen Punkten oder ist es irgendwie begränzt, so wird man genöthigt, die Fiction planer Wellen zu verlassen und die analytische Frage an die Differentialgleichung zu stellen,

ob nicht anders gestaltete, sphärische oder ellipsoidische Wellen in einem solchen Mittel fortgepflanzt zu werden vermögen, oder, ob an die Stelle der constanten Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht eine andere, variable, trete. Erhält man auf diese Frage eine Antwort, so lautet sie gewöhnlich dahin, dass, anstatt einer Gleichung mit constanten Coefficienten oder eines Systemes von solchen, eine andere oder ein anderes zu integriren sei, mit veränderlichen Coefficienten und gerade für solche Gleichungen hatten wir bisher noch keine allgemeine Integrationsmethode, sondern nur einige specielle, je durch einen besonderen Kunstgriff integrirbare Formen und eben eine solche allgemeine Integrationsmethode für Differentialgleichungen, deren Coefficienten algebraische und rationale Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind, auseinanderzusetzen, ist der Zweck dieses Werkes — der Sinn, in welchem eine solche Integration verstanden wird, soll demnächst auseinandergesetzt werden.

Der hier besprochene Gegenstand fing schon vor 18 Jahren an die Aufmerksamkeit des Verfassers zu erregen und die erste Frucht der eingeleiteten Forschungen war eine Integrationsmethode für Differentialgleichungen mit Coefficienten von der Form $a + bx$ mittelst bestimmter Integrale, welche jedoch in vielen Fällen die nöthige Anzahl particulärer, Genüge leistender Werthe nicht lieferte. Einige Jahre später gelang es, durch Anwendung einer neuen Gattung von Transcendenten, auf die zuerst Liouville im ***Journal de l'école polytechnique*** aufmerksam gemacht hat, Differentialquotienten nämlich mit allgemeiner Ordnungszahl, die Methode zu vervollständigen. Der Übergang von einer Form zur anderen war der fruchtbarste auf diesem Felde gemachte Schritt und geschah gerade auf die, im vierten Paragraph des II. Abschnittes umständlich auseinandergesetzte Weise, der vielleicht so mancher überstrenge Mathematiker einige Kühnheit vorzuwerfen geneigt sein wird und die der Verfasser desshalb gerne mit einer anderen, selbst directeren, vertauscht hätte (welche sich auch im V. Abschnitte dieses Werkes vorfindet) wenn es nicht unerlässlich wäre, auf diesem Felde den Übergang von einer Form zur wesentlich davon verschiedenen anderen, auch durch Gebilde wie etwa $\frac{0}{0}$, oder die diesem analogen, schon aus Rücksicht für die Bequemlichkeit des Rechners und die klare Einsicht in die Natur der Sache, zu verfolgen. Die Unzukömmlichkeiten, welche sonst solche Ausnahmsformen begleiten, als: Vieldeutigkeit oder Unbestimmtheit des Werthes, sind hier von

wisse Vorbegriffe erledigt hat, den Beweis, dass dasjenige was man sucht d. h. das Integral einer linearen Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung wirklich vorhanden sei und diess zwar in derjenigen, dermalen einzig zu einem solchen Beweise passenden Form, in die sich nach unserer Erfahrung alle Functionen giessen lassen, nämlich in der einer unendlichen Reihe, geordnet nach aufsteigenden Potenzen der Grundveränderlichen. Da jeder Differentialquotient einer unendlichen und convergirenden Reihe auch wieder eine convergirende Reihe ist, sohin auch das Gleichungspolynom einer linearen Differentialgleichung eine convergirende Reihe darstellt, wenn die abhängige Veränderliche als eine solche gedacht wird, so hat offenbar der Beweis, in welchem lediglich gezeigt wird, dass der Differentialgleichung durch eine convergirende, anstatt der abhängigen Veränderlichen gesetzte, Reihe Genüge geleistet werden könne, nur beiläufig folgenden Sinn: Es lässt sich das Gleichungspolynom, durch Einführung einer unendlichen Reihe anstatt der abhängigen Veränderlichen, in eine unendliche und convergirende Reihe verwandeln, von der die Anfangsglieder in beliebiger Anzahl, durch schickliche Wahl der Coefficienten, zum Verschwinden und der Rest der Nulle beliebig nahe gebracht werden kann. Aus diesem Beweise erhellt zugleich die Form des allgemeinen Integrales, das als eine Summe von mehreren Functionen der unabhängigen Veränderlichen erkannt wird, deren jede eine willkürliche Constante als Factor trägt, und die Eigenschaft hat, für sich der reduzirten Gleichung Genüge zu leisten.

Die Differentialgleichung lässt sich aus den particulären Integralen, die ihr Genüge leisten sollen, durch einen, die Constanten angehenden, Eliminationsprocess ebenso gut bilden, wie sich die algebraische Gleichung bilden lässt, welche bestimmte Wurzeln hat, mit dem Unterschiede jedoch, dass in der letzteren die Coefficienten symmetrische Functionen der Wurzeln sind, in der ersteren aber als Coefficienten zunächst solche Functionen der particulären Integrale auftreten, die, bei allen möglichen Vertauschungen derselben unter sich, nur zwei Werthe annehmen, die sich bloss im Zeichen unterscheiden. Hieraus wird alsogleich der Folgesatz gezogen, dass die linearen Differentialgleichungen, unähnlich in diesem Puncte den algebraischen Gleichungen, keine gleichen particulären Integrale zulassen, weil die Einführung von solchen das Gleichungspolynom identisch auf Null bringen würde. Die Methode der Variation der Constanten und eine Eintheilung des Werkes beschliessen den ersten Abschnitt.

Der zweite Abschnitt behandelt die Differential- und Differenzengleichungen mit constanten Coefficienten und mit solchen von der Form: $a + bx$ nebst einigen anderen, die sich darauf zurückführen lassen, und ist im Wesentlichen der früher erwähnten Denkschrift congruent, mit dem Unterschiede, dass einige Lücken ausgefüllt, einige nothwendige Formeln, die die Denkschrift als bekannt voraussetzte, bewiesen und eine Methode angebracht wurde, sich von der Allgemeinheit des erhaltenen Integrales zu überzeugen. Sucht man die diesem Abschnitte entsprechende Parthie in der Lehre von den algebraischen Gleichungen auf, so findet man sie allenfalls in der Auflösung der binomischen Gleichungen und sieht hier zum ersten Male an dem Umfange des Abschnittes, auf einem wie viel ausgedehnteren und inhaltsreicheren Felde man sich befinde und diess umsomehr, wenn man bedenkt, dass dieser zweite Abschnitt die Differentialgleichungen, welche lauter particuläre Integrale von einerlei Form zulassen, noch lange nicht erschöpfe, dass vielmehr noch viele andere Gleichungsformen dieselbe Eigenschaft darbiethen, bei deren Coefficienten eine gewisse Regelmässigkeit im Baue z. B. ein regelmässiges Ansteigen oder Abnehmen in der Ordnungszahl vom ersten derselben auf den letzten, oder ein Fortschreiten in gleicher Höhe wahrnehmbar ist, die aber in diesem Abschnitte nicht behandelt werden konnten, weil die Form ihrer particulären Integrale erst aus den Lehren erhellt, die der folgende dritte Abschnitt in sich schliesst, welche letztere hinwiederum diejenigen analytischen Erfahrungen, die im zweiten gewonnen wurden, unausweichlich zu ihrer Begründung voraussetzen.

Aus der Theorie der algebraischen Gleichungen lässt sich ein Inbegriff von gewissen Lehren sondern, die sämmtlich zum Zwecke haben, die Beschaffenheit der Wurzeln (ob positiv, negativ, reell, imaginär, oder zwischen gewissen Gränzen enthalten) aus jener der Coefficienten zu erkennen. Hierher gehören die Sätze von Descartes, Harriotte, Fourier, Sturm — sie bilden die Formenlehre der Theorie der algebraischen Gleichungen. Die Differentialgleichungen eignen sich eine ähnliche Formenlehre zu, welche jedoch, der Natur der Sache nach, sich von der früheren wesentlich darin unterscheiden muss, dass sie nicht den numerischen Werth, sondern vielmehr die Form der particulären Integrale erörtert, welche der Gleichung Genüge zu leisten vermögen, indem sie untersucht, welche unverwischbaren Spuren eine jede Form eines neu eingeführten particulären Integrales den

Coefficienten aufpräge. Die meisten Lehren, von welchen hier die Rede ist, sind nun wohl grösstentheils überraschend einfach, da aber die Mannigfaltigkeit der möglichen Formen ihrer eine bedeutendere Fülle erzeugt, so tritt uns hier ein zweites Capitel entgegen, welches das ihm entsprechende auf dem anderen Felde an Umfang weit überbieten muss. Ohngeachtet ihrer Einfachheit ist aber die im dritten Abschnitte enthaltene Formenlehre doch besonders wichtig, man kann sogar sagen: je einfacher, desto wichtiger, weil sie uns nicht nur die Formen der Genüge leistenden particulären Integrale, sondern auch die Werthe mancher darin enthaltener constanter Parameter liefert und diess zwar theils ohne alle Rechnung, theils mit Hilfe sehr geringfügiger Rechnungsentwicklungen, und so geschieht es, dass uns oft durch blosse Anschauung Naturgesetze kund werden, bevor wir noch die Differentialgleichung integrirt haben, die deren Abdruck ist. Exponentialgrössen mit ganzen oder gebrochenen, rationalen oder irrationalen Exponenten, spielen die Hauptrolle bei den eine Differentialgleichung erfüllenden Formen und denkt man sich ein Product aus einer solchen in eine algebraische, ganze oder gebrochene Function, und dieses entweder schlechtweg mit einer Constante multiplizirt, oder, in Combination mit ähnlichen Formen dieser Art, den Rechnungsoperationen des Differenzirens nach allgemeiner Ordnungszahl und des Integrirens zwischen bestimmten oder unbestimmten Gränzen unterworfen, so hat man so ziemlich ein Bild von den Formen, die auf diesem Felde zu erscheinen vermögen. Wir heben aus dem Inhalte der Formenlehre nur noch hervor, dass der erste, zum höchsten Differentialquotienten gehörige Coefficient sämmtliche Nenner verrathe, die in den einzelnen particulären Integralen, gleichviel ob im Exponenten der Exponentielle oder anderwärts, vorkommen, dass die Beschaffenheit der Exponentialgrössen und der Exponent derselben aus den Ordnungszahlen der Coefficienten erschlossen werde und diess zwar mit Hilfe von Regeln, die so einfach sind, dass es beinahe Wunder nimmt, wie sie bisher unbekannt bleiben konnten.

Der nächste, vierte Abschnitt dieses Werkes ist der Transformation der Differentialgleichungen gewidmet und stellt sich, eben so wie das ähnliche Capitel in den algebraischen Gleichungen, die Aufgabe: aus der vorgelegten Differentialgleichung eine andere abzuleiten, deren particuläre Integrale zu jenen der vorgelegten Gleichung in einer bestimmten Relation stehen. Dieser Abschnitt hat, das Studium zu erleichtern, eine besondere Einrichtung erhalten, deren hier mit wenigen Worten Erwähnung geschehen

muss: es enthalten nämlich die ersten Paragraphe sämmtliche Transformationen der Gleichungen, von welchen, bei der wirklichen Integration derselben, nützlicher Gebrauch gemacht wird, in Anwendung auf einfachere Fälle, während der allgemeine, durch sehr complizirte Rechnungen zu entsprechend weitläufigen Formeln führende Fall einer zu transformirenden Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung, den letzteren Paragraphen zugewiesen ist, die man bei einem ersten Studium des Werkes, ohne dem Verständnisse wesentlich Eintrag zu thun, allenfalls überschlagen kann. Die Bearbeitung dieser letzten Paragraphe ist ein Verdienst des Herrn Joseph Derffel, derzeit Assistenten für das Lehrfach der Physik am hiesigen k. k. polytechnischen Institute. Für die wirkliche Integration der Differentialgleichungen ist die Transformationslehre von ungleich höherer Wichtigkeit, als die Lehre von der Transformation algebraischer Gleichungen für die Berechnung der Wurzeln, weil sie Mittel an die Hand gibt, eine gewisse Anzahl constanter, in den particulären Integralen vorkommender Parameter zu bestimmen und so die vollständige Berechnung derselben vorzubereiten. Der Verfasser nimmt sich vor, in einem Anhange zu diesem Werke eine kleine Sammlung der unentbehrlichsten in demselben abgeleiteten Formeln, zur Bequemlichkeit des Rechners, zu liefern, damit man Alles, was zum wirklichen Integrationsgeschäfte gehörig ist, an Einem Orte beisammen finde und nicht im Buche zerstreut aufzusuchen brauche.

Wenn, nach den Ergebnissen der Formenlehre, die einzelnen particulären Integrale ihrer Gestalt nach erkannt und, nach jenen der Transformationslehre, auf die, der wirklichen Berechnung sich am besten anschmiegende Form gebracht worden sind, so ist noch übrig, sie beiläufig auf ähnliche Weise zu isoliren, wie man die Wurzeln einer algebraischen Gleichung isolirt und sodann der Berechnung zu unterwerfen. Eine hiezu dienliche Methode lehrt der fünfte Abschnitt dieses Werkes, der sohin die eigentliche Integration der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen und rationalen Coefficienten in sich schliesst, in einem Sinne, der zwar bereits aus dem Gesagten einigermassen erhellt, hier aber doch näher erörtert werden muss, damit man nicht etwa veranlasst werde, in dem Werke etwas Anderes zu suchen, als darin wirklich enthalten ist.

Man kann sich das Integral einer linearen Differentialgleichung auf drei verschiedene Arten in eben so vielen Formen als auffindbar vorstellen: die erste

dieser Formen ist die einer convergirenden, nach aufsteigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen geordneten Reihe, auf die wir in der Regel jede Function bringen können, an deren numerischem Werthe uns gelegen ist. Wir benützen nun diese Form im gegenwärtigen Werke zwar allerdings, z. B. zum Beweise der Existenz des allgemeinen Integrales, sind sogar zur genauen Discussion aller derjenigen Fälle genöthigt, in denen eine solche Reihenentwicklung unzulässig ist, benützen sie aber zur wirklichen Integration der Gleichungen nicht; denn, eben weil sie die allgemeine Form ist, die jede Function annehmen kann, so ist sie auch die undurchsichtigste, d. h. die zur Bestimmung der speciellen Eigenschaften der Functionen am wenigsten dienliche. Welch' ein einfaches Bild macht sich das mathematische Anschauungsvermögen von einem Sinus, Cosinus oder einer Exponentielle — man bringe diese Functionen in die Alles gleichmachende Reihenform und alle analytischen Eigenschaften: Periodicität, Maximum-, Null-, Minimum-Werthe, unendliches Wachsen oder Abnehmen gegen eine bestimmte Gränze hin oder über alle Gränzen hinaus, sind dem Auge entschwunden. Man gewinnt daher sehr wenig damit, wenn man die particulären Integrale einer Differentialgleichung in einer solchen Reihenform ermittelt hat, wiewohl aus einer solchen Reihe der numerische Werth der Function, für irgend einen bestimmten Werth der unabhängigen Veränderlichen, mit beliebiger Genauigkeit ermittelt werden kann; denn der numerische Werth ist es nicht, den wir suchen — dieser nimmt vielmehr Theil an der Willkürlichkeit der Integrationsconstante — der analytische Bau des particulären Integrales ist es vielmehr, den wir als den Ausdruck des in demselben enthaltenen Naturgesetzes ansehen müssen.

Eine zweite Form, in der man sich das Integral einer linearen Differentialgleichung vorhanden denken kann, ist die geschlossene, wie wir sie für Gleichungen der ersten Ordnung besitzen; sie deutet an, durch welche Rechnungsoperationen man die Gleichungscoefficienten, allgemein und ohne Rücksicht auf ihren speciellen Bau, zu verknüpfen habe, um die entsprechenden particulären Integrale zu erhalten. Auch solche geschlossene Formeln werden im gegenwärtigen Werke nicht gesucht, ja man vermuthet sogar, dass sie für Differentialgleichungen der zweiten und höheren Ordnungen unmöglich seien — der Unmöglichkeitsbeweis, der den ähnlichen Beweisen von Ruffini oder Abel analog wäre, wird auch nicht gegeben, was eine Lücke in diesem Werke ist, deren Ausfüllung jüngeren Talenten überlassen wird, die auch vermuthlich mehr Dank dafür einernten werden.

Endlich lässt sich noch eine dritte und letzte Methode der Integration linearer Differentialgleichungen denken, die einerseits die durchsichtigsten aller analytischen Formen, d. h. Exponentialgrössen, trigonometrische Functionen, nach absteigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen geordnete, endliche oder unendliche Polynome, denen die Eigenschaft zukömmt, von einem gewissen Werthe dieser Veränderlichen an das Zeichen nicht mehr zu ändern u. s. w., zu Grunde legt, andererseits aber sich dem jedesmaligen speciellen Baue der Coefficienten anpasst und nicht nur eine andere wird, sondern auch zu anderen wesentlich verschiedenen Formen führt, wenn sich der Coefficientenbau anders gestaltet, und eine solche Integrationsmethode ist es, die man in diesem Buche auseinandergesetzt findet und die auch zu ihrer Begründung wesentlich einer Formen- und Transformationslehre bedurfte. Stellt man die analytischen Ausdrücke, in denen unendliche Reihen vorkommen, denjenigen gegenüber, wo solche nicht vorhanden sind, und nennt man letztere, im Gegensatze zu den ersteren, geschlossene Formen, so führt unsere Integrationsmethode zu solchen, so oft sie vorhanden sind, was übrigens der Fall ist unter unendlich vielen verschiedenen Bedingungen, in der Regel besagend, dass ein, aus den constanten Parametern, die in der Differentialgleichung vorkommen, gebildeter Ausdruck, eine ganze Zahl sei. Unsere Methode führt ferner zu verschiedenen Formen der particulären Integrale, deren Verbindung untereinander, oft nur durch Gebilde wie $\frac{0}{0}$ vermittelt und aus welchen der Analyst die ihm am meisten zusagenden wählen wird. Nach dieser unserer Methode erscheinen nun alle Differentialgleichungen von linearer Form und mit algebraischen und rationalen Coefficienten als integrirbar, unter der, sich ohnehin von selbst verstehenden Bedingung, dass die untergeordneten Rechnungsoperationen, die sie erheischt: Auflösung höherer Gleichungen, Quadraturen u. s. w. practisch durchführbar seien, was wohl in der Regel bei solchen Differentialgleichungen der Fall sein wird, die das wirkliche Ergebniss eines mathematischen oder physikalischen Problemes sind, während sich andererseits ohne allen Anstand Fälle von Differentialgleichungen werden denken lassen, etwa mit einer grossen Anzahl unbestimmter darin enthaltener constanter Parameter und von hohem Grade, die man, wegen der Undurchführbarkeit der untergeordneten Rechnungsoperationen, nur insofern als integrirbar wird ansehen können, als man sich diese Rechnungsoperationen als durchführbar denkt; man wird nämlich

ungefähr so reden müssen: „Diese, für mich unauflösbare, algebraische Gleichung habe die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$, so werden die particulären Integrale die und jene sein, wenn unter den Wurzeln die oder jene Relationen Statt finden;“ man wird sich dann in eine Unzahl von Distinctionen verwickelt sehen, die Formen der particulären Integrale werden, oft bei der geringsten Änderung, angebracht an den constanten Parametern der Differentialgleichung, sich, wie die Bilder eines Kaleidoscopes, in andere wesentlich verschiedene verwandeln und derjenige, der eine solche Differentialgleichung von höherer Ordnung zu integriren unternimmt, wird eine ähnliche Arbeit damit haben, wie wenn er alle Curven von irgend einer z. B. der vierten, fünften, sechsten, ... Ordnung aufzählen wollte. Es versteht sich diess Alles im Grunde von selbst und ist eine natürliche Folge der inhaltsschweren Sprache, welche die Analysis hier spricht und kraft deren eine jede Differentialgleichung als ein Satz erscheint, der so viel und so Mannigfaltiges sagt, dass man mit seiner Auslegung oft Bände zu füllen vermöchte. Der Verfasser ist nicht im Besitze von mehr als Einer Integrationsmethode dieser Art, glaubt jedoch davon überzeugt zu sein, dass man deren in der Folge mehrere finden wird, die je eigene Vortheile darbiethen und sich gegenseitig gewissermassen ergänzen werden auf ähnliche Weise, wie diess mit den Approximationsmethoden zu den Wurzeln der algebraischen Gleichungen der Fall ist. Diese Methoden können sich, der Natur der Sache nach, nur unterscheiden in der Art, wie die Sonderung der particulären Integrale von einander bewerkstelligt wird, um dieselben dann entweder einzeln oder gruppenweise zu bestimmen, so zwar, dass die zu einerlei Form gehörigen zusammen berechnet werden. Die hier vorgetragene Methode der Sonderung gründet sich im Wesentlichen darauf, dass man die Fälle benützt, in welchen die Analysis selbst unter den particulären Integralen einen Unterschied macht, d. h. wo sie dieselben in Form von Reihen, geordnet nach aufsteigenden Potenzen der Variablen, zu liefern verweigert. Man erzielt dann, gehörig verfahrend, ein nach absteigenden Potenzen geordnetes Polynom, indem man eine solche Reihe wie die, deren eben Erwähnung geschah, zu verlangen scheint. Die so erzielte Form biethet aber den dreifachen grossen Vortheil: gelegentlich von selbst abzubrechen bei irgend einem Gliede, unter unzähligen Bedingungen; so sie nicht abbricht und nur überhaupt convergent ist, desto rascher zu convergiren, je grösser der Werth der unabhängigen Veränderlichen ist; endlich, von

irgend einem Werthe der letzteren angefangen, fortwährend einerlei Zeichen beizubehalten. Wir bekommen sonach die geschlossene Form so oft sie existirt und, wenn sie nicht vorhanden ist, mindestens einen Ausdruck, der in den meisten Fällen dieselben Dienste leistet. Erschwert wird das Integrationsgeschäft durch den Umstand, dass in der Differentialgleichung als Coefficienten nicht lauter Zahlen, in welchem Falle die Integration keinerlei Schwierigkeiten biethet und alle Unterscheidungen und Formänderungen der particulären Integrale wegfallen würden, sondern auch unbestimmt gelassene Buchstaben-Parameter vorkommen; diess macht, dass unsere Methode eher mit der Auflösung solcher algebraischer Gleichungen, die in ihren Coefficienten derlei unbestimmte Parameter enthalten, Ähnlichkeit gewinnt, und auch wirklich die Auflösung solcher Gleichungen erheischt, wobei man es noch als einen günstigen Umstand betrachten muss, dass solcher unbestimmter Parameter, wenigstens in all' denjenigen Fällen, wo ein wirkliches practisches Problem vorliegt, in der Regel nur eine beschränkte Anzahl auftritt, die noch überdiess die Bedeutung von Druck, Spannung, Dimension u. s. w. haben, in Folge deren sie den Werthen nach, die sie anzunehmen vermögen, begränzt erscheinen.

Da der grösste Theil derjenigen Differentialgleichungen, zu welchen man in der Theorie des Lichtes, Schwingungen elastischer Körper u. s. w. gelangt, partielle und zudem noch in grösserer Anzahl vorhandene sind, so würden die hier zur Sprache gebrachten Methoden nur Halbes leisten, wenn sie nicht auch die Anwendung auf Systeme von mehreren Differentialgleichungen und namentlich auf partielle gestatteten. Der sechste Abschnitt zeigt die Art dieser Anwendung mit ausschliesslicher Berücksichtigung derjenigen Formen, die bei mechanischen Problemen wirklich vorkommen d. h. Differentialgleichungen $3n$ an der Zahl, wenn es sich um $n$ sich gegenseitig durchdringende Systeme von materiellen Puncten handelt, mit $3n$ abhängigen Veränderlichen, die in der Regel die Bedeutung von Projectionen kleiner Verschiebungen aus der Ruhelage auf 3 Coordinatenaxen haben und 4 unabhängigen Veränderlichen: 3 Coordinaten nämlich und der Zeit, mit Berücksichtigung ferner der ähnlichen in der Wärmelehre vorkommenden Formen. Der Weg, den man hier einschlägt, ist der allgemein bekannte, schon von d'Alembert bei den Schwingungen gespannter Saiten betretene; man sucht sich nämlich Genüge leistende particuläre Integrale zu verschaffen, die zugleich die Eigenschaft haben, einzeln die Bedingungen an den Gränzen des materiellen Systemes zu erfüllen;

die sodann in denselben noch übrigbleibenden willkürlichen Constanten sucht man so zu wählen, dass das gefundene Integral auch den anfänglichen Erregungszustand repräsentirt. Hiebei wird die, allen Analysten hinlänglich bekannte, seit d'Alembert von Poisson, Fourier und anderen Mathematikern vielfältig verwendete Methode in Anwendung gebracht, welche darin besteht, dass man das gewonnene und für den anfänglichen Werth der Zeit $t$ genommene Integral, mit einer entsprechenden Function der Coordinaten multiplizirt und dann, behufs der Coefficientenbestimmung, der Integration zwischen gewissen Gränzen unterwirft. Diess ist ein längst bekanntes Verfahren, zu welchem dem Verfasser nur folgendes ihm Eigenthümliche hinzuzuthun Gelegenheit gebothen war: Er liess die multiplizirende Function eine unbestimmte sein, wendete sich zur Bestimmung derselben an die Differentialgleichung oder das System von solchen selbst und fand sie durch Integration einer ähnlichen Differentialgleichung oder eines ähnlichen Systemes wie das vorgelegte, d. h. von derselben Ordnung, nur mit anderen Coefficienten und entdeckte zwischen diesen Gleichungen ein gewisses, zur Bestimmung jener Constanten dienliches Reciprocitätsverhältniss. Diesem Abschnitte liegen daher wieder die schönen Arbeiten französischer Mathematiker zu Grunde, deren elegante Methoden der Verfasser nur erweitert und seinen Zwecken angepasst hat.

Die bekannten, glänzvollen Integrationsmethoden, besonders partieller Differentialgleichungen, von Lagrange, ferner die von Pfaff herrührende und von Jacobi vollendete, ingleichen die schönen Untersuchungen von Sturm und Liouville auf diesem Felde, welche die Ermittlung der Eigenschaften des Integrales einer Gleichung der zweiten Ordnung, aus eben dieser Gleichung selbst und ohne Integration, zum Zwecke haben, sind in diesem Buche, wiewohl wir diese Arbeiten zu den herrlichsten Erzeugnissen des menschlichen Geistes zählen und eine neue zusammenhängende Darstellung derselben gerade jetzt für sehr verdienstlich halten würden, lediglich aus dem schon früher zur Sprache gebrachten Grunde nicht aufgenommen, weil alle diese Lehren zur Begründung der unseren nicht unumgänglich nothwendig erscheinen.

Die Erfahrung aller Zeiten hat gelehrt, dass umfangreichere und einen einzigen Gegenstand im Zusammenhange verfolgende mathematische Werke, zu denen wohl auch das vorliegende zu zählen ist, sich äusserst langsam und oft erst nach mehreren Decen-

nien Eingang verschaffen. Einzelne practische Beispiele sind ein geeignetes Mittel, diese Frist abzukürzen und es ist hier auch durchaus nicht schwer, eine Auswahl von solchen aus den Gebiethen der Mechanik und Physik zu treffen, nachdem es der unintegrirt gelassenen Differentialgleichungen bei den interessantesten Undulationsproblemen eine gar nicht unbeträchtliche Anzahl gibt. Allein die Einschaltung solcher Beispiele würde dieses Werk zu einem ungewöhnlichen Umfange ausgedehnt und ihm jenen rein analytischen Character genommen haben, den festzuhalten wünschenswerth erschien. Man wird daher in demselben nur die einfachsten und nur so viele Beispiele gewahren, als zur Begründung und zum Verständnisse der Lehren nothwendig erachtet wurde. Um jedoch diejenigen Leser, die sich mit dem neuen Gegenstande angelegentlicher zu beschäftigen Lust haben, in ihren Studien zu unterstützen und durch Darbiethung gezogener Anwendungen ferner anzuregen, hegt der Verfasser die Absicht, eine Reihe einzelner Abhandlungen, die verschiedene bisher noch unerörterte Schwingungsprobleme zum Gegenstande haben sollen, und wegen des Vorkommens linearer Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten hiehergehörig sind, dem Werke nachfolgen zu lassen, von denen die erste spätestens mit der dritten und letzten Lieferung dieses Werkes zugleich erscheinen wird.

Legt man auf die Freiheit von Druckfehlern einigen Werth und sollte man finden, dass vorliegendes Buch diese Eigenschaft in höherem Grade besitze, als es gewöhnlich der Fall ist, so wäre diess ein Verdienst derjenigen Schüler des Verfassers, welche die lästige und zeitraubende Arbeit der Correctur mit dankenswerther Bereitwilligkeit übernommen haben. Betheiligt haben sich daran, nebst bereits genanntem Herrn J. Derffel, dem der grösste Theil der Arbeit zufiel, die Herren Dr. I. Heger, F. Langer und Dr. J. Zampieri.

WIEN, im Mai 1851.

Der Verfasser.

# I. Abschnitt.

# Einleitung.

## §. 1.

### Allgemeine Vorbegriffe.

Gleichungen, in welchen gewisse veränderliche Grössen: $\xi$, $\eta$, ....., die man als Functionen gewisser anderer: $x$, $y$, ..... betrachtet, sammt ihren, nach diesen letzteren genommenen Differentialquotienten vorkommen, heissen **Differentialgleichungen**. Ihre allgemeine Form wäre:

$$F\left(x, y, \ldots . \xi, \eta, \ldots . \frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\xi}{dy}, \ldots \frac{d^2\xi}{dx^2}, \ldots .\right)=0. \tag{1}$$

Sie heissen **partielle Differentialgleichungen**, wenn in denselben partielle Differentialquotienten, genommen nach mehren Veränderlichen erscheinen. Der höchste der darin vorkommenden Differentialquotienten bestimmt ihre **Ordnungszahl**. Diejenigen Variablen, die als Functionen von anderen betrachtet werden, heissen **abhängige**, die anderen, als deren Functionen man die ersteren ansieht, heissen **unabhängige** Veränderliche. **Linear** ist die Gleichung dann, wenn sie, nach den abhängigen Veränderlichen und ihren Differentialquotienten geordnet, nach diesen nur entweder Glieder der ersten Ordnung oder von Einer Dimension, oder solche von der Ordnung Null, d. h. die die abhängige Veränderliche gar nicht enthalten, darbietet. In einer Differentialgleichung müssen daher mindestens zwei Veränderliche vorkommen, Eine abhängige und Eine unabhängige. Nennt man erstere $y$, letztere $x$, so ist die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung von der $n^{ten}$ Ordnung mit nur zwei Veränderlichen folgende:

$$X_n \frac{d^n y}{dx^n} + X_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots . . + X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = F(x), \tag{2}$$

unter $X_n$, $X_{n-1}$, ... $X_0$ und $F(x)$ beliebige Functionen von $x$ verstanden, **die kein $y$ enthalten.**

Wir werden uns in diesem Werke vorzugsweise mit solchen Differentialgleichungen, bei denen namentlich die Coefficienten $X_n$, $X_{n-1}$, .... $X_0$ **algebraische** und **rationale** Functionen von $x$

sind, beschäftigen und führen, der Kürze wegen, für die Differentialquotienten von $y$ folgende bequemere Bezeichnungen ein:

(3) $$\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{d^2y}{dx^2}=y'', \; \ldots\ldots \; \frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)},$$

deren Gebrauch die Gleichung (2) auf die Form bringt:

(4) $$X_n y^{(n)}+X_{n-1} y^{(n-1)}+X_{n-2} y^{(n-2)}+\ldots\ldots+X_1 y'+X_0 y=F(x),$$

und nach welcher $y^{(0)}$ mit $y$ schlechtweg gleichbedeutend ist.

Jede Function von $x$, die anstatt $y$ gesetzt die Gleichung (2) identisch macht, nennt man ein Integral derselben. So viele von einander verschiedene Ausdrücke dieser Art es gibt, so viele Integrale hat also die Gleichung. Diese Integrale auffinden heisst: die Gleichung integriren.

Man kann sich sehr leicht in dem einfachsten, unter die Form der (2) fallenden Beispiele:

(5) $$\frac{d^ny}{dx^n}=F(x)$$

überzeugen, dass es eine Unzahl von Integralen einer Differentialgleichung geben könne, denn hier kann man sich den Werth von $y$ direct, durch $n$maliges Integriren an der Function $F(x)\,dx^n$ angebracht, verschaffen. Erhält man durch eine solche Operation einen Werth $\varphi(x)$, so wird offenbar auch:

(6) $$y=\varphi(x)+C_{n-1}x^{n-1}+C_{n-2}x^{n-2}+\ldots\ldots+C_1 x+C_0$$

der Gleichung Genüge leisten, unter $C_0$, $C_1$, ... $C_{n-1}$, $n$ willkürliche Constanten verstanden die man ganz nach Belieben wählen und durch deren andere und andere Wahl man eine unbegränzt Menge von Ausdrücken wird erzeugen können, die sämmtlich die Eigenschaft als Integrale Genü zu leisten, besitzen, die aber alle in der allgemeinen Form (6) enthalten sind, und aus ihr durch Speci lisiren der Werthe der Constanten hervorgehen. Es lässt sich vorderhand vermuthen, dass überhaupt Differentialgleichungen der $n^{\text{ten}}$ Ordnung solche mit $n$ willkürlichen Constanten versehene Integrale kommen — man nennt sie: allgemeine Integrale, dagegen diejenigen Ausdrücke, welche aus allgemeinen Integrale dadurch hervorgehen, dass man allen oder einigen der darin vorhandenen Const bestimmte Zahlenwerthe, z. B. 0 beilegt, particuläre Integrale genannt werden.

Die analytische Erfahrung hat gezeigt, dass eine Gleichung wie (4) leichter integrirt w wenn $F(x)=0$ ist, und dass man aus dem Integrale der Gleichung, in welcher diese Functio schwindet, sich jenes der anderen, in welcher dieselbe von der Nulle verschieden ist, zu versch Stande sei. Diess begründet eine Eintheilung der Differentialgleichungen in reducirte und com bei den ersteren ist nämlich der zweite Theil Null, bei den anderen ist er $F(x)$.

## §. 2.

## Integration der linearen Differential- und Differenzen-Gleichungen der ersten Ordnung.

Richten wir zuerst unsere Aufmerksamkeit auf die einfachsten linearen Differentialgleichungen, nämlich die der ersten Ordnung. Die Form einer completen Gleichung dieser Art ist:

$$X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = F(x) \tag{7}$$

und die der reducirten:

$$X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = 0. \tag{8}$$

Die Integration der letzteren ist unschwer. Man bewirkt nämlich alsogleich eine Sonderung der Variablen und erhält:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{X_0}{X_1} dx,$$

integrirend:

$$\log \frac{y}{C} = -\int \frac{X_0}{X_1} dx,$$

oder:

$$y = C.e^{-\int \frac{X_0}{X_1} dx}, \tag{9}$$

unter $C$ eine willkürliche Constante verstanden.

Wir erhalten also hier das Integral einer reduzirten Differentialgleichung der ersten Ordnung in Form eines geschlossenen Ausdruckes, der uns im Wesentlichen sagt, welche Rechnungsoperationen man mit den Coefficienten $X_0$ und $X_1$ vorzunehmen habe, um das gesuchte Integral zu erhalten, was auch übrigens der Bau dieser Coefficienten sein mag, und der Umstand, dass eben diese Rechnungsoperationen nicht immer, ja nur in seltenen speciellen Fällen in anderer als Reihenform durchgeführt werden können, hindert uns gar nicht den Ausdruck einen geschlossenen zu nennen, so wie wir überhaupt in der Analysis eine Rechnungsoperation als durchgeführt ansehen, wenn wir sie auf andere Rechnungsoperationen untergeordneter Art zurückgeführt haben, gleichviel ob letztere ein geschlossenes Resultat liefern oder nicht. So betrachten wir die Wurzeln einer höheren algebraischen Gleichung als aufgefunden, wenn wir ihre Berechnung von den Rechnungsoperationen des Potenzirens und Radizirens abhängig gemacht haben, und so sehen wir auch eine partielle Differentialgleichung für integrirt an, wenn es uns gelungen ist, ihre Integration auf die anderer nicht partieller Differentialgleichungen zurückzuführen. Genau auf dieselbe Weise halten wir den eben gewonnenen Ausdruck für einen geschlossenen, und heben an demselben die Eigenschaft noch besonders hervor, dass die Rechnungsoperationen, denen die Coefficienten $X_0$

und $X_1$ zu unterwerfen sind, um das Integral zu bilden, bei allen möglichen Formen derselben sich nicht ändern, sondern stets dieselben bleiben. Es werden uns später geschlossene Formeln von anderer Art begegnen, die mit der eben gewonnenen das gemeinschaftlich haben, dass die Auffindung des Integrals auf die Ausführung von Rechnungsentwicklungen niedrigerer Ordnung: Auflösung von höheren algebraischen Gleichungen, Integration gewöhnlicher Differentialausdrücke, sogenannte Quadraturen u. s. w. reduzirt wird, die sich aber von ebenderselben dadurch unterscheiden, dass sie eine bestimmte Form der Coefficienten voraussetzen und eine Änderung, ja eine vollkommene Umgestaltung erleiden, wenn die Coefficientenform eine andere wird.

Ein gewisses, dem menschlichen Geiste seiner Natur nach inwohnendes Streben nach Allgemeinheit macht, dass wir den geschlossenen Formen der ersten Art, so oft solche vorhanden sind, einen höheren Werth beilegen; demungeachtet ist es bis jetzt den Analysten nicht gelungen eine ähnliche Formel für die Gleichung der zweiten Ordnung:

$$X_2 \frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = 0$$

aufzufinden, welche darthäte, wie sich das Integral aus den Coefficienten $X_0$, $X_1$ und $X_2$ construiren lasse. Dieser Umstand einerseits, und die mannigfaltigen Formen geschlossener Formeln der zweiten Art, die offenbar als specielle Fälle in der ersteren, so sie vorhanden wäre, enthalten sein müssten andererseits, machen es sehr wahrscheinlich, dass eine solche geschlossene Formel gar nicht existire. Der Beweis der Nichtexistenz, den man bisher zu führen noch nicht versucht hat, würde gleichwohl auf diesem Felde genau denselben, ja vielleicht einen noch höheren Nutzen gewähren, als der Beweis des Nichtvorhandenseins geschlossener algebraischer Formeln für Gleichungen, die den vierten Grad übersteigen, und würde einer kommenden Generation von Mathematikern manche unnütze Mühe ersparen. Wir empfehlen daher die Aufsuchung dieses wichtigen Beweises allen jüngeren Talenten, die ihren Beruf für die tiefsinnigste aller Wissenschaften durch eine glänzende und nützliche Arbeit zu bethätigen Lust haben.

Aus dem gewonnenen Integrale der reduzirten Gleichung lässt sich jenes der completen ohne Mühe ableiten. Es erscheint ersteres in der That in der Form:

$$y = Cy_1$$

ein Ausdruck, in welchem $C$ eine willkürliche Constante und

$$y_1 = e^{-\int \frac{X_0}{X_1} dx} \tag{10}$$

ist. Setzen wir das Integral der completen Gleichung (7) als auf dieselbe Form gebracht voraus, so dass für sie

$$y = Ly_1 \tag{11}$$

ist, so wird $L$ nicht mehr eine Constante, sondern eine, annoch zu bestimmende Function von $x$ sein. Diese zu ermitteln, substituiren wir den Ausdruck (11) in die Gleichung (7) und erhalten:

$$L\left(X_1\frac{dy_1}{dx}+X_0 y_1\right)+X_1 y_1\frac{dL}{dx}=F(x). \tag{12}$$

Der Coefficient von $L$ ist hier der Nulle gleich, weil $y_1$ ein der reduzirten Gleichung genügender Werth ist; wir erhalten daher kürzer:

$$X_1 y_1\frac{dL}{dx}=F(x) \text{ und } L=\int\frac{F(x)}{X_1 y_1}dx+C,$$

also das Integral der completen Gleichung:

$$y=Cy_1+y_1\int\frac{F(x)}{X_1 y_1}dx; \tag{13}$$

es setzt sich, wie man sieht, aus zwei Theilen zusammen: dem, mit einer willkürlichen Constante verknüpften Integrale der reduzirten Gleichung und einem zweiten Ausdrucke, der keine Constante enthält und die Eigenschaft hat, der completen zu genügen. Man könnte den letzteren auch eine besondere Auflösung dieser completen Gleichung nennen.

Das hier entwickelte Verfahren passt nicht nur auf Differentialgleichungen, sondern ist auch anwendbar bei, der ersten Ordnung angehörigen Gleichungen mit endlichen Differenzen, wie etwa:

$$\Delta y+Xy=F(x). \tag{14}$$

Man wendet sich zuvörderst an die reduzirte Gleichung:

$$\Delta y+Xy=0, \tag{15}$$

und zieht aus ihr:

$$\Delta \log y=\log\frac{y+\Delta y}{y}=\log(1-X),$$

diess gibt sodann:

$$y=\psi\, e^{\Sigma[\log(1-X)]} \tag{16}$$

wo unter $\psi$ eine periodische Function von $x$ verstanden wird, die sich nicht ändert, wenn man diese Variable um ihr Increment $\Delta x$ vermehrt. Dieses Integral der reduzirten Differenzen-Gleichung wird nun in das der completen dadurch verwandelt, dass man den periodischen Factor $\psi$ in einen andern $L$ verwandelt, für welchen eine leicht durchzuführende Rechnung folgenden Werth liefert:

$$L=\psi+\Sigma\left[\frac{F(x)}{1-X}e^{-\Sigma[\log(1-X)]}\right],$$

und hieraus:

$$y = \psi\, e^{\Sigma[\log(1-X)]} + e^{\Sigma[\log(1-X)]} \Sigma\left[\frac{F(x)}{1-X} e^{-\Sigma[\log(1-X)]}\right].$$

Auch dieses Integral der completen Differenzen - Gleichung besteht aus dem der reduzirten und einer besonderen Auflösung der completen.

## §. 3.

## Beweis der Existenz und allgemeine Form des Integrals einer linearen Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung.

Wiewohl wir ähnliche Formeln, wie die im vorigen Paragraph entwickelten, für die Integrale der linearen Differentialgleichungen der zweiten und der höheren Ordnungen nicht mehr besitzen, so lässt sich doch zeigen, dass eine jede lineare Differentialgleichung von der Ordnung $n$ ein allgemeines, mit $n$ willkürlichen Constanten versehenes Integral zulasse, von folgender Form:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + R, \tag{18}$$

wo $C_1$, $C_2$, .... $C_n$ die $n$ willkürlichen Constanten, $y_1$, $y_2$, ... $y_n$ aber $n$ von einander verschiedene Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x$ sind, die man sich, eben so wie den, eine besondere Auflösung der completen Gleichung vorstellenden Ausdruck $R$, wenn auch nicht in anderer, doch mindestens in der Form von convergirenden Reihen wird verschaffen können. Um diess zu beweisen nehmen wir die Gleichung (2) oder (4) des §. 1 vor, denken uns dieselbe durch $X_n$ dividirt und ertheilen ihr somit die folgende Gestalt:

$$y^{(n)} = X_{n-1} y^{(n-1)} + X_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots X_0 y + F(x), \tag{19}$$

bemerken dann andererseits, dass die allgemeinere Mac-Laurin'sche Formel jede Function $y$ von $x$ in Form einer Reihe liefere, wie folgt:

$$\begin{aligned} y = \mathrm{y} + \mathrm{y}'\,(x-\alpha) + \mathrm{y}''\,\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \mathrm{y}'''\,\frac{(x-\alpha)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \mathrm{y}^{(n-1)}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \mathrm{y}^{(n)}\frac{(x-\alpha)^n}{1.2.3\ldots n} + \mathrm{y}^{(n+1)}\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} + \ldots\ldots, \end{aligned} \tag{20}$$

wo y, y', y'', ... die Werthe sind, welche $y$, $y'$, $y''$, ... erhalten, wenn man in ihnen $x = \alpha$ se
Man denke sich jetzt die Gleichung (19) mehrere Male hintereinander ins Unbeschränkte differenzirt, in die so erhaltenen Ausdrücke für die successiven Differentialquotienten

$$y^{(n+1)},\ y^{(n+2)},\ y^{(n+3)},\ \ldots.$$

die Werthe aus den vorhergehenden Gleichungen gesetzt, so wird man offenbar für jeden derselben bezüglich der Differentialquotienten von $y$ linearen Werth von der Form erhalten:

$$y^{(n+s)} = M_{n-1} y^{(n-1)} + M_{n-2} y^{(n-2)} + M_{n-3} y^{(n-3)} + \ldots + M_0 y + N, \tag{21}$$

der dann, auf dem Wege der abermaligen Differentiation und Substitution des Werthes aus der Gleichung (19), den nächst höheren Differentialquotienten liefern wird:

$$
\begin{aligned}
y^{(n+s+1)} = & \left.\begin{matrix} M_{n-2} \\ +M'_{n-1} \\ +M_{n-1}X_{n-1} \end{matrix}\right\} y^{(n-1)} + \left.\begin{matrix} M_{n-3} \\ +M'_{n-2} \\ +M_{n-1}X_{n-2} \end{matrix}\right\} y^{(n-2)} + \left.\begin{matrix} M_{n-4} \\ +M'_{n-3} \\ +M_{n-1}X_{n-3} \end{matrix}\right\} y^{(n-3)} + \cdots\cdots \\
& + \cdots\cdots\cdots + \left.\begin{matrix} M_0 \\ +M'_1 \\ +M_{n-1}X_1 \end{matrix}\right\} y' + \left.\begin{matrix} M'_0 \\ +M_{n-1}X_0 \end{matrix}\right\} y + \begin{matrix} N' \\ +M'_{n-1}F(x) \end{matrix}
\end{aligned} \qquad (22)
$$

Setzen wir in allen erhaltenen Gleichungen anstatt $x$ die Grösse $\alpha$, eine Substitution, die wir, dem bereits Gesagten gemäss dadurch andeuten, dass anstatt der

$$y, \quad y', \quad y'' \ldots\ldots\ldots M, X, \ldots\ldots$$

zu stehen kömmt:

$$\mathrm{y} = C_1, \ \mathrm{y}' = C_2, \ \mathrm{y}'' = C_3, \ \ldots\ldots \ \mathrm{M}, \ \mathrm{X}, \ \ldots\ldots,$$

so erhalten wir sämmtliche Coefficienten der, die Entwicklung von $y$ gebenden Mac-Laurin'schen Formel (20) bis auf die $n$ ersten, zu deren Bestimmung kein Mittel vorhanden ist, die somit eben so viele Constanten vorstellen, deren Werthe aus der Differentialgleichung selbst nicht abgeleitet werden können, wohl aber aus den Nebenbedingungen der Aufgabe, die zu derselben geleitet hat, die somit so lange, als von solchen Nebenbedingungen keine Rede ist, als ganz willkürliche Constanten dastehen. Nach diesen Constanten nun kann der in Reihenform vorkommende Werth von $y$ geordnet werden, und gibt so geordnet offenbar einen Ausdruck, wie der (18), den wir als allgemeine Form des Integrals einer Differentialgleichung von der $n^{ten}$ Ordnung aufgestellt haben, und in welchem die $y_1, y_2, \ldots. y_n$ zunächst ebenfalls in Reihenform erscheinen.

Damit nun aber erhelle, dass diese Reihen wirklich gewisse bestimmte Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ von $x$ darstellen, wird es nothwendig sein zu zeigen, dass sie convergiren, wenn auch nicht für alle möglichen Werthe von $\alpha$ und in beliebiger Ausdehnung der Werthe von $x$, doch mindestens für gewisse $\alpha$ und für solche $x$, die innerhalb, in endlichem Abstande von einander befindlicher Gränzen liegen; denn es ist allgemein bekannt, dass die Mac-Laurin'sche Reihe für gewisse Werthe von $\alpha$, für welche die Function, die sie darstellt, endlich oder stetig zu sein aufhört, unendliche Coefficienten bekomme, und somit unbrauchbar werde. Diess nöthigt uns solche Werthe von $\alpha$ im Vorhinein auszuschliessen, für welche die eben genannten Coefficienten unendlich werden. Auch ist es genügend, wenn diese Reihen erst in ihren spätesten Gliedern zu convergiren anfangen. Weil nun aber, selbst unter diesen Beschränkungen, der Beweis der Convergenz einige Ueberlegung erheischt, so wollen wir ihn vor der Hand nur für solche Gleichungen, die wir zu behandeln gedenken, das heisst: mit algebraischen, rationalen und ganzen Coefficienten durchführen, und unterscheiden, um die folgenden Betrachtungen übersichtlicher zu machen, folgende zwei Fälle:

**Erstens.** Den Fall, wo sämmtliche in der Gleichung (21) vorkommende Coefficienten $M_{n-1}$, $M_{n-2}$, .... $M_0$, $N$ für $x=\alpha$ endlich bleiben, was auch immer $s$ bedeuten mag.

**Zweitens.** Den Fall, wo diese Coefficienten mit $s$ ins Unendliche wachsen, oder auch, bei dem unendlichen Wachsen von $s$, in einen Zustand des Schwankens zwischen endlichen und unendlichen Werthen gerathen. Diesen letzteren Fall zerlegen wir abermals in zwei andere, nämlich:

*a)* den, wo in der, durch Division mit $X_n$ auf die Form (19) gebrachten Differentialgleichung, in Folge des Umstandes, dass $X_n$ constant ist, sämmtliche Coefficienten $X_{n-1}$, $X_{n-2}$, .... $X_0$ ganze Function von $x$ sind;

*b)* den, wo dieselben als rationale gebrochene Functionen von $x$ erscheinen.

Im ersten Falle lässt sich die Convergenz der Reihen, von denen die Rede ist, ohne Schwierigkeit darthuen. Denn, sind sämmtliche mit dem Buchstaben $M$ bezeichnete Grössen für $x=\alpha$ endliche Zahlen, so wird es unter ihnen offenbar entweder eine grösste geben, oder eine gewisse endliche Gränze, die sie für keinen Werth von $s$ überschreiten. Wenn wir nun dieses, numerisch und ohne Rücksicht auf das Zeichen grösste $M$, oder diese Gränze, anstatt aller diesen Namen tragenden Coefficienten schreiben, sie einander gleich machend, so erhalten wir aus diesen letzteren zusammengesetzte Reihen, in denen sämmtliche Glieder grösser oder mindestens eben so gross sein werden, als die der anfänglich vorliegenden. Lassen sich also erstere, durch schickliche Wahl der Werthe von $x-\alpha$ innerhalb endlicher Gränzen, convergent machen, und zwar ohne Rücksicht auf das Zeichen ihrer Glieder, d. h. selbst dann, wenn die etwa wechselnden Zeichen in dieselben verwandelt werden, so wird Gleiches um so mehr von den letzteren zu sagen sein. Nun sind aber die ersteren, durch Gleichstellung aller $M$ erzeugten Reihen, offenbar mit der für die Exponentielle: $e^{x-\alpha}$ geltenden identisch, multiplizirt nur noch mit einem Factor wie $MC$, da aber diese für jeden Werth von $x-\alpha$ convergirt, so werden offenbar um so mehr diejenigen Reihen convergiren, für jedes $x-\alpha$, die die Entwicklung der particulären Integrale $y_1$, $y_2$, .... $y_n$ darstellen, wenn sich nur darthuen lässt, dass alle mit $M$ bezeichneten Coefficienten endliche Werthe haben, was auch $s$ bedeuten mag. Da sich aber diese Annahme nur in seltenen Fällen verwirklichen wird, zum Exempel: im Falle, wo alle Coefficienten der Differentialgleichung constant sind, so gehen wir zu den ungleich wichtigern beiden übrigen Fällen und namentlich zum ersten derselben, dessen unter *a)* Erwähnung geschah, über, betrachten mithin die Coefficienten $X_{n-1}$, $X_{n-2}$, ..... $X_0$ in der Gleichung (19) als ganze Functionen von $x$.

Wenn nun derjenige von ihnen, dessen Ordnungszahl entweder die grösste ist, oder wenigstens von der eines anderen nicht überschritten wird, der $m^{ten}$ Ordnung angehört, also die Form hat:

$$X = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_0,$$

so können wir auch alle übrigen von eben derselben Form voraussetzen, wenn wir nur zugeben, dass gelegentlich einige der $B$ genannten Coefficienten, oder auch alle, der Nulle gleich sein können. Ferner werden sämmtliche $M$ in der Gleichung (21) auch als ganze Functionen von $x$ erscheinen aus dem Grunde, weil die ganze Beschaffenheit der Coefficienten in (21) die ähnliche Eigenschaft derer in (22) zur unmit-

telbaren Folge hat, weil also diese ganze Beschaffenheit sich von jeder Gleichung die einen Differentialquotienten von $y$ liefert, auf die nächstfolgende überträgt. Es erscheint also jeder der mit $M$ bezeichneten Coefficienten, was auch $s$ bedeuten mag, unter folgender Gestalt:

$$M = A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \ldots\ldots + A_0,$$

und es ist vor allem anderen von Wichtigkeit, dass wir uns über den numerischen Werth von $p$ die nöthige Kenntniss verschaffen. Zu diesem Zwecke fassen wir beliebige zwei einander entsprechende Coefficienten in den Gleichungen (21) und (22) ins Auge, etwa die ersten dem $y^{(n-1)}$ angehörigen, d. h.

$$M_{n-1} \text{ und } M_{n-2} + M'_{n-1} + M_{n-1} X_{n-1},$$

denn was hinsichtlich der Ableitungsweise aus einander von diesen beiden gesagt werden kann, gilt auch von den übrigen. Nun zeigt aber die unmittelbare Ansicht, dass der erste der Ordnung $p$, der zweite aber der Ordnung $p+m$ anzugehören vermag und es geht hieraus hervor, dass beim Übergange von der (21) auf die (22) die Ordnungszahl der Coefficienten sich höchstens um $m$ Einheiten steigere, also in den Werthen von:

$$y^{(n)}, \quad y^{(n+1)}, \quad y^{(n+2)}, \ \ldots\ldots \ y^{(n+s)}, \quad y^{(n+s+1)}, \ \ldots\ldots$$

beziehlich:

$$m, \quad 2m, \quad 3m, \ \ldots\ldots \ sm+m, \quad sm+2m \ \ldots$$

betrage, mithin in der (21) ein jedes $M$ als folgende Form besitzend angesehen werden kann:

$$M = A_{sm+m} x^{sm+m} + A_{sm+m-1} x^{sm+m-1} + \ldots\ldots + A_0,$$

wo wir abermals zugeben, dass gewisse Coefficienten $A$ auch der Nulle gleich sein können, dass also nur kein $M$ die Ordnungszahl $sm+m$ zu überschreiten vermag, während unter ihnen jedesmal solche sein können, die sie nicht erreichen.

Nachdem wir auf diese Weise über den Werth von $p$ Aufschluss gewonnen, denken wir uns die Differentialquotienten

$$y^{(n)}, \ y^{(n+1)}, \ \ldots \ y^{(n+s)}, \ y^{(n+s+1)}, \ \ldots$$

alle gerechnet, und in den erhaltenen Werthen von der Form, wie sie die Gleichung (21) ersichtlich macht, $\alpha$ anstatt $x$ geschrieben, sodann dieselben in die Mac-Laurin'sche Formel eingeführt, so zwar, dass in der letzteren die particulären Integrale bereits in Reihenform erscheinen, so lässt sich der Beweis: dass diese Reihen für schicklich gewählte Werthe von $x-\alpha$, in endlicher Ausdehnung der Grenzen dieser Werthe, wenigstens in den spätesten Gliedern, also für bereits sehr gross gewordene $s$, zu convergirenden gemacht werden können, auch wenn die Polynome $M$ mit $s$ ins Unendliche wachsen sollten, auf folgende Weise führen:

Verwandeln wir in sämmtlichen Polynomen $M$ nicht nur der Gleichung (21), sondern auch aller darauf folgenden und vorangehenden, also auch in der (19), mithin in den Coefficienten, die mit

dem Buchstaben $X$ bezeichnet sind, alle vorkommenden negativen Glieder in positive und diess zwar nach geschehener Substitution von $\alpha$ anstatt $x$. Suchen wir ferner von allen $M$ oder $X$ benannten Grössen diejenige heraus, die den grössten numerischen Werth hat, und das zwar in der Gleichung (21) sowohl, als auch in allen folgenden und vorangehenden einzeln. Diese so erhaltenen grössten $M$ schreiben wir in jeder Gleichung anstatt aller übrigen, und führen die auf diese Weise hervorgehenden Werthe der Differentialquotienten von $y$ in die Mac-Laurin'sche Formel ein, so gehen anstatt der früheren neue Reihen hervor, deren Glieder grösser sind als jene der früheren oder ihnen mindestens gleich. Können wir daher die ersteren zu convergirenden machen, so werden es um so mehr auch die letzteren sein.

Es sei jetzt in der Gleichung (21) $M_k$ derjenige der Coefficienten, der in dem ebenangedeuteten Sinne den grössten numerischen Werth bekömmt, so wird der ihm entsprechende, zu demselben $y^{(k)}$ gehörige Coefficient in der Gleichung (22), $M_{k-1} + M'_k + M_{n-1} X_k$ sein. Dieser gibt durch den früheren getheilt den Quotienten:

$$\frac{M_{k-1}}{M_k} + \frac{M'_k}{M_k} + \frac{M_{n-1} X_k}{M_k}. \tag{23}$$

Hievon ist das erste Glied kleiner als 1, das letzte kleiner als $X_k$, eben weil $M_k$ der grösste Coefficient in (21) ist. Es bleibt daher noch der Werth des zweiten Gliedes zu erörtern. Diess zu leisten erinnern wir uns, dass der Form nach:

$$M_k = A_{sm+m} x^{sm+m} + A_{sm+m-1} x^{sm+m-1} + \ldots + A_1 x + A_0$$

ist, mithin:

$$M'_k = (sm+m) A_{sm+m} x^{sm+m-1} + (sm+m-1) A_{sm+m-1} x^{sm+m-2} + \ldots + A_1$$

und dass, dem früheren Übereinkommen gemäss, $x$ in $\alpha$, dann aber sämmtliche Zeichen in dieselben verwandelt werden müssen. Der Quotient:

$$\frac{M'_k}{M_k} = \frac{(sm+m) A_{sm+m} \alpha^{sm+m-1} + (sm+m-1) A_{sm+m-1} \alpha^{sm+m-2} + \ldots + A_1 + 0}{A_{sm+m} \alpha^{sm+m} + A_{sm+m-1} \alpha^{sm+m-1} + \ldots + A_1 \alpha + A_0}$$

muss also als lauter positive Glieder im Zähler und Nenner enthaltend gedacht werden. Nun ist er aber offenbar ein Mittelwerth aus der folgenden Reihe von Brüchen:

$$\frac{(sm+m) A_{sm+m} \alpha^{sm+m-1}}{A_{sm+m} \alpha^{sm+m}}, \quad \frac{(sm+m-1) A_{sm+m-1} \alpha^{sm+m-2}}{A_{sm+m-1} \alpha^{sm+m-1}}, \; \ldots\ldots \; \frac{A_1}{A_1 \alpha}, \; \frac{0}{A_0}$$

oder:

$$\frac{sm+m}{\alpha}, \quad \frac{sm+m-1}{\alpha}, \; \ldots\ldots \; \frac{1}{\alpha}, \quad 0$$

weil er aus denselben entsteht durch Addition aller Zähler und aller Nenner; es ist somit:

$$\frac{M'_k}{M_k} \leqq \frac{sm+m}{\alpha}$$

eine Relation, die wenigstens insoferne richtig ist, als $\alpha$ nicht $=0$, oder unendlich klein erscheint, ein Werth, den man zu vermeiden stets berechtigt ist, weil man die Zahl $\alpha$ als eine willkürliche vollständig in der Macht hat. Das allfällige Verschwinden einiger Anfangscoefficienten in $M_k$ ändert an dieser Relation nichts und wir sehen, dass $M'_k$ gegen $M_k$ im Verhältnisse der unendlich gross werdenden Zahl $s$ gegen eine endliche wachsen könne, und es ist offenbar, dass sich dasselbe auch von dem Quotienten (23) behaupten lasse, nachdem in diesem das vorherrschende zweite Glied über die Art des Wachsthums entscheidet, dass mithin die Coefficienten von $y^{(k)}$ in den zwei aufeinanderfolgenden Gleichungen (21) und (22) zu einander stehen werden in einer Relation wie folgt:

$$M_{k-1}+M'_k+M_{n-1}X_k<\frac{sM_k}{\vartheta},$$

unter $\vartheta$ eine endliche Zahl verstanden.

Nun wird sich zwar in der Regel die Eigenschaft den grössten Werth zu haben, wenn sie einmal in einem der Coefficienten von $y^{(k)}$ vorhanden ist, in der Familie desselben forterben, gleichwohl ist es möglich, dass in der Gleichung (22) nicht der ebenbetrachtete Coefficient $M_{k-1}+M'_k+M_{n-1}X_k$ den grössten Werth erlangt, sondern ein anderer, von demselben verschiedener, etwa:

$$M_{h-1}+M'_h+M_{n-1}X_h.$$

Da aber in diesem:

$$M_{h-1}\overline{\overline{<}}M_k, \quad M_{n-1}X_h\overline{\overline{<}}M_kX_h,$$

da sich ferner auf dem betretenen Wege erweisen lässt, dass:

$$M'_h\overline{\overline{<}}\frac{sm+m}{\alpha}M_h<\frac{sm+m}{\alpha}M_k$$

sei, so folgt unmittelbar, dass der Coefficient, den wir als den grössten vorausgesetzt haben:

$$M_{h-1}+M'_h+M_{n-1}X_h<M_k\left(\frac{sm+m}{\alpha}+X_h+1\right)$$

sei; also stehen auch die grössten Coefficienten in zwei aufeinanderfolgenden Gleichungen in keinem rascheren Verhältnisse des Wachsens als dem einer endlichen und mässigen Zahl $\vartheta$ zur ins Unbegrenzte wachsenden $s$. Die Zahl $\frac{1}{\vartheta}$ wird nun zwar selbst von $s$ abhängen; da sie aber auch für noch so grosse $s$ einen endlichen Werth beibehält, so wird es offenbar entweder ein Maximum derselben oder eine Grenze geben, die sie zu überschreiten nicht vermag. Die Grenze heisse $t$, so lässt sich die Convergenz der in Rede stehenden Reihen, auf Grundlage der angestellten Betrachtungen, jetzt schon ohne alle Mühe ableiten.

Wir wissen nämlich, dass eine unendliche Reihe ohne Rücksicht auf die Zeichen ihrer Glieder convergire, wenn das $(n+s+1)^{\text{te}}$ Glied durch das nächstvorhergehende $(n+s)^{\text{te}}$ getheilt einen Quo-

tienten bietet, der bei dem unendlichen Wachsen von $s$ gegen eine Zahl convergirt, die kleiner ist als 1. Dieser Quotient, wir wollen ihn $Q$ nennen, ist aber im gegenwärtigen Falle, wie leicht einzusehen:

$$Q < \frac{st}{n+s+1}(x-\alpha)$$

und seine Grenze wird kleiner sein als 1, wenn man:

$$-\frac{1}{t} < x-\alpha < \frac{1}{t}$$

wählt. Haben wir aber diejenigen Reihen, die aus den ursprünglichen durch Vergrösserung der Glieder erzeugt worden sind, zu convergenten gemacht, so werden um so mehr die aus kleineren Gliedern zusammengesetzten ursprünglichen convergiren.

Es erübrigt nur noch die Untersuchung des letzten und allgemeinsten Falles, in welchem die Coefficienten $X_{n-1}$, $X_{n-2}$, ..... $X_0$ in der Gleichung (19) als Brüche erscheinen, die einen gemeinschaftlichen Nenner haben, wo also jedes $X$ die Gestalt trägt:

$$X = \frac{B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + B_1 x + B_0}{(x-a)^{\mathfrak{a}}(x-b)^{\mathfrak{b}} \ldots\ldots (x-l)^{\mathfrak{l}}}.$$

Es erhellet in diesem Falle wieder aus den, beim Übergange von der Gleichung (21) zur (22) angedeuteten Rechnungen, dass auch die Werthe von $M_{n-1}$, $M_{n-2}$, ..... $M_0$ dieselbe Gestalt besitzen werden, was auch $s$ bedeuten mag, etwa:

$$M = \frac{A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \ldots\ldots + A_0}{(x-a)^{\mathfrak{a}'}(x-b)^{\mathfrak{b}'} \ldots\ldots (x-l)^{\mathfrak{l}'}},$$

eine Gestalt, in der wieder vor allen anderen die numerischen Werthe der Exponenten $p$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, .... $\mathfrak{l}'$, insoferne als sie Functionen von $s$ sind, unsere Aufmerksamkeit auf sich ziehen. Setzen wir um diese zu ermitteln voraus, es sei $m$ die grösste Ordnungszahl, der die Zähler von $X_{n-1}$, $X_{n-2}$, ..... $X_0$ angehören, oder welche mindestens keiner überschreitet; es sei ferner:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \ldots\ldots + \mathfrak{l} = r \gtreqless m$$

$$\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \ldots\ldots + \mathfrak{l}' = q,$$

so erscheinen sämmtliche Coefficienten $M$ als Brüche, deren Zähler von der $p^{\text{ten}}$, die Nenner aber von der $q^{\text{ten}}$ Dimension sind, und wir gewahren, die Ableitung irgend eines der Coefficienten der Gleichung (22) etwa des

$$M_{k-1} + M'_k + M_{n-1} X_k$$

aus jenen der (21) verfolgend, dass seine drei Bestandtheile auch Brüche sind, deren Zähler beziehungsweise den folgenden Ordnungen oder Dimensionszahlen angehören:

$$p,\ p+\mu-1,\ p+m,$$

wo $\mu$ die Anzahl der Factoren $(x-a)$, $(x-b)$, .... $(x-l)$ ist; die Nenner aber sind eben so von der Ordnung:

$$q, \quad q+\mu, \quad q+r.$$

Auf einerlei Benennung gebracht bieten diese drei Brüche eine gleichfalls gebrochene Summe, deren Zähler von der Ordnung $p+m$, der Nenner aber von der Ordnung $q+r$ ist, so dass wir beim Übergange von der (21) auf die (22), im Allgemeinen, und ohne Rücksicht auf mögliche Abkürzungen, ein Steigen in den Ordnungszahlen von Zähler und Nenner der Coefficienten um $m$ und $r$ Einheiten wahrnehmen. Weil nun aber $m$ und $r$ von $s$ ganz unabhängige Zahlen sind, so erscheinen die Coefficienten in den Werthen von:

$$y^{(n)}, \; y^{(n+1)}, \; \ldots\ldots \; y^{(n+s)}, \quad y^{(n+s+1)}, \; \ldots\ldots$$

als Brüche, deren Zähler folgende Ordnungszahlen nicht überschreiten:

$$m, \quad 2m, \quad \ldots\ldots \; sm+m, \; sm+2m, \; \ldots\ldots,$$

während die Nenner den Ordnungen:

$$r, \quad 2r, \quad \ldots\ldots \; sr+r, \; sr+2r, \; \ldots\ldots$$

angehören, und mithin der Werth eines jeden $M$ so aussieht:

$$M = \frac{A_{sm+m}\, x^{sm+m} + A_{sm+m-1}\, x^{sm+m-1} + \ldots + A_1 x + A_0}{(x-a)^{sa+a}\,(x-b)^{sb+b} \ldots\ldots\ldots (x-l)^{sl+l}}.$$

Diess vorausgesetzt denken wir uns abermals sämmtliche Differentialquotienten $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, .... $y^{(n+s)}$ ... gerechnet in der Form (21), dann $\alpha$ anstatt $x$ geschrieben, ferner die Zeichen in allen Zählern sämmtlicher $M$ und $X$ in dieselben verwandelt, die Nenner aber unberührt gelassen, und in einer jeden der, irgend einen Differentialquotienten von $y$ darstellenden Gleichungen, einzeln den grössten Coefficienten herausgesucht und anstatt der übrigen geschrieben, endlich die so erhaltenen Werthe in die Mac-Laurin'sche Formel eingeführt, so werden wir offenbar Reihen auftauchen sehen, die sich von denjenigen, welche die particulären Integrale der Differentialgleichung darstellen, darin unterscheiden werden, dass sie durchaus numerisch grössere oder in speciellen Fällen mindestens gleiche Glieder haben. Dieselben Werthe nun von $x-\alpha$, welche diese fingirten Reihen zu convergirenden machen, bringen offenbar auch die anderen zur Convergenz.

Nun sei wieder in der Gleichung (21) $M_k$ derjenige Coefficient, der in dem ebenangedeuteten Sinne den grössten numerischen Werth bekömmt, so wird ihm in (22) der Coefficient $M_{k-1}+M'_k+M_{n-1}X_k$ entsprechen, welcher durch den früheren getheilt, den Quotienten:

$$\frac{M_{k-1}}{M_k} + \frac{M'_k}{M_k} + \frac{M_{n-1}\,X_k}{M_k}$$

geben wird. Der erste und letzte dieser drei Brüche ist beziehlich kleiner als 1 und als $X_k$, der mittlere aber neuerdings von der Ordnung der $s$, d. h. eine ins Unendliche wachsende Zahl, die übrigens gelegentlich auch eine endliche werden kann. In der That erhalten wir zunächst:

$$M'_k = \frac{(m+sm)A_{m+sm}x^{m+sm-1}+(m+sm-1)A_{m+sm-1}x^{m+sm-2}+\ldots+A_1}{(x-a)^{\mathfrak{a}+s\mathfrak{a}}(x-b)^{\mathfrak{b}+s\mathfrak{b}}\ldots\ldots(x-l)^{\mathfrak{l}+s\mathfrak{l}}}+$$

$$+\frac{A_{m+sm}x^{m+sm}+A_{m+sm-1}x^{m+sm-1}+\ldots+A_1x+A_0}{(x-a)^{\mathfrak{a}+s\mathfrak{a}}(x-b)^{\mathfrak{b}+s\mathfrak{b}}\ldots(x-l)^{\mathfrak{l}+s\mathfrak{l}}}\left[-\frac{\mathfrak{a}+s\mathfrak{a}}{x-a}-\frac{\mathfrak{b}+s\mathfrak{b}}{x-b}-\ldots-\frac{\mathfrak{l}+s\mathfrak{l}}{x-l}\right].$$

Wir haben jetzt zuvörderst die Brüche:

$$\frac{\mathfrak{a}+s\mathfrak{a}}{x-a},\quad \frac{\mathfrak{b}+s\mathfrak{b}}{x-b},\quad \ldots\quad \frac{\mathfrak{l}+s\mathfrak{l}}{x-l}$$

auf dieselbe Benennung zu bringen, dann, in $M_k$ sowohl als auch in $M'_k$ dem getroffenen Übereinkommen gemäss, $\alpha$ anstatt $x$ zu schreiben, und nur in den Zählern der erhaltenen Ausdrücke alle Zeichen in dieselben zu verwandeln. Denkt man sich die Verwandlung bereits durchgeführt, so zwar, dass in den folgenden Formeln unter einem jeden Buchstaben nur sein numerischer positiv genommener Werth verstanden wird, $P$ aber dasjenige andeutet, was aus dem Producte:

$$(x-a)(x-b)\ \ldots\ (x-l)$$

wird, wenn man $x$ in $\alpha$ verwandelt, ohne eine Änderung in den Zeichen vorzunehmen, und auf dieselbe Weise $U$ das Resultat der Substitution $x=\alpha$ in:

$$(x-a)^{\mathfrak{a}+s\mathfrak{a}}(x-b)^{\mathfrak{b}+s\mathfrak{b}}\ldots\ldots(x-l)^{\mathfrak{l}+s\mathfrak{l}}$$

andeutet, so erhalten wir offenbar für $M_k$ und $M'_k$ die folgenden fictiven Werthe:

$$M_k=\frac{A_{m+sm}\,\alpha^{m+sm}+A_{m+sm-1}\,\alpha^{m+sm-1}+\ldots\ldots+A_1\,\alpha+A_0}{U},$$

$$M'_k=\frac{[(m+sm)A_{m+sm}\alpha^{m+sm-1}+(m+sm-1)A_{m+sm-1}\alpha^{m+sm-2}+\ldots+A_1](\alpha+a)(\alpha+b)\ldots(\alpha+l)}{UP}+$$

$$+\frac{A_{m+sm}\alpha^{m+sm}+A_{m+sm-1}\alpha^{m+sm-1}+\ldots+A_0}{UP}\left[(\mathfrak{a}+s\mathfrak{a})(\alpha+b)\ldots(\alpha+l)+(\mathfrak{b}+s\mathfrak{b})(\alpha+a)\ldots(\alpha+l)+\ldots\right].$$

Ihr Quotient ist:

$$\frac{M'_k}{M_k}=\frac{(m+sm)\,A_{m+sm}\alpha^{m+sm-1}+(m+sm-1)\,A_{m+sm-1}\alpha^{m+sm-2}+\ldots+A_1}{A_{m+sm}\,\alpha^{m+sm}+A_{m+sm-1}\,\alpha^{m+sm-1}+\ldots+A_1\alpha+A_0}\cdot\frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\ldots\ldots(\alpha+l)}{P}+$$

$$+\frac{(\mathfrak{a}+s\mathfrak{a})\ (\alpha+b)\ \ldots\ldots\ (\alpha+l)\ +\ (\mathfrak{b}+s\mathfrak{b})\ (\alpha+a)\ \ldots\ldots\ (\alpha+l)\ +\ \ldots\ldots\ldots}{P}.$$

Wir haben aber früher bereits gezeigt, dass der Bruch:

$$\frac{(m+sm)\,A_{m+sm}\,\alpha^{m+sm-1}+(m+sm-1)\,A_{m+sm-1}\,\alpha^{m+sm-2}+\ldots+A_1}{A_{m+sm}\,\alpha^{m+sm}+A_{m+sm-1}\,\alpha^{m+sm-1}+\ldots+A_1\,\alpha+A^0}<\frac{m+sm}{\alpha}$$

sei. Dies vorausgesetzt, lehrt die unmittelbare Ansicht des ebenentwickelten Quotienten, dass sich jedesmal eine endliche Zahl $\vartheta$ werde denken lassen, so zwar, dass

$$\frac{M'_k}{M_k} < \vartheta s$$

wird, wenigstens so lange $P$ von der Nulle verschieden ist. Wir kommen daher auch hier wieder zu dem Schlusse, dass $M'_k$ gegen $M_k$ nicht rascher als im Verhältniss einer endlichen Zahl zur unbegrenzten $s$ zu wachsen vermöge, und folgern hieraus auf dieselbe Art wie früher, dass es eine gleiche Bewandtniss auch mit den grössten Werthen der Coefficienten $M$ in zweien aufeinanderfolgenden Gleichungen habe, woraus wir denn wieder auf die Convergenz der Reihen den giltigen Schluss auf dieselbe Weise zu machen berechtiget sind.

Es hat keine Schwierigkeit denselben Beweis auch anderen als algebraischen Coefficientenformen anzupassen, z. B. exponentiellen oder trigonometrischen, wir betrachten ihn daher hier als im Wesentlichen allgemein durchgeführt. Seine Giltigkeit ist zwar an die Bedingung geknüpft, dass $P$ nicht verschwinde für $x=\alpha$, eine Bedingung, die man stets wird erfüllen können, da $\alpha$ willkürlich ist. Aus dem Nichtstattfinden dieser Bedingung jedoch für irgend ein bestimmtes $\alpha$ folgt noch keineswegs, dass eine Entwicklung der particulären Integrale in convergirende Reihen nach Potenzen von $x-\alpha$ unmöglich sei, sondern nur, dass in Einem derselben oder in allen auch Potenzen mit anderen als ganzen positiven Exponenten vorkommen. Die Fälle, wo die in Rede stehenden Coefficienten eine Unterbrechung der Stetigkeit für irgend einen Werth von $x$ erleiden, sind zwar hier nicht wesentlich, werden aber doch wegen ihrer grossen Wichtigkeit später ausführlich zur Sprache kommen.

Die Willkürlichkeit der Constanten $C_1$, $C_2$, ..... $C_n$ in (18) bringt es mit sich, dass auch einige von ihnen oder alle der Nulle gleich gesetzt werden können; lässt man sie alle verschwinden, so ist:

$$y = R \tag{24}$$

eine besondere Auflösung der completen Differentialgleichung ohne Constante. Wird $F(x)$ der Nulle gleichgesetzt, so verschwindet auch $R$ aus dem einfachen Grunde, weil das Verschwinden von $N$ in der Gleichung (21) auch das Verschwinden von $N' + M_{n-1} F(x)$ in der Gleichung (22) nach sich zieht, wir also nirgends in den Differentialquotienten von $y$ Glieder gewahren, die reine Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x$ sind. Es ist also:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots + C_n y_n \tag{25}$$

das Integral der reduzirten Differentialgleichung, in welchem man, wie schon gesagt, auch einige der Constanten verschwinden lassen kann; hieraus folgt, dass jeder der Ausdrücke:

$$C_1 y_1,\; C_2 y_2,\; \ldots\ldots\; C_n y_n,$$

für sich die Eigenschaft hat, die Differentialgleichung zu erfüllen. Diese Ausdrücke, da sie aus dem allgemeinen Integrale durch Specialisirung der Constanten entstehen, sind particuläre Integrale, und

wir kommen demgemäss zu folgendem Schlusse: das allgemeine Integral einer reduzirten Differentialgleichung kann zusammengesetzt gedacht werden aus $n$ particulären Integralen, deren jedes Eine willkürliche Constante als Factor enthält; das allgemeine Integral aber der completen besteht aus dem allgemeinen Integrale der reduzirten und einer besonderen Auflösung der letzteren. Umgekehrt: ist es uns auf irgend einem Wege gelungen mehrere, von einander verschiedene Ausdrücke aufzufinden, etwa:

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots\ldots\ldots \quad y_n, \tag{26}$$

deren jeder, anstatt $y$ gesetzt, die reduzirte Gleichung identisch macht, so sind nicht nur auch:

$$C_1 y_1, \; C_2 y_2, \; C_3 y_3, \ldots\ldots\ldots \; C_n y_n$$

genügende Werthe, sondern es wird auch ihre Summe die Differentialgleichung erfüllen, und wegen des Vorhandenseins von $n$ willkürlichen Constanten als allgemeines Integral gelten können. Um diess zu beweisen braucht man nur die particulären Integrale (26) in die reduzirte Differentialgleichung einzeln zu substituiren; diess gibt $n$ identische Gleichungen, die man der Reihe nach mit $C_1$, $C_2$, .... $C_n$ multiplizirt und addirt, um zu erhalten:

$$\begin{aligned} X_n \left[C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots\ldots + C_n y_n^{(n)}\right] + X_{n-1}\left[C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}\right] + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + X_0 \left[C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n\right] = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist aber offenbar das Resultat der Substitution der Summe:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots\ldots + C_n y_n$$

in die vorgelegte Differentialgleichung; es wird daher diese durch jene Summe identisch erfüllt.

Diese analytischen Wahrheiten begründen, auf das Feld der Mechanik bezogen, ein Naturgesetz: das der Coëxistenz der kleinsten Schwingungen; handelt es sich nämlich um die Gesetze solcher Bewegungen von sehr kleinen Amplituden, so müssen wir bei dem in Rechnungsetzen der sie veranlassenden Kräfte schon aus dem Grunde nothwendigerweise zu Differentialgleichungen gelangen, weil der zweite Differentialquotient des zurückgelegten Raumes nach der Zeit genommen, der Ausdruck der Kraft ist, die die wirkliche Bewegung erzeugen kann. Der Umstand ferner, dass dieser Raum stets ein sehr kleiner ist, veranlasst uns in der ersten Annäherung die Glieder der höheren Ordnung nach eben demselben und seiner Differentialquotienten zu vernachlässigen; diess führt nothwendigerweise zur linearen Form. Es sind also alle Gesetze kleiner Schwingungen in den linearen Differentialgleichungen enthalten, und ein jedes particuläre Integral deutet auf diesem Felde irgend eine mögliche Schwingungsweise eines materiellen Punctes oder eines Systemes von solchen an; die speciellen Gesetze aber dieser Bewegungen gehen aus dem speciellen Baue der ihnen entsprechenden particulären Integrale hervor.

Wir haben aber eben gesehen, dass wenn $y = y_1$ ein Integral der Differentialgleichung ist, auch $y = C_1 y_1$ ein solches sei; es kann jedoch die Constante $C_1$ offenbar nichts ánderes als die Schwingungsamplitude bestimmen; wir gewinnen hiermit einen Satz: dass die Gesetze kleiner Schwingungen von den Amplituden unabhängig seien.

Wir haben ferner gesehen, dass, wenn mehrere particuläre Integrale der Gleichung Genüge leisten, auch die Summe dieser, mit willkürlichen Constanten multiplizirten Integrale ein genügender Werth sei; hieraus folgt, dass, wenn irgend ein materielles System mehre einzeln mögliche Schwingungsweisen besitzt, sie auch alle zusammen im Systeme Statt finden, sich so zu sagen über einander legen können ohne gegenseitige Beirrung. Hierin besteht aber eigentlich das Prinzip der Coexistenz der kleinsten Schwingungen, welchem in der Lehre vom Lichte die Phänomene der Interferenz und Beugung ihre Erklärung verdanken. Dieses Gesetz hängt also mit den Kräften, welche die Bewegung veranlassen noch gar nicht zusammen, ist somit in diesem Sinne ein analytisches und kein mechanisches; unsere mathematische Physik hat sich also gar nichts auf die Explication solcher Phänomene zu Gute zu thuen, denn sie beweisen in Bezug auf die Haltbarkeit der Grundannahmen gar nichts, und gehen lediglich aus der vorausgesetzten Kleinheit der Amplituden hervor, würden also Statt finden in jeder beliebigen, nach was immer für Gesetzen construirten Welt, in der es kleine Schwingungen gibt.

## §. 4.

## Bildung der Differentialgleichung aus den particulären Integralen.

Die Theorie der linearen Differentialgleichungen steht mit jener der algebraischen Gleichungen in der innigsten Verwandtschaft; gleichwie nämlich eine jede algebraische Gleichung des $n^{\text{ten}}$ Grades $n$ Wurzeln zulässt, so verstattet auch eine lineare Differentialgleichung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen $n$ particuläre Integrale, die man allenfalls ihre Wurzeln nennen könnte, und deren Summe das allgemeine Integral gibt. Wir wollen hier noch mehre andere Ähnlichkeiten dieser zwei Abtheilungen der Analysis hervorheben; namentlich soll gezeigt werden, dass die Coefficienten in der Differentialgleichung Functionen der particulären Integrale seien, so wie die Coefficienten in einer algebraischen Gleichung Functionen der Wurzeln sind, nur mit dem Unterschiede, dass letztere symmetrisch sind, erstere aber angehörig derjenigen merkwürdigen Klasse von Functionen, die die Aufmerksamkeit der Analysten vielfältig in Anspruch genommen haben, und bei allen möglichen Vertauschungen der in sie eingehenden Elemente zwei Werthe annehmen. Eine fernere Verschiedenheit ist noch die, dass algebraische Gleichungen gleiche Wurzeln zulassen, lineare Differentialgleichungen dagegen nie solche besitzen können. Fangen wir also damit an, den Bau der Coefficienten einer reduzirten Differentialgleichung aus ihren particulären Integralen abzuleiten.

Differenziren wir zu diesem Zwecke die Gleichung (25) des vorigen Paragraphen $n$mal nach $x$, so erhalten wir, mit Berücksichtigung der (25) selbst, ein System von folgenden $(n+1)$ Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
-y \;+ C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots + C_n y_n &= 0 \\
-y' \;+ C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots\ldots + C_n y'_n &= 0 \\
-y'' \;+ C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \ldots\ldots + C_n y''_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
-y^{(n)} + C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots\ldots + C_n y_n^{(n)} &= 0.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Sehen wir diese Gleichungen als Bestimmungsgleichungen an, und die Grössen:

$$-1,\quad C_1,\quad C_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ C_n$$

als diejenigen, deren Werthe aus den Auflösungen derselben hervorzugehen haben, so liegt uns ein gewöhnliches Eliminationsproblem vor, und wir erhalten namentlich für die erste dieser Grössen, d. h. für die negative Einheit, einen Ausdruck von der Form:

$$-1 = \frac{L}{M};$$

weil aber die zweiten Theile sämmtlicher Gleichungen (28) gleich Null sind, so ist auch $L=0$, und somit auch:

$$M = 0. \tag{29}$$

Nun ist aber $M$ ein Ausdruck, welcher einerseits die durch Elimination weggefallenen $C_1$, $C_2$, .... $C_n$ nicht mehr enthält, andererseits aber offenbar durch die aus den (28) gezogenen Werthe von:

$$y,\quad y',\quad y'',\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ y^{(n)}$$

erfüllt wird, was auch die $C_1$, $C_2$, ...... bedeuten mögen; folglich ist die Differentialgleichung (29) gerade diejenige, welche die particulären Integrale $y_1$, $y_2$, ....... $y_n$, und den Ausdruck:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots + C_n y_n$$

zum allgemeinen Integrale hat.

Die allgemein bekannte Eliminationstheorie lehrt uns nun, dass $M$ der gemeinschaftliche Nenner aller Brüche sei, welche die Werthe der aus den (28) zu ziehenden Grössen darstellen, und dass dieser durch ein von Kramer herrührendes combinatorisches Verfahren gebildet werde, hinsichtlich dessen man einen kleinen Aufsatz über die Theorie des Grössten und Kleinsten in den Abhandlungen der Freunde der Naturwissenschaften, gesammelt und durch Subscription herausgegeben von W. Haidinger, 2. Band einsehen kann. Die Bildungsweise ist kürzlich folgende: Man setze, der leichteren Übersicht wegen:

$$\begin{array}{llll}
y\ = (0,0), & y' = (1,0), & y'' = (2,0), & \ldots\ldots\ y^{(n)} = (n,0) \\
y_1 = (0,1), & y'_1 = (1,1), & y''_1 = (2,1), & \ldots\ldots\ y_1^{(n)} = (n,1) \\
y_2 = (0,2), & y'_2 = (1,2), & y''_2 = (2,2), & \ldots\ldots\ y_2^{(n)} = (n,2) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
y_n = (0,n), & y'_n = (1,n), & y''_n = (2,n), & \ldots\ldots\ y_n^{(n)} = (n,n)
\end{array} \tag{30}$$

so dass also die erste der beiden Zahlen, die zur Bezeichnung der $y$ benannten Grössen hier gebraucht werden, immer die Anzahl der Striche, die zweite aber den Stellenzeiger gibt, und die Gleichungen (28) unter folgender Gestalt erscheinen:

$$\begin{aligned}
-(0,0) + (0,1)\,C_1 + (0,2)\,C_2 + \ldots\ldots + (0,n)\,C_n &= [0] \\
-(1,0) + (1,1)\,C_1 + (1,2)\,C_2 + \ldots\ldots + (1,n)\,C_n &= [1] \\
-(2,0) + (2,1)\,C_1 + (2,2)\,C_2 + \ldots\ldots + (2,n)\,C_n &= [2] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-(n,0) + (n,1)\,C_1 + (n,2)\,C_2 + \ldots\ldots + (n,n)\,C_n &= [n];
\end{aligned} \tag{31}$$

sodann bilde man aus den $(n+1)$ Zahlen als combinatorischen Elementen, nämlich:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n,$$

alle möglichen Permutationen, so zwar, dass aus einer Gruppe immer die nächst höhere gebildet wird, unter einer höheren Gruppe diejenige verstanden, die an einer früheren Stelle ein höheres Element trägt, oder mit anderen Worten: welche als Zahl im Decimalsysteme gedacht den höheren numerischen Werth ausweiset. Zu den auf diese Weise vertauschten Elementen setzt man dann in einer jeden Gruppe die begleitenden Zahlen 0, 1, 2, ...... $n$ zu, dermassen, dass stets das erste Element den Begleiter 0, das zweite den Begleiter 1 u. s. w., endlich das letzte den Begleiter $n$ bekomme, und schliesst das Element mit dem Begleiter in Klammern ein. Man erhält hiedurch Producte aus Coefficienten der Gleichungen (31), von denen die Hälfte mit dem Zeichen $+$, die andere Hälfte mit dem Zeichen $-$ versehen werden muss, damit hieraus $M$ hervorgehe. Man wird sich dieses Verfahren durch ein Paar Beispiele am leichtesten klar machen. Suchen wir zunächst die Differentialgleichung der zweiten Ordnung, welche die particulären Integrale $y_1$ und $y_2$ besitzt. Für diese gehen die Gleichungen (31) über in:

$$\begin{aligned}
-(0,0) + (0,1)\,C_1 + (0,2)\,C_2 &= [0] \\
-(1,0) + (1,1)\,C_1 + (1,2)\,C_2 &= [1] \\
-(2,0) + (2,1)\,C_1 + (2,2)\,C_2 &= [2].
\end{aligned} \tag{32}$$

Die Elemente 0, 1, 2 geben folgende Permutationen:

$$012,\quad 021,\quad 102,\quad 120,\quad 201,\quad 210.$$

Jetzt setzt man zu jedem ersten Elemente den Begleiter 0, zum zweiten 1, zum dritten 2, schliesst in Klammern ein, nimmt die erste Gruppe positiv, die zwei darauf folgenden negativ, das darauf folgende Paar wieder positiv und so fort, paarweise in den Zeichen abwechseind, und erhält so:

$$M = (0,0)\,[(1,1)(2,2) - (2,1)(1,2)] - (1,0)\,[(0,1)(2,2) - (2,1)(0,2)] + (2,0)\,[(0,1)(1,2) - (1,1)(0,2)],$$

oder, wenn man die ursprünglichen Bezeichnungen wieder zurücksetzt:

$$M = y[y'_1 y''_2 - y''_1 y'_2] - y'[y_1 y''_2 - y''_1 y_2] + y''[y_1 y'_2 - y'_1 y_2] = 0. \tag{33}$$

Bilden wir jetzt als zweites Beispiel die Differentialgleichung der dritten Ordnung, die di particulären Integrale $y_1$, $y_2$, $y_3$ besitzt, so gehen die Gleichungen (31) in folgende über:

$$\begin{array}{l} -(0,0) + (0,1)\ C_1 + (0,2)\ C_2 + (0,3)\ C_3 = [0] \\ -(1,0) + (1,1)\ C_1 + (1,2)\ C_2 + (1,3)\ C_3 = [1] \\ -(2,0) + (2,1)\ C_1 + (2,2)\ C_2 + (2,3)\ C_3 = [2] \\ -(3,0) + (3,1)\ C_1 + (3,2)\ C_2 + (3,3)\ C_3 = [3]. \end{array} \tag{34}$$

Die Elemente 0, 1, 2, 3 geben nun folgende Permutationen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 1 2 3 | 1 0 2 3 | 2 0 1 3 | 3 0 1 2 |
| 0 1 3 2 | 1 0 3 2 | 2 0 3 1 | 3 0 2 1 |
| 0 2 1 3 | 1 2 0 3 | 2 1 0 3 | 3 1 0 2 |
| 0 2 3 1 | 1 2 3 0 | 2 1 3 0 | 3 1 2 0 |
| 0 3 1 2 | 1 3 0 2 | 2 3 0 1 | 3 2 0 1 |
| 0 3 2 1 | 1 3 2 0 | 2 3 1 0 | 3 2 1 0 |

und aus diesen geht auf dieselbe Weise wie früher der Werth von $M$ hervor, nämlich:

$$M = (0,0)\left\{\begin{array}{l} +(1,1)\ (2,2)\ (3,3) \\ -(1,1)\ (3,2)\ (2,3) \\ -(2,1)\ (1,2)\ (3,3) \\ +(2,1)\ (3,2)\ (1,3) \\ +(3,1)\ (1,2)\ (2,3) \\ -(3,1)\ (2,2)\ (1,3) \end{array}\right. + (1,0)\left\{\begin{array}{l} -(0,1)\ (2,2)\ (3,3) \\ +(0,1)\ (3,2)\ (2,3) \\ +(2,1)\ (0,2)\ (3,3) \\ -(2,1)\ (3,2)\ (0,3) \\ -(3,1)\ (0,2)\ (2,3) \\ +(3,1)\ (2,2)\ (0,3) \end{array}\right. +$$

$$+ (2,0)\left\{\begin{array}{l} +(0,1)\ (1,2)\ (3,3) \\ -(0,1)\ (3,2)\ (1,3) \\ -(1,1)\ (0,2)\ (3,3) \\ +(1,1)\ (3,2)\ (0,3) \\ +(3,1)\ (0,2)\ (1,3) \\ -(3,1)\ (1,2)\ (0,3) \end{array}\right. + (3,0)\left\{\begin{array}{l} -(0,1)\ (1,2)\ (2,3) \\ +(0,1)\ (2,2)\ (1,3) \\ +(1,1)\ (0,2)\ (2,3) \\ -(1,1)\ (2,2)\ (0,3) \\ -(2,1)\ (0,2)\ (1,3) \\ +(2,1)\ (1,2)\ (0,3) \end{array}\right. = 0$$

oder wenn man wieder die ursprünglichen Werthe einführt:

$$M = \quad y \left\{ \begin{array}{llll} + & y'_1 & y''_2 & y'''_3 \\ - & y'_1 & y'''_2 & y''_3 \\ - & y''_1 & y'_2 & y'''_3 \\ + & y''_1 & y'''_2 & y'_3 \\ + & y'''_1 & y'_2 & y''_3 \\ - & y'''_1 & y''_2 & y'_3 \end{array} \right. \quad + y' \left\{ \begin{array}{llll} - & y_1 & y''_2 & y'''_3 \\ + & y_1 & y'''_2 & y''_3 \\ + & y''_1 & y_2 & y'''_3 \\ - & y''_1 & y'''_2 & y_3 \\ - & y'''_1 & y_2 & y''_3 \\ + & y'''_1 & y''_2 & y_3 \end{array} \right. +$$

$$+ y'' \left\{ \begin{array}{llll} + & y_1 & y'_2 & y'''_3 \\ - & y_1 & y'''_2 & y'_3 \\ - & y'_1 & y_2 & y'''_3 \\ + & y'_1 & y'''_2 & y_3 \\ + & y'''_1 & y_2 & y'_3 \\ - & y'''_1 & y'_2 & y_3 \end{array} \right. \quad + y''' \left\{ \begin{array}{llll} - & y_1 & y'_2 & y''_3 \\ + & y_1 & y''_2 & y'_3 \\ + & y'_1 & y_2 & y''_3 \\ - & y'_1 & y''_2 & y_3 \\ - & y''_1 & y_2 & y'_3 \\ + & y''_1 & y'_2 & y_3 \end{array} \right. = 0 \qquad (35).$$

Die Beobachtung der in diesen zwei Beispielen vorkommenden Formeln lehrt uns, dass es eben so leicht sei eine lineare Differentialgleichung zu bilden, die gegebene particuläre Integrale hat, wie es nicht schwer ist eine algebraische Gleichung aufzustellen, die gegebene Wurzeln besitzt. Die Coefficienten in einer so erhaltenen Differentialgleichung sind Functionen der particulären Integrale, und zwar zweiwerthige, was aus den Formen (33) und (35) für Gleichungen der zweiten und dritten Ordnung unmittelbar erhellet, und demnächst ganz allgemein nachgewiesen werden soll. Sollte es scheinen, dass das combinatorische Verfahren bei Gleichungen von höheren Ordnungen ein etwas zu umständliches wäre, so bedenke man, dass sich dasselbe noch in etwas vereinfachen lasse dadurch, dass man nur Einen Coefficienten etwa den von (0,0) bildet, was das Permutiren der $n$ Elemente $1, 2, 3, \ldots\ldots n$ erheischt, und die übrigen Coefficienten aus dem gebildeten Einen durch die sehr einfache Verwechslung einer Zahl mit einer anderen ableitet. Es geht nämlich der Coefficient von (1,0) aus jenem von (0,0) hervor, wenn in dem letzteren das Element 1 überall, wo es als Element und nicht als Begleiter erscheint, verwandelt wird in 0, wobei zugleich alle Zeichen in die entgegengesetzten verändert werden; eben so erhält man den Coefficienten von (2,0) aus jenem von (1,0) durch Verwandlung des Elementes 2 in 1 und Änderung der Zeichen; den Coefficienten von (3,0) aus jenem von (2,0) durch Verwandlung des Elementes 3 in 2 und Änderung der Zeichen u. s. f. Hätte man daher eine Gleichung der vierten Ordnung zu bilden, welche die particulären Integrale $y_1, y_2, y_3, y_4$ besitzt, so könnte man damit anfangen nur die Elemente $1, 2, 3, 4$ zu permutiren; diess liefert die 24 Gruppen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 2 3 4 | 2 1 3 4 | 3 1 2 4 | 4 1 2 3 |
| 1 2 4 3 | 2 1 4 3 | 3 1 4 2 | 4 1 3 2 |
| 1 3 2 4 | 2 3 1 4 | 3 2 1 4 | 4 2 1 3 |
| 1 3 4 2 | 2 3 4 1 | 3 2 4 1 | 4 2 3 1 |
| 1 4 2 3 | 2 4 1 3 | 3 4 1 2 | 4 3 1 2 |
| 1 4 3 2 | 2 4 3 1 | 3 4 2 1 | 4 3 2 1 |

Aus diesen kann man sodann auf die eben auseinandergesetzte Art den Coefficienten von (0,0), d. h. von $y$ ableiten, der zunächst in der Form:

$$
\begin{array}{llll}
+ (1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4) & & & - (2,1)\ (1,2)\ (3,3)\ (4,4) \\
- (1,1)\ (2,2)\ (4,3)\ (3,4) & & & + (2,1)\ (1,2)\ (4,3)\ (3,4) \\
- (1,1)\ (3,2)\ (2,3)\ (4,4) & & & + (2,1)\ (3,2)\ (1,3)\ (4,4) \\
+ (1,1)\ (3,2)\ (4,3)\ (2,4) & & & - (2,1)\ (3,2)\ (4,3)\ (1,4) \\
+ (1,1)\ (4,2)\ (2,3)\ (3,4) & & & - (2,1)\ (4,2)\ (1,3)\ (3,4) \\
- (1,1)\ (4,2)\ (3,3)\ (2,4) & & & + (2,1)\ (4,2)\ (3,3)\ (1,4) \\
\\
+ (3,1)\ (1,2)\ (2,3)\ (4,4) & & & - (4,1)\ (1,2)\ (2,3)\ (3,4) \\
- (3,1)\ (1,2)\ (4,3)\ (2,4) & & & + (4,1)\ (1,2)\ (3,3)\ (2,4) \\
- (3,1)\ (2,2)\ (1,3)\ (4,4) & & & + (4,1)\ (2,2)\ (1,3)\ (3,4) \\
+ (3,1)\ (2,2)\ (4,3)\ (1,4) & & & - (4,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (1,4) \\
+ (3,1)\ (4,2)\ (1,3)\ (2,4) & & & - (4,1)\ (3,2)\ (1,3)\ (2,4) \\
- (3,1)\ (4,2)\ (2,3)\ (1,4) & & & + (4,1)\ (3,2)\ (2,3)\ (1,4)
\end{array}
$$

erscheinen, dann aber, durch Wiedereinführung der ursprünglichen Bezeichnungen, sich verwandeln wird in:

$$
\begin{array}{llll}
+ y'_1\ y''_2\ y'''_3\ y^{IV}_4 & & & - y''_1\ y'_2\ y'''_3\ y^{IV}_4 \\
- y'_1\ y''_2\ y^{IV}_3\ y'''_4 & & & + y''_1\ y'_2\ y^{IV}_3\ y'''_4 \\
- y'_1\ y'''_2\ y''_3\ y^{IV}_4 & & & + y''_1\ y'''_2\ y'_3\ y^{IV}_4 \\
+ y'_1\ y'''_2\ y^{IV}_3\ y''_4 & & & - y''_1\ y'''_2\ y^{IV}_3\ y'_4 \\
+ y'_1\ y^{IV}_2\ y''_3\ y'''_4 & & & - y''_1\ y^{IV}_2\ y'_3\ y'''_4 \\
- y'_1\ y^{IV}_2\ y'''_3\ y''_4 & & & + y''_1\ y^{IV}_2\ y'''_3\ y'_4 \\
\\
+ y'''_1\ y'_2\ y''_3\ y^{IV}_4 & & & - y^{IV}_1\ y'_2\ y''_3\ y'''_4 \\
- y'''_1\ y'_2\ y^{IV}_3\ y''_4 & & & + y^{IV}_1\ y'_2\ y'''_3\ y''_4 \\
- y'''_1\ y''_2\ y'_3\ y^{IV}_4 & & & + y^{IV}_1\ y''_2\ y'_3\ y'''_4 \\
+ y'''_1\ y''_2\ y^{IV}_3\ y'_4 & & & - y^{IV}_1\ y''_2\ y'''_3\ y'_4 \\
+ y'''_1\ y^{IV}_2\ y'_3\ y''_4 & & & - y^{IV}_1\ y'''_2\ y'_3\ y''_4 \\
- y'''_1\ y^{IV}_2\ y''_3\ y'_4 & & & + y^{IV}_1\ y'''_2\ y''_3\ y'_4
\end{array}
\tag{36}
$$

Aus diesen Coefficienten von $y$ geht dann mit Leichtigkeit jener von $y'$ hervor, durch Verwandlung sämmtlicher erster Differentialquotienten in 0te und Änderung der Zeichen, ferner der Coefficient von

$y''$ aus jenem von $y'$ durch Verwandlung sämmtlicher zweiter Differentialquotienten in erste und Änderung der Zeichen u. s. w. Die Stellenzeiger werden bei diesem Verfahren nicht berührt und bleiben dieselben. Bei Differentialgleichungen von höheren Ordnungen erleidet die regelmässige Aufeinanderfolge der Zeichenpaare eine Unterbrechung, hinsichtlich welcher die obenerwähnte kleine Schrift nachgesehen werden kann.

Der Anblick des Polynoms (36) lehrt abermals, dass es eine zweiwerthige Function der particulären Integrale $y_1$, $y_2$ $y_3$ und $y_4$ sei, die bei beliebigen Vertauschungen derselben nur höchstens das Zeichen zu ändern vermag. Es gilt diess für Gleichungen von beliebig hohen Ordnungen und ist eine allgemeine Eigenschaft des gemeinschaftlichen Nenners, der oben mit $M$ bezeichnet worden ist. Seiner Bildungsweise zufolge ist nämlich $M$ für eine Differentialgleichung von der $n^{ten}$ Ordnung ein Polynom, dessen Glieder Producte sind aus $(n+1)$ Factoren, die paarweise zusammengestellt werden können, so zwar, dass je zwei zu Einem Paare gehörige Glieder $(n-1)$ Factoren gemeinschaftlich besitzen, und sich nur in zweien unterscheiden. Diese beiden Factoren haben aber nach der eingeführten Schreibweise in dem Einen Gliede die Gestalt:

$$\ldots\ldots\ (\alpha,h)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta,k)\ \ldots\ldots$$

in dem anderen aber:

$$\ldots\ldots\ (\beta,h)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha,k)\ \ldots\ldots$$

und sind bezüglich der $h^{ten}$ und $k^{ten}$ Verticalreihe der Coefficienten in den Gleichungen (31) entnommen. Von diesen beiden Gliedern lässt sich leicht erweisen, dass sie entgegengesetzte Zeichen tragen. Diess vorausgesetzt, vertausche man die zwei particulären Integrale $y_h$ und $y_k$ untereinander, so zieht diess einerseits eine Vertauschung zweier Verticalreihen der Coefficienten in den Gleichungen (31), der $h^{ten}$ und $k^{ten}$ nämlich, nach sich; anderseits eine gegenseitige Verwandlung der zwei oberwähnten Glieder: des ersten in das zweite und des zweiten in das erste, und in Folge dessen eine allgemeine Zeichenänderung im Polynome $M$. Dieses erscheint daher als eine Function, die nur zweier Werthe fähig ist $+M$ nämlich und $-M$. Es ist aber in der That auch klar, dass die Differentialgleichung $M=0$ dadurch, dass man ihre particulären Integrale nur in eine andere Ordnung bringt, keine wesentliche Änderung erfahren kann und sohin entweder die $M=0$ bleiben, oder in die gleichgeltende $-M=0$ übergehen wird. Was hier von dem ganzen Gleichungspolynome bewiesen worden, gilt offenbar auch von den einzelnen Coefficienten als Functionen von genau derselben Art wie $M$, d. h. es sind auch diese, bei allen möglichen Vertauschungen der darin vorkommenden particulären Integrale, nur zweier Werthe fähige Functionen, irgend Eines nämlich und des dem Zeichen nach entgegengesetzten. Es geht hieraus hervor, dass der Character der Zweiwerthigkeit der Coefficienten bei einer Differentialgleichung auch verloren gehen kann; diess geschieht z. B. dann, wenn die ganze Gleichung durch irgend einen der Coefficienten wegdividirt wird, wodurch offenbar symmetrische Formen erzeugt werden.

Aus den angestellten Betrachtungen ziehen wir unmittelbar die nicht unwichtige Folgerung, dass die linearen Differentialgleichungen keine gleichen particulären Inte-

grale zulassen, unähnlich den algebraischen Gleichungen, die, wie man weiss, gleiche Wurzeln haben können. Denn die Voraussetzung:

$$y_h = y_k$$

macht je zwei Glieder in $M$ von der Art der oberwähnten numerisch gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt, reduzirt also das Gleichungspolynom $M$ identisch auf Null, so dass $X_n$, $X_{n-1}$, ... $X_0$, d. h. jeder Coefficient der vorgelegten Gleichung für sich verschwindet.

## §. 5.

## Methode der Variation der Constanten.

Wenn es gelungen ist von einer linearen Differentialgleichung Ein oder mehre particuläre Integrale zu entdecken, zu denen oft eine glückliche Vermuthung, meistentheils aber die unmittelbare Ansicht der Differentialgleichung führt, in deren Coefficienten, wie wir später an seinem Orte sehen werden, die entsprechenden particulären Integrale abgebildet sind, so tragen wir Sorge selbe von diesen bereits ermittelten genügenden Werthen zu befreien, und so in der Ordnungszahl herabzusetzen, wie man es macht mit einer algebraischen Gleichung, von der Wurzeln bekannt sind. Wenn uns z. B. die höhere Gleichung:

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + X_2 y'' + X_1 y' = 0 \tag{37}$$

zur Integration vorliegt, so sehen wir ohne Mühe, dass $y = C$ ein particuläres Integral sei, und bewirken durch Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen mittelst der Substitution:

$$y' = z$$

eine Reduction auf:

$$X_n z^{(n-1)} + X_{n-1} z^{(n-2)} + \dots\dots\dots + X_2 z' + X_1 z = 0 \tag{38}$$

und sohin ein Herabgehen um die Einheit in der Ordnungszahl.

Die Ergebnisse der vorhergehenden Paragraphe setzen uns in den Stand, direct zu einer allgemeinen Methode diess zu leisten zu gelangen. Es ist diess die längst bekannte Methode der Variation der Constanten, von der wir schon bei der Integration der completen Gleichung der ersten Ordnung Gebrauch gemacht haben und deren vollständige Auseinandersetzung, der grossen ihr zukommenden Wichtigkeit wegen, hier nicht fehlen darf. Fangen wir an bei dem einfachsten Falle, und setzen wir voraus, es sei von der Differentialgleichung:

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + X_1 y' + X_0 y = 0, \tag{39}$$

deren allgemeines Integral, wie wir wissen, in die Form fällt:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots\dots + C_n y_n \tag{40}$$

Ein particuläres Integral $C_1 y_1$ uns kundgeworden, so wird die Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen durch die Substitution:

$$y = y_1 z$$

offenbar zu einer neuen Gleichung in $z$ führen müssen, die das allgemeine Integral:

$$z = C_1 + C_2 \frac{y_2}{y_1} + C_3 \frac{y_3}{y_1} + \ldots\ldots + C_n \frac{y_n}{y_1}, \tag{41}$$

und somit unter ihren particulären Integralen eine Constante enthält, also von der Form (37) ist und durch eine neue Substitution

$$z' = u$$

um die Einheit in der Ordnungszahl heruntergebracht werden kann. Die beiden Substitutionen in Eine zusammengezogen geben:

$$y = y_1 \int u\, dx. \tag{42}$$

Wir erhalten dann zum Behufe der Substituirung in die vorgelegte Gleichung:

$$\begin{aligned}
y &= y_1 \cdot \int udx \\
y' &= y_1' \cdot \int udx + y_1 \cdot u \\
y'' &= y_1'' \cdot \int udx + 2 \cdot y_1' \cdot u + y_1 \cdot u' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n-1)} &= y_1^{(n-1)} \int udx + \binom{n-1}{1} y_1^{(n-2)} u + \binom{n-1}{2} y_1^{(n-3)} u' + \ldots\ldots + y_1 u^{(n-2)} \\
y^{(n)} &= y_1^{(n)} \int udx + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)} u + \binom{n}{2} y_1^{(n-2)} u' + \ldots\ldots + \binom{n}{1} y_1' u^{(n-2)} + y_1 u^{(n-1)},
\end{aligned} \tag{43}$$

wobei wir kürzehalber von den bekannten in der combinatorischen Analysis allgemein üblichen Symbolen Gebrauch gemacht haben, nach welchen:

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3},$$

allgemein:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-p+1)}{2 \cdot 3 \ldots\ldots p}$$

angenommen ist.

Werden nun diese Gleichungen (43), von der ersten angefangen, nach der Reihe, mit den Coefficienten $X_0, X_1, \ldots\ldots X_n$ multiplizirt und addirt, so verschwindet die Summe sämmtlicher mit $\int u\, dx$ verbundener erster Glieder in den zweiten Theilen derselben und wir erhalten demgemäss die neue, kein $y$ oder Differentialquotienten desselben, dagegen aber $u, u', u'' \ldots\ldots u^{(n-1)}$ enthaltende Gleichung in vollständiger Entwicklung wie folgt:

$$
(44)\qquad
\begin{aligned}
& u^{(n-1)} \,.\, X_n y_1 + \\
& + u^{(n-2)} \left[ \binom{n}{1} X_n y_1' + X_{n-1} y_1 \right] + \\
& + u^{(n-3)} \left[ \binom{n}{2} X_n y_1'' + \binom{n-1}{1} X_{n-1} y_1' + X_{n-2} y_1 \right] + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + u' \left[ \binom{n}{2} X_n y_1^{(n-2)} + \binom{n-1}{2} X_{n-1} y_1^{(n-3)} + \binom{n-2}{2} X_{n-2} y_1^{(n-4)} + \ldots + X_2 y_1 \right] + \\
& + u \left[ \binom{n}{1} X_n y_1^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} X_{n-1} y_1^{(n-2)} + \binom{n-2}{1} X_{n-2} y_1^{(n-3)} + \ldots + 2 X_2 y_1' + X_1 y_1 \right] = 0.
\end{aligned}
$$

Betrachten wir nun den Fall, wenn bereits $r$ particuläre Integrale der reduzirten Gleichung, nämlich $C_1 y_1$, $C_2 y_2$, ...... $C_r y_r$ ermittelt sind, und erwägen wir, welcher Weg einzuschlagen sei, um sowohl die $(n-r)$ übrigen particulären Integrale der reduzirten Gleichung als auch das allgemeine Integral der completen Gleichung zu erfahren. Dem Gesagten zufolge wäre die Summe der bereits aufgefundenen particulären Integrale nämlich:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots\ldots\ldots + C_r y_r$$

zum allgemeinen Integral der reduzirten Gleichung zu ergänzen. Denken wir uns nun das letztere bereits gefunden, so wird es immer gestattet sein, das allgemeine Integral der completen Gleichung von derselben Form vorauszusetzen, sobald wir uns nur unter $C_1$, $C_2$, ...... $C_r$, $C_{r+1}$, ...... $C_n$ nicht mehr, wie in jenem, willkürliche Constante, sondern variable Functionen von $x$ vorstellen, von der Beschaffenheit, dass durch Substitution der für $y$, $y'$, $y''$, ..... $y^{(n)}$ daraus hervorgehenden Werthe in die vorgelegte Gleichung, dieselbe, nicht wie früher auf Null, sondern auf den zweiten Theil $F(x)$ reduzirt wird. Noch mehr: es wird diesem Verlangen schon dadurch entsprochen werden können, wenn an die Stelle einer einzigen der Constanten $C_1$, $C_2$, ...... $C_r$ eine schicklich gewählte Function von $x$ gesetzt wird, so zwar, dass, wenn wir auch die $(r-1)$ übrigen als variable Functionen von $x$ voraussetzen, zwischen denselben noch $(r-1)$ Relationsgleichungen bestehen können, die wir dann so wählen werden, dass der Gang der Rechnung so viel möglich erleichtert und vereinfacht wird. In der That wollen wir zwischen den, nunmehr als variable Functionen gedachten Grössen $C_1$, $C_2$,... $C_r$ solche Relationen feststellen, dass durch dieselben die Form der $(r-1)$ ersten Differentialquotienten $y'$, $y''$, $y'''$ ...... $y^{(r-1)}$ derjenigen, die ihnen für constante $C_1$, $C_2$, .... $C_r$ zukommt, vollständig ähnlich werde. Wir erhalten auf diese Weise:

$$(45)\qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots + C_r y_r$$

$$(46)\qquad \begin{aligned} y' = {} & C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots\ldots\ldots + C_r y_r' \\ & + C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots\ldots\ldots + C_r' y_r \end{aligned}$$

Dieser Werth von $y'$ würde nun offenbar für:

$$(47)\qquad C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots\ldots\ldots + C_r' y_r = 0$$

dieselbe Form, wie für constante $C_1$, $C_2$, .... $C_r$ erhalten, und wir wollen daher auch, der oben ausgesprochenen Absicht zufolge, diese Gleichung (47) als die erste der $(r-1)$, zwischen den Functionen $C_1$, $C_2$, ..... $C_r$ nach unserem Belieben aufzustellenden, Relationen annehmen. Wir bekommen aber überdiess:

$$\begin{aligned} y'' &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \dots\dots + C_r y_r'' \\ &\quad + C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots\dots + C_r' y_r'. \end{aligned} \tag{48}$$

Aus demselben Grunde wie früher setzen wir auch hier:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots\dots + C_r' y_r' = 0 \tag{49}$$

und erhalten weiter:

$$\begin{aligned} y''' &= C_1 y_1''' + C_2 y_2''' + \dots\dots + C_r y_r''' \\ & C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + \dots\dots + C_r' y_r'' = 0, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{50}$$

Wir bekommen so fortfahrend:

$$\begin{aligned} y^{(r-1)} &= C_1 y_1^{(r-1)} + C_2 y_2^{(r-1)} + \dots\dots + C_r y_r^{(r-1)} \\ & C_1' y_1^{(r-2)} + C_2' y_2^{(r-2)} + \dots\dots + C_r' y_r^{(r-2)} = 0 \end{aligned} \tag{51}$$

und es ist diess die letzte der $(r-1)$ Relationen zwischen den $C_1$, $C_2$, ..... $C_r$, über welche wir nach Belieben verfügen können. Es werden demgemäss die noch übrigbleibenden $(n-r+1)$ Differentialquotienten: $y^{(r)}$, $y^{(r+1)}$, ...... $y^{(n)}$ durch vollständige Differentiation des für $y^{(r-1)}$ eben erhaltenen Werthes zu bilden sein. Wir bekommen so:

$$\begin{aligned} y^{(r)} = {} & C_1 y_1^{(r)} + C_2 y_2^{(r)} + \dots\dots + C_r y_r^{(r)} \\ + {} & C_1' y_1^{(r-1)} + C_2' y_2^{(r-1)} + \dots\dots + C_r' y_r^{(r-1)}. \\ y^{(r+1)} = {} & C_1 y_1^{(r+1)} + C_2 y_2^{(r+1)} + \dots\dots + C_r y_r^{(r+1)} + \\ + {} & 2\,[C_1' y_1^{(r)} + C_2' y_2^{(r)} + \dots\dots + C_r' y_r^{(r)}] + \\ + {} & C_1'' y_1^{(r-1)} + C_2'' y_2^{(r-1)} + \dots\dots + C_r'' y_r^{(r-1)}. \\ y^{(r+2)} = {} & C_1 y_1^{(r+2)} + C_2 y_2^{(r+2)} + \dots\dots + C_r y_r^{(r+2)} + \\ + {} & 3\,[C_1' y_1^{(r+1)} + C_2' y_2^{(r+1)} + \dots\dots + C_r' y_r^{(r+1)}] + \\ + {} & 3\,[C_1'' y_1^{(r)} + C_2'' y_2^{(r)} + \dots\dots + C_r'' y_r^{(r)}] + \\ + {} & C_1''' y_1^{(r-1)} + C_2''' y_2^{(r-1)} + \dots\dots + C_r''' y_r^{(r-1)}. \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{52}$$

Die $(n-r+1)^{te}$ und zugleich letzte Gleichung ist:

$$\begin{aligned} y^{(n)} = \quad & C_1 \,.\, y_1^{(n)} + C_2 \,.\, y_2^{(n)} + \ldots\ldots + C_r \,.\, y_r^{(n)} + \\ + \quad & (n-r+1)\left[C'_1 \,.\, y_1^{(n-1)} + C'_2 \,.\, y_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + C'_r \,.\, y_r^{(n-1)}\right] + \\ + \quad & \frac{(n-r+1)(n-r)}{2}\left[C''_1 \,.\, y_1^{(n-2)} + C''_2 \,.\, y_2^{(n-2)} + \ldots\ldots + C''_r \,.\, y_r^{(n-2)}\right] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \quad & (n-r+1)\left[C_1^{(n-r)}\, y_1^{(r)} + C_2^{(n-r)}\, y_2^{(r)} + \ldots\ldots + C_r^{(n-r)}\, y_r^{(r)}\right] + \\ + \quad & \left[C_1^{(n-r+1)} y_1^{(r-1)} + C_2^{(n-r+1)} y_2^{(r-1)} + \ldots\ldots + C_r^{(n-r+1)} y_r^{(r-1)}\right]. \end{aligned}$$

Diese für $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ gewonnenen Werthe sind nun der Reihe nach mit $X_0, X_1, \ldots X_n$ zu multipliziren und in die vorgelegte Gleichung hineinzusetzen. Hiebei wird aber offenbar die Summe sämmtlicher nur undifferenzirte $C$'s in sich enthaltender Glieder verschwinden müssen, da dieselbe für sich allein genommen der reduzirten Gleichung genügt, die Summe der übrigen dagegen wird dem $F(x)$ gleichzusetzen sein, da wir ja Eines der zu bestimmenden $C$'s zu diesem Ende aufgespart haben. Die vorgelegte Gleichung (39) verwandelt sich hierdurch in eine neue nach $C$, welche die ersten, zweiten u. s. w. bis $(n-r+1)^{ten}$ Differentialquotienten der $C_1, C_2, \ldots\ldots C_r$ in sich enthalten wird. Von diesen letzteren $C$'s sind aber $(r-1)$ an der Zahl durch die früher aufgestellten Relationen (47), (49), .... bereits bestimmt, so zwar, dass wir durch Elimination aus denselben alle übrigen eingestrichelten $C$'s, allenfalls: $C'_2, C'_3, \ldots\ldots C'_r$ durch $C'_1$ ausgedrückt erhalten. Durch Hineinsubstituiren der so gewonnenen Werthe für $C'_2, C'_3, \ldots\ldots C'_r$ in die oberwähnte neue Gleichung wird auch in dieser jede Spur der, mit den Stellenzeigern 2, 3, ..... $r$ versehenen $C$'s verschwinden müssen, und wir bekommen so endlich eine Gleichung nach $C_1$ vom Grade $n-r+1$, in welcher aber kein mit dem $0^{ten}$ Differentialquotienten $C_1$ verbundenes Glied erscheinen wird, die sich demnach alsogleich auf eine neue, um die Einheit in der Ordnungszahl niedrigere, d. h. der $(n-r)^{ten}$ Ordnung angehörige, reduziren lässt. Da nun aber diese letztere eine complete ist, so wollen wir zuvörderst zeigen, auf welche Weise die eben vorgetragene Analysis aus dem allgemeinen Integral der reduzirten zu jenem der completen führe.

Wir setzen dem gemäss $n = r$ in unseren gegenwärtigen Rechnungen, und erhalten für diesen speciellen Fall zur Bestimmung von $C'_1, C'_2, C'_3 \ldots\ldots C'_n$ folgendes System von $n$ Gleichungen:

$$(53)\quad \begin{aligned} & C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots C'_n y_n = 0 \\ & C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \ldots\ldots\ldots C'_n y'_n = 0 \\ & C'_1 y''_1 + C'_2 y''_2 + \ldots\ldots\ldots C'_n y''_n = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots C'_n y_n^{(n-2)} = 0 \\ & C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots C'_n y_n^{(n-1)} = \frac{F(x)}{X_n}. \end{aligned}$$

Diese liefern durch das gewöhnliche schon früher zur Sprache gebrachte Eliminationsverfahren Werthe von $C'_1$ bis $C'_n$ von folgender Gestalt:

$$C'_1 = \varphi_1(x), \quad C'_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots\ldots \quad C'_n = \varphi_n(x) \tag{54}$$

und sodann durch Integration:

$$C_1 = c_1 + \int \varphi_1(x)\,dx, \quad C_2 = c_2 + \int \varphi_2(x)\,dx, \quad \ldots\ldots \quad C_n = c_n + \int \varphi_n(x)\,dx, \tag{55}$$

unter $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ willkürliche Constanten verstanden.

Endlich wird man diese eben gefundenen Ausdrücke in die Formel (40) substituiren, eine Formel, von der vorausgesetzt wurde, dass sie sowohl das Integral der reduzirten als auch der completen Gleichung gebe, ersteres in dem Falle, wenn $C_1$ bis $C_n$ Constante sind, letzteres aber dann, wenn sie auf schickliche Weise variabel gemacht werden; und so erhält man das gesuchte Integral der completen Gleichung unter folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} y = \; & c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n \\ & + y_1 \int \varphi_1(x)\,dx + y_2 \int \varphi_2(x)\,dx + \ldots\ldots + y_n \int \varphi_n(x)\,dx, \end{aligned} \tag{56}$$

und es ist abermals ersichtlich, dass dieses Integral aus zwei Theilen zusammengesetzt sei, dem in der ersten Reihe erscheinenden Integrale der reduzirten Gleichung und einer die zweite Reihe bildenden Function von $x$, die keine willkürliche Constante enthält, und der completen Gleichung Genüge leistet.

Auf ähnliche Weise wird man denn auch zuvörderst die oben erwähnte Gleichung vom Grade $n - r$ als reduzirte behandeln und zu integriren suchen; dann daraus das Integral der completen ableiten, die Werthe von $C'_2, \ldots\ldots C'_r$ berechnen, was offenbar keine Integration erheischt, und endlich durch Integration $C_2, \ldots\ldots C_r$ ermitteln.

## §. 6.

## Plan des vorliegenden Werkes.

Nachdem wir in den vorhergehenden fünf Paragraphen die nothwendigsten fundamentalen Lehrsätze über die Existenz und Form der Integrale linearer Differentialgleichungen, so wie über den Bau dieser letzteren entwickelt und gesehen haben, dass der Gegenstand in steter Analogie mit der Theorie der algebraischen Gleichungen fortschreite, finden wir uns veranlasst, diese Analogie auch fernerhin festzuhalten, und die nun folgenden Lehren dermassen in Abschnitte zu theilen, dass einem jeden derselben ein analoges Capitel auf dem Felde der algebraischen Gleichungen entspricht. Es soll daher:

Erstens der nächstfolgende zweite Abschnitt die Lehre enthalten von denjenigen Differentialgleichungen aller Ordnungen und mit bestimmtem Coefficientenbau, die wir in Folge dieses letzteren durch geschlossene Formeln zu integriren vermögen. Hieher gehören z. B. die Formen:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + A_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots\ldots + A_1 y' + A_0 y = F(x)$$

$$A_n (h+kx)^n y^{(n)} + A_{n-1} (h+kx)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_1 (h+kx) y' + A_0 y = F(x)$$

$$(a_n + b_n x) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) y^{(n-1)} + \ldots\ldots + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = F(x)$$

$$a_n . x^n . y^{(n)} + x^{n-1} (a_{n-1} + b_{n-1} x^m) y^{(n-1)} + \ldots\ldots + (a_0 + b_0 x^m + c_0 x^{2m} + \ldots h_0 x^{mn}) y = F(x)$$

und noch einige andere. Dieser Lehre entspricht auf dem Gebiete der algebraischen Gleichungen die von den binomischen, reciproken u. s. w. Gleichungen, welche, in Folge ihres speciellen Coefficientenbaues eine Auflösung durch geschlossene Formeln zulassen.

Zweitens. Der dritte Abschnitt enthält die Formenlehre der linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten algebraische und rationale Functionen von $x$ sind, und stellt die Kennzeichen auf, nach welchen die Formen der Genüge leistenden particulären Integrale aus jenen der Coefficienten abgeleitet werden. Diesem Abschnitte entspricht auf dem anderen Felde eine Reihe von Lehrsätzen, wie die von Descartes, Fourier, Sturm.

Drittens. Ein vierter Abschnitt hat die Transformation der Differentialgleichungen zum Gegenstande, und lehrt, aus der gegebenen Gleichung eine andere abzuleiten, deren particuläre Integrale mit jenen der ersteren in einem gewissen analytischen Zusammenhange stehen.

Viertens. In einem fünften Abschnitte werden Methoden entwickelt, die, der Form nach bereits bekannten particulären Integrale wirklich zu berechnen, und, da oft ein und dasselbe particuläre Integral unter verschiedenen Formen erscheinen kann, auch Methoden diese Formen in einander zu verwandeln, damit man aus denselben die vortheilhafteste, etwa die geschlossene oder eine andere, den Vorzug der Durchsichtigkeit in höherem Grade besitzende zu wählen im Stande sei. Endlich

Fünftens wollen wir in einem sechsten Abschnitte unsere Aufmerksamkeit den Systemen von mehreren Differentialgleichungen und den partiellen Differentialgleichungen zuwenden.

# II. Abschnitt.

## Differentialgleichungen mit particulären Integralen von einerlei geschlossener Form.

Es ist bereits im §. 2 des ersten Abschnittes darauf hingewiesen worden, dass es der geschlossenen Formeln für die particulären Integrale linearer Differentialgleichungen zwei Arten geben könne: solche nämlich, die die Ableitungsweise derselben aus den Coefficienten der Gleichung angeben, wie auch diese Coefficienten gebaut sein mögen, und die wir lediglich für die Differentialgleichungen der ersten Ordnung besitzen, und andere, die einen bestimmten Bau der Coefficienten voraussetzen, somit nur für eine specielle Classe von Gleichungen gültig sind. Von diesen letzteren nehmen aber diejenigen vorzugsweise unsere Aufmerksamkeit in Anspruch, welche, im Allgemeinen wenigstens und ohne Rücksicht auf mögliche Ausnahmsfälle, lauter particuläre Integrale von einerlei Gestalt zulassen, weil diese Gleichförmigkeit der Form auch eine Gleichförmigkeit in der Auffindungsweise dieser particulären Integrale unmittelbar nach sich zieht. Hierher gehört die den Analysten seit lange bekannte Form der Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten:

$$A_n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + A_1 \frac{dy}{dx} + A_0 y = 0,$$

von welcher man weiss, dass sie in der Regel $n$ particuläre Integrale von der Form:

$$C \,.\, e^{rx}$$

besitze.

Hierher gehört ferner die schon von Legendre behandelte Gleichung:

$$A_n (h+kx)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1} (h+kx)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + A_1 (h+kx) \frac{dy}{dx} + A_0 y = 0,$$

deren particuläre Integrale, wenn man von gewissen Ausnahmsfällen absieht, alle in der Form:

$$C\,(h+kx)^r$$

enthalten sind.

Ferner sind noch hierherzuzählen alle unter folgender Gestalt erscheinenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^n y}{dx^n}(a_n + b_n x) + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}(a_{n-1} + b_{n-1} x) + \dots + \frac{dy}{dx}(a_1 + b_1 x) + y(a_0 + b_0 x) = 0,$$

deren Integration den Gegenstand einer Denkschrift in den naturwissenschaftlichen Abhandlungen gesammelt und durch Subscription herausgegeben von W. Haidinger, 1. Band, Seite 177—257 gebildet hat, und deren Integrale unter der Form:

$$C.\int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V du$$

auftreten. Diese nun und ähnliche Differentialgleichungen sollen im gegenwärtigen Abschnitte zur Sprache kommen. Wir werden hiebei einen Vorrath von Formen kennen lernen, unter welchen die particulären Integrale linearer Differentialgleichungen zu erscheinen vermögen, wodurch dann wieder eine allgemeinere Formenlehre vorbereitet wird, die den Inhalt des folgenden Abschnittes bilden soll.

Unbezweifelt reduzirt sich das ganze Problem der Integration der linearen Differentialgleichungen auf die vollständige Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den Coefficienten derselben und den ihnen entsprechenden particulären Integralen. Es ist daher auch nicht zu läugnen, dass ein Inbegriff von Lehrsätzen, welche aus den Formen der Coefficienten jene der particulären Integrale zu erschliessen lehren, ein fundamentales Capitel in einem Werke über diesen Gegenstand bilde, woraus dann wieder zu folgen scheint, dass eine solche Formenlehre an der Spitze desselben zu erscheinen habe. Dessenungeachtet haben wir es vorgezogen hier den natürlichen Gang der Erfindung zu gehen, weil man ohne eine gewisse Summe von gemachten analytischen Erfahrungen gar nicht einmal auf den Gedanken einer Formenlehre gekommen wäre, weil ferner diese Erfahrungen, die wir im gegenwärtigen Abschnitte gewinnen, den besten Eintheilungsgrund für jene Formen liefern, weil endlich die in den meisten Fällen so sehr wichtige Verwandlung verschiedener Formen, unter welchen die in Rede stehenden particulären Integrale erscheinen können, in einander, am allerpassendsten an den einfachen Beispielen dieses Abschnittes nachgewiesen werden kann. Spätere Wissenschaftsforscher, die sich mit diesem noch so sehr neuen Gegenstande beschäftigen werden, mögen immerhin die Ordnung der Lehrgegenstände in eine andere verwandeln, sobald diess durch die neu gemachten Fortschritte geboten sein wird; uns ziemt es denjenigen Gang einzuschlagen, der die lichtvollste Klarheit verspricht.

## §. 1.

## Integration der Gleichungen von der Form:

$$A_n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots\dots + A_1 \frac{dy}{dx} + A_0 y = 0 \qquad (1)$$

und:

$$A_n (h+kx)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1} (h+kx)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots\dots + A_1 (h+kx) \frac{dy}{dx} + A_0 y = 0. \qquad (2)$$

Zu den Integralen der linearen Differentialgleichungen, die man bisher aufzufinden gelehrt hat, gelangt man in der Regel durch eine glückliche Voraussetzung hinsichtlich der Form des Ausdruckes, der die Eigenschaft hat Genüge zu leisten. Hat man die Form errathen, so bekommt man auch gewöhnlich nicht einen, sondern mehrere gleich gestaltete Ausdrücke, die sämmtlich die Eigenschaft besitzen, der Gleichung zu genügen, somit als eben so viele particuläre Integrale zu betrachten sind, die man dann je mit einer willkürlichen Constanten multiplizirt und addirt, und so abermals einen Ausdruck erhält, der die vorgelegte lineare Differentialgleichung erfüllt, und ein vollständiges Integrale ist oder nicht, je nachdem in demselben die erforderliche Zahl von willkürlichen Constanten vorhanden ist oder nicht. So integriren wir die Gleichung (1), indem wir den Werth von $y$ von der Form $e^{rx}$ voraussetzen. Und wirklich gibt $e^{rx}$ statt $y$ substituirt, folgende Gleichung:

$$A_n r^n e^{rx} + A_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \dots\dots + A_1 r . e^{rx} + A_0 . e^{rx} = 0$$

oder:

$$A_n r^n + A_{n-1} r^{n-1} + \dots\dots + A_1 r + A_0 = 0. \qquad (3)$$

Es wird daher $e^{rx}$ ein particuläres Integral sein, wenn $r$ eine beliebige der $n$ Wurzeln der Gleichung (3) ist. Bezeichnen wir diese letzteren mit

$$r_1, \; r_2, \; r_3, \; \dots\dots \; r_n,$$

so sind

$$e^{r_1 x}, \; e^{r_2 x}, \; e^{r_3 x}, \; \dots\dots \; e^{r_n x}$$

particuläre Integrale, und in Folge der linearen Form der Differentialgleichung

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \dots\dots + C_n e^{r_n x} \qquad (4)$$

das allgemeinste, mit $n$ willkürlichen Constanten $C_1, \dots\dots C_n$ versehene Integral derselben.

Auf ähnliche Weise gelangt man zum Integral der Gleichung (2),

$$y = (h + kx)^r$$

voraussetzend. Diess führt nämlich zur folgenden Gleichung des $n^{ten}$ Grades in $r$:

$$(5) \qquad A_n k^n r(r-1)\ldots(r-n+1) + A_{n-1} k^{n-1} r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots\ldots + A_1 kr + A_0 = 0,$$

deren $n$ Wurzeln wir mit $r_1 \ldots r_n$ bezeichnen, und auf demselben Wege für das allgemeine Integral folgenden, mit $n$ willkürlichen Constanten $C_1, \ldots C_n$ versehenen Ausdruck erhalten:

$$(6) \qquad y = C_1(h+kx)^{r_1} + C_2(h+kx)^{r_2} + \ldots + C_n(h+kx)^{r_n}.$$

Es ist klar, dass die Ausdrücke (4) und (6) nicht mehr die Form des allgemeinen Integrals der Gleichungen (1) und (2) darzustellen im Stande sind in dem Falle, wenn unter den Wurzeln der Gleichungen (3) und (5) gleiche vorkommen, da die vorgelegten Gleichungen sonst gleiche particuläre Integrale besitzen müssten, was, zufolge der im I. Abschnitte, §. 4, geführten Untersuchungen, nicht sein kann. In der That haben dann nicht alle particulären Integrale der Differentialgleichung die ihnen vorausgesetzte Form, und es steht namentlich, wenn:

$$r_1 = r_2 = \ldots\ldots = r_m$$

in (3) sein sollte, anstatt des Ausdruckes (4) folgender andere als allgemeines Integral der Gleichung (1) da, nämlich:

$$(7) \qquad y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots\ldots + C_m x^{m-1})\, e^{r_1 x} + C_{m+1} e^{r_{m+1} x} + \ldots\ldots + C_n e^{r_n x}.$$

Die natürlichste Art diess zu erweisen, wäre wohl der Gebrauch der im ersten Abschnitte, §. 5, auseinandergesetzten Methode der Variation der Constanten; man bedient sich indessen zu diesem Zwecke noch eines anderen, schon desshalb sehr erwähnenswerthen Kunstgriffes, weil er sehr schnell zum Ziele führt, wenn auch die darin vorkommenden analytischen Gebilde wie $\frac{0}{0}$ oder $0 \cdot \infty$ für den Anfänger einiges Abstossende haben sollten. Es ist unerlässlich, diesen und ähnlichen Formen einige Aufmerksamkeit zuzuwenden, weil sie nur zu oft den Übergang von einer Form des Integrales zur andern vermitteln, der einer nicht selten nur sehr geringfügig scheinenden Änderung in den Coefficienten der Gleichung entspricht, und so den Rechner von der directen Aufsuchung neuer Formen und damit verknüpften Rechnungswiederholungen entheben. Der Kunstgriff besteht im Wesentlichen darin, dass man die gleichwerdenden Wurzeln nicht mit einem Schlage einander gleichsetzt, sondern allmälig gegen die Gleichheit convergiren lässt, indem man damit beginnt, anzunehmen, dass ihre Unterschiede sehr klein seien; dem gemäss setzen wir im gegenwärtigen Falle:

$$(8) \qquad r_2 = r_1 + \varepsilon_2, \quad r_3 = r_1 + \varepsilon_3, \quad \ldots\ldots \quad r_m = r_1 + \varepsilon_m$$

und verstehen unter $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, ..... $\varepsilon_m$ sehr kleine Zusätze, die wir gegen die Nulle convergiren lassen. Anstatt der Formel (4) tritt dann folgende andere auf:

$$y = (C_1 + C_2 e^{\varepsilon_2 x} + C_3 e^{\varepsilon_3 x} + \ldots . + C_m e^{\varepsilon_m x}) e^{r_1 x} + C_{m+1} e^{r_{m+1} x} + \ldots . + C_n e^{r_n x}. \tag{9}$$

Wegen der vorausgesetzten Kleinheit sämmtlicher $\varepsilon$ genannten Coefficienten lassen sich aber die sie enthaltenden Exponentiellen in sehr convergirende Reihen entwickeln, und man hat namentlich:

$$e^{\varepsilon_2 x} = 1 + \varepsilon_2 x + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 x^2 + \frac{1}{2.3} \varepsilon_2^3 x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$e^{\varepsilon_3 x} = 1 + \varepsilon_3 x + \frac{1}{2} \varepsilon_3^2 x^2 + \frac{1}{2.3} \varepsilon_3^3 x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e^{\varepsilon_m x} = 1 + \varepsilon_m x + \frac{1}{2} \varepsilon_m^2 x^2 + \frac{1}{2.3} \varepsilon_m^3 x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Diese Werthe führen wir in die vorhergehende Gleichung ein, und setzen noch überdem:

$$\begin{aligned}
C_1 + C_2 \quad + C_3 \quad &+ \ldots\ldots + C_m \quad = B_1 \\
C_2 \varepsilon_2 + C_3 \varepsilon_3 \quad &+ \ldots\ldots + C_m \varepsilon_m = B_2 \\
C_2 \varepsilon_2^2 + C_3 \varepsilon_3^2 \quad &+ \ldots\ldots + C_m \varepsilon_m^2 = 2\, B_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_2 \varepsilon_2^{m-1} + C_3 \varepsilon_3^{m-1} &+ \ldots\ldots + C_m \varepsilon_m^{m-1} = 2.3 \ldots (m-1) B_m,
\end{aligned}$$

so erhalten wir

$$y = (B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \ldots + B_m x^{m-1}) e^{r_1 x} + C_{m+1} e^{r_{m+1} x} + \ldots C_n e^{r_n x} + H x^m e^{r_1 x}$$

unter $H$ ein nach aufsteigenden Potenzen von $x$ geordnetes Polynom verstanden, welches nach den sehr kleinen Zusätzen $\varepsilon$ der $m^{\text{ten}}$ Ordnung angehört und nach den $C$ linear ist. Verstehen wir jetzt unter $B_1$, $B_2$, ... $B_m$ willkürliche Constanten, so werden, kraft der zwischen ihnen und den $C_1$, $C_2$, ... $C_m$ aufgestellten Gleichungen, letztere als Functionen der ersteren und der sehr kleinen Zahlen $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, ... $\varepsilon_m$ erklärt. Von diesen Gleichungen verlangt die letzte, dass, wenn $B_m$ eine endliche Constante bedeutet, die $C_2$, $C_3$, ... $C_m$ Grössen seien, welche bei dem unendlichen Abnehmen der $\varepsilon$ ins Unendliche wachsen, in einem Masse, wie der Bruch

$$\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}$$

es anzeigt; unter dieser Beschränkung aber wird man stets Werthe der $C_1$, $C_2$, ... $C_m$ finden, welche diesen Gleichungen Genüge leisten. Lässt man jetzt $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_m = 0$ werden, so geht $H$

offenbar als eine Grösse der ersten Ordnung nach diesen verschwindenden Zusätzen in die Nulle über, und wir erhalten das allgemeine Integral der zu integrirenden Differentialgleichung:

$$y = (B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \cdots + B_m x^{m-1})\, e^{r_1 x} + C_{m+1}\, e^{r_{m+1} x} + \ldots\ldots + C_n e^{r_n x},$$

eine Form, welche mit der (7) zusammenfällt.

Sollte Jemand an dieser Art das unvollständige Integral zu ergänzen, Anstoss nehmen, so kann er sich sehr leicht einen synthetischen Beweis verschaffen, dass, im Falle die Gleichung (3) $m$ gleiche Wurzeln besitzt, der Differentialgleichung (1) durch einen Werth, wie:

$$y = (B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \ldots\ldots + B_m x^{m-1})\, e^{r_1 x}$$

Genüge geleistet werde. Zur bequemeren Führung dieses Beweises stellen wir die Gleichung (1) dar in der symbolischen Form:

$$y \cdot f\left(\frac{d}{dx}\right) = 0, \tag{10}$$

so wird die (3) folgendermassen geschrieben werden müssen:

$$f(r) = 0, \tag{11}$$

und da $r = r_1$ eine $m$mal vorkommende Wurzel derselben ist, so haben wir identisch:

$$f(r_1) = f'(r_1) = f''(r_1) = \ldots\ldots = f^{(m-1)}(r_1) = 0$$

unter $f'$, $f''$, $\ldots$ $f^{(m-1)}$ den $1^{\text{ten}}$, $2^{\text{ten}}$, $\ldots$ $(m-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $f$ verstanden.

Bedenkt man nun andererseits, dass allgemein:

$$\frac{d}{dx}(e^{rx} \cdot x^k) = e^{rx}\,[r \cdot x^k + k x^{k-1}]$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{rx} \cdot x^k) = e^{rx}\,[r^2 \cdot x^k + 2 \cdot r \cdot k x^{k-1} + k(k-1)\, x^{k-2}]$$

..............................................................

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{rx} \cdot x^k) = e^{rx}\left[r^n \cdot x^k + \binom{n}{1} r^{n-1} k x^{k-1} + \binom{n}{2} r^{n-2} k(k-1)\, x^{k-2} + \ldots + \binom{n}{k} r^{n-k} k(k-1) \ldots 1\right]$$

sei, so sieht man, dass, wenn $k$ eine ganze Zahl ist, ein jeder Werth von der Form: $e^{rx} \cdot x^k$ anstatt $y$ gesetzt, die Differentialgleichung (1) auf die Form bringe:

$$e^{rx}\left[x^k f(r) + k x^{k-1} f'(r) + k(k-1) x^{k-2} \frac{f''(r)}{2} + \ldots\ldots + k(k-1)..2x \frac{f^{(k-1)}(r)}{2\ldots(k-1)} + k(k-1)\ldots1 \frac{f^{(k)}(r)}{2\ldots k}\right] = 0 \tag{12}$$

Ist nun $r = r_1$ und zugleich $k < m$, somit höchstens $k = m - 1$, so wird offenbar diese Gleichung (12) eine identische, und hiermit ist es bewiesen, dass das angegebene particuläre Integral wirklich Genüge leiste.

Da die Gleichung (2) durch die einfache Substitution:

$$h + kx = e^{\omega}$$

sich auf eine mit constanten Coefficienten zurückzieht, wie man unschwer erkennen wird, wenn man bedenkt, dass durch eine derartige Substitution die Form des allgemeinen Integrales (6) offenbar in jene von (4) übergeht, so erfordert die Completirung ihres Integrales im Falle gleicher Wurzeln keine besondere Behandlung. Es wird sich daher sowohl die eine als auch die andere der Gleichungsformen (1) und (2) stets und allgemein integriren lassen, so zwar, dass man immer ein mit $n$ willkürlichen Constanten versehenes, nur zwei verschiedene Grundformen möglicherweise enthaltendes allgemeines Integral bekömmt.

Wir bemerken noch schliesslich, dass auch Gleichungen, deren Coefficientenbau von jenem der Gleichungen (1) und (2) vollständig verschieden ist, einzelne particuläre Integrale besitzen können, die den beiden ebenbetrachteten Formen angehören, wiewohl es auf den ersten Anblick scheinen möchte, dass z. B. die Voraussetzung eines particulären Integrals von der Form $e^{rx}$ für Gleichungen, deren Coefficienten die Variable $x$ enthalten, unzulässig sei, da einerseits die Grösse $r$ bei den successiven Differentiationen als Constante behandelt, anderseits aber für variable Coefficienten $A$ durch die Gleichung (3) als von $x$ abhängig erklärt wird.

Ertheilen wir nichts destoweniger dem $y$ die Form $e^{rx}$, unter $r$ eine constante Grösse verstanden, so wird man, nach vollbrachter Einführung desselben, zu einer Substitutionsgleichung gelangen, die, für dem $m^{\text{ten}}$ Grade nach $x$ angehörige $A$, folgende Form besitzen wird:

$$L + Mx + Nx^2 + \ldots\ldots + Px^m = 0.$$

Haben nun $L, M, N, \ldots\ldots P$ einen gemeinschaftlichen nur $r$ enthaltenden Factor, so ist es klar, dass jeder Werth von $r$, der diesen Factor auf die Nulle reduzirt, die vorgelegte Gleichung erfüllen, diese letztere demnach eben so viele particuläre Integrale von der früher betrachteten Form besitzen wird.

Überhaupt ist es gestattet, sich auf diesem Felde mit einer gewissen Freiheit zu bewegen, da ja die gemachten Voraussetzungen rücksichtlich der Form der einzelnen particulären Integrale sich auf dem angedeuteten Wege ohnediess von selbst als zulässig oder unzulässig herausstellen. Es kann uns sonach nichts hindern, dem $y$ was immer für eine Form $\varphi(x, u, v, \ldots a, b, \ldots)$ beizulegen, da hierdurch eigentlich nur das Erfülltwerden der vorgelegten Gleichung von dem Erfülltwerden der Substitutionsgleichung abhängig gemacht wird, zu der man durch Einführung des so vorausgesetzten $y$ gelangt. Kann nun aber dieser letzteren durch schickliche Wahl der früher noch unbestimmt gelassenen Constanten $a, b, \ldots$ Genüge geleistet werden, so verwandeln eben diese genügenden Werthe die obenaugenommene Form in ein particuläres Integral, und zwar wird man der letzteren so viele erhalten, als es verschiedene Systeme der Grössen $a, b, \ldots$ gibt, welche besagte Substitutionsgleichung erfüllen.

## §. 2.

### Integration der Gleichungen von der Form:

(13) $$\frac{d^n y}{dx^n}(a_n + b_n x) + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(a_{n-1} + b_{n-1}x) + \ldots + \frac{dy}{dx}(a_1 + b_1 x) + y(a_0 + b_0 x) = 0,$$

wo $a_n \ldots\ldots a_0$, $b_n \ldots\ldots b_0$ constante Coefficienten bedeuten von willkürlichem Werth.

Genau auf dieselbe Weise, wie sich durch eine glückliche Voraussetzung die Form des Ausdruckes ergab, der eine Differentialgleichung wie (1) oder (2) erfüllt, liegt uns die Vermuthung nahe, dass die Differentialgleichung (13), die der Gegenstand unserer Untersuchung sein soll, particuläre Integrale zulasse von folgender Form:

(14) $$y = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V\, du$$

wo $V$ eine Function der Variablen $u$, $u'$ und $u''$ aber schicklich gewählte Integrationsgrenzen andeuten. Um nun die Werthe von $V$, $u'$ und $u''$, die eben den Ausdruck (14) wo möglich in ein particuläres Integral umwandeln, zu bestimmen, substituiren wir denselben in die Differentialgleichung (13), und erhalten, wenn wir bedenken, dass

(15) $$\frac{dy}{dx} = \int_{u'}^{u''} u e^{ux}\, V\, du, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \int_{u'}^{u''} u^2 e^{ux}\, V\, du, \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \int_{u'}^{u''} u^n e^{ux}\, V\, du$$

ist, und überdiess

(16) $$a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 u + a_0 = U_0,$$

(17) $$b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 u + b_0 = U_1$$

setzen, als Resultat:

(18) $$\int_{u'}^{u''} [U_0 + U_1 x]\, e^{ux}\, V\, du = 0.$$

Endlich suchen wir $V$, $u'$, $u''$ so zu bestimmen, dass die Gleichung (18) eine identische wird. Nun lässt sich aber dieselbe so schreiben:

(19) $$\int_{u'}^{u''} U_0 e^{ux}\, V\, du + x \int_{u'}^{u''} U_1 e^{ux}\, V\, du = 0,$$

und man erhält durch das Verfahren der theilweisen Integration:

(20) $$x \int U_1 e^{ux}\, V\, du = e^{ux}\, U_1 V - \int e^{ux} \frac{d[U_1 V]}{du}\, du;$$

somit, wenn man das Symbol

$$\left\{e^{ux}\,U_1\,V\right\}_{u'}^{u''}$$

dasjenige bedeuten lässt was man erhält, wenn man in den eingeklammerten Ausdruck erst die obere der rechts angefügten Zahlen $u''$, dann die untere $u'$ substituirt, und das Resultat der zweiten Substitution von jenem der ersten abzieht:

$$x\int_{u'}^{u''} U_1\,e^{ux}\,V\,du = \left\{e^{ux}\,U_1 V\right\}_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} e^{ux}\,\frac{d\,[U_1 V]}{du}\,du. \tag{21}$$

In Folge dieser Gleichung geht uns die (19) über in

$$\left\{e^{ux}\,U_1 V\right\}_{u'}^{u''} + \int_{u'}^{u''} e^{ux}\left[U_0 V\,du - \frac{d\,[U_1 V]}{du}\,du\right] = 0 \tag{22}$$

und dieser letzteren ist nun identisch, d. h. für jeden Werth von $x$, durch eine schicklich gewählte Function von $u$ anstatt $V$, und durch passende Werthe der Grenzen $u'$ und $u''$, Genüge zu leisten. Diess wird offenbar erreicht, wenn man

$$U_0\,V\,du - d\,[U_1\,V] = 0 \tag{23}$$

setzt, und überdiess für $u'$ und $u''$ solche, weder $x$ noch $u$ in sich enthaltende Werthe substituirt, die der Gleichung

$$\left\{e^{ux}\,U_1 V\right\}_{u'}^{u''} = 0 \tag{24}$$

Genüge leisten. Es ist natürlich die Gleichung (22) eben auf diese Weise in zwei zu zerfällen, weil der Fall, dass das zweite Glied des ersten Theiles derselben, durch wirkliche Integration ermittelt, sich mit dem ersten aufhebt, ein unzulässiger ist; wäre nämlich die unter dem Integralzeichen sich befindende Function in endlicher Form integrabel, so könnte sie offenbar nur ein Integral von der Form $e^{ux} P$ zulassen. Da aber

$$\frac{d}{du}\,(e^{ux} P) = e^{ux}\left(\frac{dP}{du} + xP\right)$$

ist, so sieht man, dass der erwähnte Ausdruck unter dem Integralzeichen, um als ein Differential des ausserhalb befindlichen gelten zu können, noch ein Glied mit dem Factor $x$ in sich schliessen müsste; da ihm jedoch dieses fehlt, so fällt die Nothwendigkeit, die Gleichung in zwei zu zerlegen, unmittelbar in die Augen. Es ist aber (23) eine Differentialgleichung der ersten Ordnung von linearer Form, und gibt auf dem betretenen Wege integrirt folgenden Werth für $V$ in Function von $u$:

$$V = \frac{C}{U_1}\,e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}, \tag{25}$$

der in (24) substituirt, diese Gleichung verwandelt in

$$\left\{ C e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \right\}_{u'}^{u''} = 0. \tag{26}$$

Man wird jetzt damit anfangen diejenigen Werthe von $u$ zu ermitteln, welche der in (26) eingeklammerten Function einerlei Werth $A$ ertheilen. Gesetzt man hätte deren mehrere $u_1, u_2, u_3, \ldots u_p$ gefunden, so kann man:

$$u' = u_1, \quad u'' = u_2,$$

oder

$$u' = u_1, \quad u'' = u_3,$$

oder

$$u' = u_1, \quad u'' = u_4$$

u. s. w. substituiren, und wird so particuläre Integrale, $p - 1$ an der Zahl erhalten, welche in der Regel unter sich und von 0 verschieden ausfallen werden, nämlich:

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_{u_1}^{u_2} C_1 e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \cdot \frac{du}{U_1}, \qquad y_2 = \int_{u_1}^{u_3} C_2 e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \cdot \frac{du}{U_1} \\ y_3 &= \int_{u_1}^{u_4} C_3 e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \cdot \frac{du}{U_1}, \qquad y_{p-1} = \int_{u_1}^{u_p} C_{p-1} e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \cdot \frac{du}{U_1} \end{aligned} \tag{27}$$

und weil die Differentialgleichung lineare Form hat, so wird ihr auch die Summe dieser particulären Werthe Genüge leisten. Wir haben somit

$$y = \int_{u_1}^{u_2} C_1 e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \cdot \frac{du}{U_1} + \int_{u_1}^{u_3} C_2 e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \cdot \frac{du}{U_1} + \cdots + \int_{u_1}^{u_p} C_{p-1} e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \cdot \frac{du}{U_1}. \tag{28}$$

Man kann sich auch *a posteriori* davon überzeugen, dass dieser Ausdruck statt $y$ gesetzt die vorgelegte Differentialgleichung erfülle; es reduzirt sich in der That durch die wirklich gemachte Substitution desselben und durch das angewendete Verfahren des theilweisen Integrirens ihr erster Theil auf die Summe:

$$\left\{ C_1 e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \right\}_{u_1}^{u_2} + \left\{ C_2 e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \right\}_{u_1}^{u_3} + \cdots + \left\{ C_{p-1} e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \right\}_{u_1}^{u_p}, \tag{29}$$

deren einzelne Glieder, in Folge der für $u_1, u_2, \ldots u_p$ aus der Auflösung der Gleichung (26) hervorgehenden Werthe, jedes für sich der Nulle gleich werden. Es geht hieraus hervor, dass es nicht einmal

nothwendig sei jene Werthe der Integrationsgrenzen so zu wählen wie im Vorhergehenden auseinandergesetzt worden ist; es genügt vielmehr, wenn bloss die Summe (29) verschwindet, was z. B. dann der Fall ist, wenn die darin vorkommenden Ausdrücke:

$$\left\{e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}\right\}_{u_1}^{u_2}, \quad \left\{e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}\right\}_{u_1}^{u_3}, \quad \ldots \quad \left\{e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}\right\}_{u_1}^{u_p},$$

sämmtlich einen und denselben von 0 verschiedenen Werth $B$ annehmen, und überdiess zwischen den Constanten $C_1 \ldots C_{p-1}$ folgende Relation festgesetzt wird:

$$C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_{p-1} = 0;$$

oder wenn dieselben Ausdrücke sich auf die von einander verschiedenen constanten oder mit derselben Function von $x$ als Factor verknüpften Werthe

$$B_1, \quad B_2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad B_{p-1}$$

reduziren, während zugleich

$$C_1 B_1 + C_2 B_2 + \ldots\ldots + C_{p-1} B_{p-1} = 0$$

gewählt wird.

Ist es uns auf diese Weise gelungen ein Integral der zur $n^{ten}$ Ordnung gehörigen Differentialgleichung mit $n$ von einander unabhängigen willkürlichen Constanten, oder auch mit Constanten $n+k$ an der Zahl, und $k$ zwischen denselben Statt findenden Bedingungsgleichungen aufzufinden, so ist diess Integral ein allgemeines, sonst aber nur ein particuläres, durch den Zusatz einer neuen Function von $x$, die für sich die Eigenschaft haben muss Genüge zu leisten, und die noch fehlenden Constanten enthält, zu vervollständigendes.

Wir wollen in diesem Paragraphe bloss zeigen, wie man sich auf dem hier betretenen Wege particuläre Integrale verschaffen kann; die Untersuchung aber, ob der aus diesen particulären Werthen zusammengesetzte Ausdruck ein allgemeines Integral sei und dessen Vervollständigung, wenn er einer solchen bedürfen sollte, für den nächsten Paragraph aufsparen.

Fasst man das bisher Gesagte zusammen, so ergibt sich daraus folgende Integrationsmethode für Gleichungen, deren Coefficienten von der Form $a+bx$ sind: Man bilde zuerst die mit $U_0$ und $U_1$ bezeichneten Polynome dadurch, dass man in der Differentialgleichung anstatt der vorkommenden Differentialquotienten von $y$:

$$\frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad y,$$

bezüglich die Potenzen

$$u^n, \quad u^{n-1}, \quad \ldots\ldots \quad u^2, \quad u, \quad 1,$$

substituirt, und in dem so geformten Polynome die Summe aller Glieder ohne $x$ mit $U_0$, den Multiplikator von $x$ mit $U_1$ bezeichnet; sodann verschafft man sich das Integral:

$$\int \frac{U_0}{U_1}\, du,$$

wobei man offenbar nur mit denjenigen Schwierigkeiten zu kämpfen hat, denen überhaupt die Zerlegung gebrochener Functionen in Partialbrüche unterliegt und sucht endlich die Wurzeln der Gleichung:

$$e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} = A,$$

unter $A$ eine beliebige, von der Nulle verschiedene Grösse, oder auch die Nulle verstanden. In den meisten Fällen werden wir es mit der Gleichung:

$$e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} = 0 \tag{30}$$

zu thuen haben.

Sind nun diese Wurzeln $u_1, u_2, \dots u_p$, so hat man das Integral der Differentialgleichung bereits gefunden, es ist nämlich das in der Formel (28) enthaltene. Es wird jetzt am gerathensten sein, an einigen Beispielen die Wirksamkeit dieser Methode zu erproben, weil so am allerbesten erhellen kann, in welchen Fällen sie die nöthige Anzahl particulärer Integrale wirklich liefert, und somit zum allgemeinen Integrale führt; und in welchen andern Fällen sie sich, wenigstens insofern als sie bisher entwickelt wurde, als unwirksam erweist, und einen zwar der Differentialgleichung genügenden Ausdruck liefert, der aber nicht die nothwendige Anzahl Constanten in sich schliesst, somit einer Vervollständigung bedarf, um zum allgemeinen Integral erhoben zu werden.

Nehmen wir als erstes Beispiel die allgemeine Gleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(a_2 + b_2 x) + \frac{dy}{dx}(a_1 + b_1 x) + y\,(a_0 + b_0 x) = 0. \tag{31}$$

Scheiden wir hier zwei Fälle, den wo $b_2$ gleich Null ist, und den wo dieser Coefficient von der Nulle verschieden ausfällt. Im ersten Falle bekommen wir durch das Verschwinden von $b_2$ selbst, eine einfachere Form; überdiess lässt sich noch die Gleichung durch $a_2$ dividiren, und erhält folgende Gestalt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(a_1 + b_1 x) + y\,(a_0 + b_0 x) = 0,$$

welche ihrerseits noch durch Einführung einer neuen Veränderlichen, mittelst der Substitution

$$x = x_1 - \frac{a_1}{b_1},$$

auf die noch einfachere Form:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b_1 x \frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x) y = 0, \qquad (32)$$

unter der Bedingung jedoch, dass $b_1$ von der Nulle verschieden ist, zurückgeführt werden kann.

Ist aber $b_2$ nicht Null, so wird man $x - \frac{a_2}{b_2}$ anstatt $x$ setzend, die (31) in die einfachere:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(a_1 + b_1 x) + y(a_0 + b_0 x) = 0 \qquad (33)$$

verwandeln, so dass es sich nunmehr bloss um die Integration der beiden letzteren handelt. Wir wollen die (33) zuerst vornehmen und haben in derselben:

$$U_0 = a_1 u + a_0,$$
$$U_1 = u^2 + b_1 u + b_0, \qquad (34)$$
$$\int \frac{U_0}{U_1} du = \int \frac{a_1 u + a_0}{u^2 + b_1 u + b_0} du.$$

Nennen wir, um zu dem Werthe des letzten Integrales zu gelangen, $\alpha$ und $\beta$ die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 + b_1 u + b_0 = 0,$$

so wird sich der Bruch unter dem Integralzeichen in zwei Partialbrüche zerlegen lassen von der Form:

$$\frac{A}{u-\alpha} \text{ und } \frac{A'}{u-\beta},$$

und es wird

$$\int \frac{U_0}{U_1} du = A \log(u-\alpha) + A' \log(u-\beta) = \log\left[(u-\alpha)^A (u-\beta)^{A'}\right]; \qquad (35)$$

und die Stelle der Gleichung (30) vertritt jetzt folgende:

$$(u-\alpha)^A (u-\beta)^{A'} e^{ux} = 0. \qquad (36)$$

Hier können erstens die Exponenten $A$ und $A'$ reel und positiv, oder auch imaginär sein, so jedoch, dass ihre reellen Theile positiv ausfallen. Findet diess Statt, und ist noch überdiess $x$ selbst positiv, so wird man offenbar der Gleichung (36) Genüge leisten durch die Werthe

$$u = \alpha, \quad u = \beta, \quad u = -\infty; \qquad (37)$$

ist aber der Werth von $x$ negativ, durch folgende andere:

$$u = \alpha, \quad u = \beta, \quad u = +\infty. \qquad (38)$$

Es ist diess keinem Zweifel unterworfen, im Falle $A$ und $A'$ reel und positiv sein sollten; wenn jedoch $\alpha$ und $\beta$ zwei correspondirende imaginäre Wurzeln sind, die sich nur im Zeichen des mit $\sqrt{-1}$ verbundenen Gliedes unterscheiden, so werden auch $A$ und $A'$ eben solche zwei correspondirende imaginäre Ausdrücke:

$$A = C + D\sqrt{-1}, \quad A' = C - D\sqrt{-1}, \tag{39}$$

und es könnte ein Zweifel erhoben werden, ob

$$(u - \alpha)^{C+D\sqrt{-1}}$$

für $u = \alpha$ wirklich gleich Null sei. Man überzeugt sich indess hievon auf leichte Weise im Falle $C$ positiv ist, wenn man bedenkt, dass

$$0^C = 0, \quad 0^{D\sqrt{-1}} = (e^{-\infty})^{D\sqrt{-1}} = e^{-\infty D\sqrt{-1}} = \cos(\infty D) - \sqrt{-1}\,\sin(\infty D),$$

gleich einer endlichen imaginären Grösse sei, deren Modulus die Einheit nicht zu überschreiten vermag. Wir stossen hier gleich auf eine merkwürdige Erscheinung: wir sehen nämlich, dass das Integral der vorgelegten Differentialgleichung ein anderes sei, wenn der, der Variablen $x$ beigelegte Werth positiv ist, und wieder ein anderes, wenn derselbe negativ ausfällt; namentlich haben wir für positive $x$:

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{ux} \frac{(u-\alpha)^A (u-\beta)^{A'} du}{u^2 + b_1 u + b_0} + C_2 \int_\alpha^{-\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^A (u-\beta)^{A'} du}{u^2 + b_1 u + b_0},$$

oder, da

$$u^2 + b_1 u + b_0 = (u-\alpha)(u-\beta),$$

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{A'-1} du + C_2 \int_\alpha^{-\infty} e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{A'-1} du; \tag{40}$$

für negative Werthe von $x$ aber:

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{A'-1} du + C_2 \int_\beta^{\infty} e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u- \quad)^{A'-1} du. \tag{41}$$

Es ist wichtig hier noch die Bemerkung hinzuzufügen, dass, im Falle $\alpha$ und $\beta$ imaginär wären, etwa $\alpha = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ und somit $\beta = \lambda - \mu\sqrt{-1}$, man auch die Integrationsgrenze $\infty$ in den Formeln (40) und (41) umsetzen könnte in $\pm\infty(\lambda \pm \mu\sqrt{-1})$, nur wären dann die Zeichen so zu wählen, dass der reelle Theil der imaginären Grenze in der Gleichung (40) negativ, in der Gleichung (41) aber positiv ausfällt. Ferner wird man in diesem Falle, die in die letzteren Formeln eingehenden Ausdrücke, durch die Kunstgriffe der Umwandlung der Grenzen und der schicklichen Transformation, in ihre reellen und imaginären Bestandtheile zu zerlegen Sorge tragen, um die dem Auge missfälligen, die $\sqrt{-1}$ in sich schliessenden Formen zu vermeiden.

Nehmen wir jetzt einen zweiten möglichen Fall an, den nämlich wo einer der Exponenten $A$ und $A'$ positiv, der andere negativ ist, und setzen wir, um diese Beschaffenheit derselben ins Auge fallen zu lassen, $-A'$ anstatt $A'$, so erhalten wir anstatt der Gleichung (36) folgende andere:

$$\frac{(u-\alpha)^{A}}{(u-\beta)^{A'}}\, e^{ux} = 0, \tag{42}$$

deren Wurzeln für positive $x$ sind:

$$u = \alpha, \quad u = -\infty, \quad u = \pm\infty\sqrt{-1}. \tag{43}$$

Die ersten beiden Werthe von $u$ leisten der (42) immer Genüge; der dritte aber nur dann, wenn $A' > A$ ist. Übrigens sind hier $A$ und $A'$, so wie $\alpha$ und $\beta$, immer reell, der Natur der Sache nach, weil, wenn sie imaginäre Grössen wären, sie einander correspondiren müssten, und sich bloss im Zeichen von $\sqrt{-1}$ unterscheiden könnten, man also nicht leicht von einem positiven $A$ und negativen $A'$ sprechen könnte, es sei denn, dass $A$ die Form $B\sqrt{-1}$ und $A'$ die verwandte $-B\sqrt{-1}$ annähme, in welchem letzteren Falle der dritte der in (43) aufgezeichneten Werthe von $u$ gänzlich wegzufallen hat, gerade so wie derselbe auch wegfällt, wenn $A > A'$ ist; für negative $x$ hingegen bekömmt die Gleichung (42) die Wurzeln

$$u = \alpha, \quad u = +\infty, \quad u = \pm\infty\sqrt{-1};$$

die letztere derselben in der Voraussetzung, dass $A' > A$ ist. Das Integral der vorgelegten Differentialgleichung erscheint nun abermals in zwei verschiedenen, der positiven und negativen Beschaffenheit der Variablen $x$ entsprechenden Formen, nämlich:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{-\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1}\,du}{(u-\beta)^{A'+1}} + C_2 \int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1}\,du}{(u-\beta)^{A'+1}}, \tag{44}$$

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{+\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1}\,du}{(u-\beta)^{A'+1}} + C_2 \int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1}\,du}{(u-\beta)^{A'+1}}. \tag{45}$$

Die erste dieser Formeln gilt für positive, die zweite für negative Werthe von $x$. In beiden muss der zweite mit der Constanten $C_2$ verbundene Theil weggelassen werden, wenn entweder $A = A'$ oder $A > A'$ ist; der sodann übrig bleibende, nur mit einer einzigen Constanten $C_1$ verbundene Werth von $y$, hat den Charakter eines allgemeinen Integrales verloren, und muss durch den Zusatz eines andern particulären Integrales, welches eine zweite Constante in sich schliesst, vervollständigt werden. Wir verweisen jedoch in Betreff der Methode dieses zu leisten, wie schon gesagt wurde, auf den folgenden Paragraph.

Betrachten wir jetzt den dritten Fall, wo $A$ und $A'$ negative oder imaginäre Zahlen sind, deren reelle Theile negative Werthe haben. Verwandeln wir, um diess dem Auge ersichtlich zu machen, $A$ und $A'$, in $-A$ und $-A'$, so dass die Gleichung (36) jetzt in

$$\frac{e^{ux}}{(u-\alpha)^{A}(u-\beta)^{A'}} = 0 \tag{46}$$

übergeht und erfüllt wird durch einen jeden, für $u$ gesetzten Ausdruck von der Form

$$u = \infty\,(M + N\sqrt{-1}),$$

unter $N$ eine beliebige positive oder negative, unter $M$ aber eine andere dem numerischen Werthe nach ebenfalls willkürliche, dem Zeichen nach aber der Variablen $x$ entgegengesetzte Zahl verstanden, die, wenn man will, auch gleich Null sein kann, so dass es gestattet ist für $u$ folgende zwei Werthe anzunehmen:

$$u = \infty\sqrt{-1}\,, \quad u = -\infty\sqrt{-1}.$$

Hieraus folgt der Werth von $y$:

$$y = C_1 \int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} \frac{e^{ux}\,du}{(u-\alpha)^{A+1}(u-\beta)^{A'+1}}, \tag{47}$$

mit einer einzigen Constanten $C_1$, der also abermals ein unvollständiges particuläres Integral ist, auf welches wir im folgenden Paragraphe zurückkommen werden.

Ein vierter Fall ist, wo einer der beiden Exponenten $A$ und $A'$ der Nulle gleich wird. In diesem Falle geht die Gleichung (36) über in:

$$(u-\alpha)^{A}\,e^{ux} = 0 \tag{48}$$

und kann nunmehr durch die Werthe:

$$= \alpha, \quad u = -\infty$$

erfüllt werden, wenn $A$ und $x$ positiv sind; ist aber $A$ positiv und $x$ negativ, durch die anderen:

$$u = \alpha, \quad u = +\infty;$$

für negative Werthe von $A$ aber durch:

$$u = \pm\infty\sqrt{-1}.$$

In allen diesen Fällen erhalten wir aber nur ein einziges particuläres Integral, das nur mit Einer Constanten verknüpft ist. Zugleich kann hier bemerkt werden, dass das Verschwinden der dritten Wurzel

der Gleichung (36), die wir hier gebraucht hätten, um zum vollständigen Integral zu gelangen, dadurch veranlasst werde, dass in dem Bruche:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{a_1 u + a_0}{u^2 + b_1 u + b_0}, \tag{49}$$

Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $u - \beta$ bekommen.

Endlich ist noch der Fall zn betrachten, wo die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$u^2 + b_1 u + b_0 = 0$$

einander gleich sind. Der Bruch (49) wird dann in zwei Partialbrüche zerlegt von der Form:

$$\frac{A}{(u-\alpha)^2} \quad \text{und} \quad \frac{A'}{u-\alpha}.$$

Es wird ferner

$$\int \frac{U_0}{U_1}\, du = \int \frac{A\,du}{(u-\alpha)^2} + \int \frac{A'\,du}{u-\alpha} = \frac{-A}{u-\alpha} + A' \log\,(u-\alpha), \tag{50}$$

und wir erhalten statt der Gleichung (36), folgende:

$$(u-\alpha)^{A'}\, e^{ux - \frac{A}{u-\alpha}} = 0; \tag{51}$$

und dieser wird für verschiedene Werthe von $A$, $A'$, $\alpha$ und $x$ auf verschiedene Weise Genüge geleistet. So haben wir, wenn alle diese Grössen bis auf $x$ positiv wären,

$$u = \alpha + \varepsilon, \quad u = \infty,$$

unter $\varepsilon$ eine verschwindende Grösse von positivem Werth verstanden. Diess führt abermals zu einem Integral mit einer einzigen willkürlichen Constanten, nämlich:

$$y = C_1 \int_{\alpha+\varepsilon}^{+\infty} e^{ux - \frac{A}{u-\alpha}} (u-\alpha)^{A'-2}\, du, \tag{52}$$

und wir sehen, dass in sehr vielen Fällen das Integral, zu welchem wir durch diese Methode gelangen, ein unvollständiges sei. Die Ursache hiervon ist: weil die Differentialgleichung in solchen Fällen particuläre Werthe zulässt, die nicht unter die ihnen vorausgesetzte Form eines bestimmten Integrales fallen, sondern entweder die Form einer reinen oder, mit einer algebraischen Function von $x$ multiplizirten Exponentiellen haben, wie demnächst gezeigt werden soll.

Ein specielleres Beispiel bietet die, in vielen Disquisitionen der mathematischen Physik wiederkehrende, der Form nach hieher gehörige Gleichung:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}\pm b^2xy=0, \tag{53}$$

die wir desshalb zu integriren nicht unterlassen wollen.

Wir haben in derselben:

$$U_0=au,$$
$$U_1=u^2\pm b^2,$$
$$\int\frac{U_0}{U_1}du=a\int\frac{udu}{u^2\pm b^2}=\frac{1}{2}a\log(u^2\pm b^2);$$

die Wurzeln aber der Gleichung:

$$e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}=(u^2\pm b^2)^{\frac{1}{2}a}e^{ux}=0, \tag{54}$$

sind entweder:

$$u=b,\quad u=-b,\quad u=-\infty, \tag{55}$$

wenn $x$ positiv ist, und man von den beiden Zeichen $\pm$ das untere wählt, oder:

$$u=b,\quad u=-b,\quad u=\infty, \tag{56}$$

für negative $x$.

Nimmt man im Gegentheile von den beiden Zeichen $\pm$ das obere an, so erhält man für positive $x$:

$$u=+b\sqrt{-1},\quad u=-b\sqrt{-1},\quad u=-\infty, \tag{57}$$

für negative $x$:

$$u=+b\sqrt{-1},\quad u=-b\sqrt{-1},\quad u=\infty, \tag{58}$$

Es besitzt somit die Gleichung:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}-b^2xy=0$$

ein allgemeines mit zwei Constanten versehenes Integral, das für positive $x$ gegeben wird durch die Formel:

$$y=C_1\int_{-b}^{+b}(u^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1}e^{ux}du+C_2\int_{-\infty}^{-b}(u^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1}e^{ux}du, \tag{59}$$

für negative Werthe von $x$ aber durch folgende andere:

$$y=C_1\int_{-b}^{+b}(u^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1}e^{ux}du+C_2\int_{b}^{\infty}(u^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1}e^{ux}du; \tag{60}$$

auch sieht man ohne Schwierigkeit ein, dass diese beiden Formeln sich in eine einzige, für positive und negative $x$ giltige, zusammenziehen lassen, nämlich:

$$y = C_1 \int_{-b}^{+b} (u^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1}\, e^{ux}\, du + C_2 \int_{b}^{\infty} (u^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1}\, e^{-u\sqrt{x^2}}\, du. \tag{61}$$

Hingegen entspricht der Gleichung:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + b^2 xy = 0,$$

für positive $x$, folgendes Integral:

$$y = C_1 \int_0^{b\sqrt{-1}} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du + C_2 \int_0^{-b\sqrt{-1}} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du + C_3 \int_0^{-\infty} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du, \tag{62}$$

für negative $x$ folgendes andere:

$$y = C_1 \int_0^{b\sqrt{-1}} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du + C_2 \int_0^{-b\sqrt{-1}} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du + C_3 \int_0^{+\infty} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du, \tag{63}$$

während die Constanten der Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0 \tag{64}$$

unterworfen sind.

Das bestimmte Integral:

$$\int_0^{b\sqrt{-1}} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1}\, e^{ux}\, du$$

wird, wenn man $u\sqrt{-1}$ anstatt $u$ einführt, umgewandelt in:

$$+ \int_0^{b} (b^2 - u^2)^{\frac{a}{2}-1}\, e^{ux\sqrt{-1}}\, du\, \sqrt{-1};$$

ebenso verwandelt sich:

$$\int_0^{-b\sqrt{-1}} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1}\, e^{ux}\, du,$$

durch Einführung von $-u\sqrt{-1}$ anstatt $u$, in:

$$- \int_0^{b} (b^2 - u^2)^{\frac{a}{2}-1}\, e^{-ux\sqrt{-1}}\, du\, \sqrt{-1},$$

und die Summe:

$$C_1 \int_0^{b\sqrt{-1}} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1}\, e^{ux}\, du + C_2 \int_0^{-b\sqrt{-1}} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1}\, e^{ux}\, du,$$

wenn man

$$C_1 = -\frac{1}{2}(B_1 + B_2\sqrt{-1}), \quad C_2 = -\frac{1}{2}(B_1 - B_2\sqrt{-1})$$

setzt, geht über in:

$$B_1\int_0^b (b^2 - u^2)^{\frac{a}{2}-1} \sin uxdu + B_2\int_0^b (b^2 - u^2)^{\frac{a}{2}-1} \cos uxdu;$$

daher sich denn die Formeln (62) und (63) auch so schreiben lassen:

$$y = \int_0^b (b^2 - u^2)^{\frac{a}{2}-1}[B_1 \sin ux + B_2 \cos ux]\,du + C_2\int_0^{-\infty}(u^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux}\,du, \tag{65}$$

$$y = \int_0^b (b^2 - u^2)^{\frac{a}{2}-1}[B_1 \sin ux + B_2 \cos ux]\,du + C_1\int_0^{\infty}(u^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux}\,du. \tag{66}$$

Von diesen gilt die erste für positive, die zweite für negative $x$. Die Constanten $B_1$ und $C_2$ sind durch die Bedingungsgleichung:

$$B_1 - C_2 = 0$$

aneinander geknüpft; $B_2$ ist ganz willkürlich.

Die Gleichung (53) wird also nach unserer Methode stets vollständig integrirt, wenigstens so lange der Coefficient $a$ nicht 0 und nicht negativ ist, und selbst in dem letztgenannten Falle wissen wir uns das allgemeine Integral, welches dann unter einer andern Form vorkommt als die vorausgesetzte, ohne bedeutende Schwierigkeit zu verschaffen.

Um so viel als möglich alle die verschiedenen Fälle zu erschöpfen, und alle Schwierigkeiten kennen zu lernen, die der Anwendung unserer Integrationsmethode sich in den Weg stellen können, wollen wir die bisher noch ausser Acht gelassene Gleichung (32):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b_1 x\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)\,y = 0$$

einer ähnlichen Untersuchung unterwerfen. Wir haben in derselben:

$$U_0 = u^2 + a_0,$$
$$U_1 = b_1 u + b_0,$$

$$\int\frac{U_0}{U_1}du = \int\frac{u^2+a_0}{b_1 u+b_0}du = \frac{u^2}{2b_1} - \frac{b_0 u}{b_1^2} + \left(\frac{a_0}{b_1} + \frac{b_0^2}{b_1^3}\right)\log(b_1 u + b_0), \tag{67}$$

und die Gleichung:

$$e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du} = 0$$

geht, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{a_0}{b_1} + \frac{b_0^2}{b_1^2} = A$$

setzen, über in:

$$(b_1 u + b_0)^A \, e^{ux + \frac{u^2}{2b_1} - \frac{b_0 u}{b_1^2}} = 0. \tag{68}$$

Ist $A$ positiv, so sind die Wurzeln dieser Gleichung für positive $b_1$:

$$u = -\frac{b_0}{b_1}, \qquad u = \pm \infty \sqrt{-1},$$

für negative $b_1$ aber:

$$u = -\frac{b_0}{b_1}, \qquad u = \pm \infty$$

und das zwar ob $x$ positiv oder negativ ist.

Wir erhalten somit ein allgemeines Integral, das für positive $b_1$ folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} y = \quad & C_1 \int_0^{-\frac{b_0}{b_1}} (b_1 u + b_0)^{A-1} \, e^{u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right) + \frac{u^2}{2b_1}} du + \\ & + C_2 \int_0^{\infty\sqrt{-1}} (b_1 u + b_0)^{A-1} \, e^{u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right) + \frac{u^2}{2b_1}} du + \\ & + C_3 \int_0^{-\infty\sqrt{-1}} (b_1 u + b_0)^{A-1} \, e^{u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right) + \frac{u^2}{2b_1}} du. \end{aligned} \tag{69}$$

Zwischen den Constanten $C_1$, $C_2$, $C_3$ findet die Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

statt. Die letzten zwei in der Formel (69) vorkommenden bestimmten Integrale wandeln wir, durch Einführung von $u\sqrt{-1}$ und $-u\sqrt{-1}$ anstatt $u$ um, und bemerken zudem, dass, in Folge der zwei identischen Gleichungen:

$$(b_0 \pm b_1 u \sqrt{-1})^{A-1} = (b_0^2 + b_1^2 u^2)^{\frac{A-1}{2}} \left[ \cos\left((A-1)\, arc\, tg. \frac{b_1 u}{b_0}\right) \pm \sqrt{-1} \sin\left((A-1)\, arc\, tg. \frac{b_1 u}{b_0}\right)\right], \tag{70}$$

$$e^{\pm u\sqrt{-1}\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} = \cos u \left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right) \pm \sqrt{-1} \sin u \left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right) \tag{71}$$

und der noch überdiess willkürlich hinzugefügten:

$$2\,C_2 = B_1 - B_2 \sqrt{-1}, \quad 2\,C_3 = B_1 + B_2 \sqrt{-1},$$

die Formel (69) auch so geschrieben werden kann:

$$y = C_1 \int_0^{-\frac{b_0}{b_1}} (b_0 + b_1 u)^{A-1} e^{\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} du +$$

$$(72) \quad + B_2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2b_1}} (b_0^2 + b_1^2 u^2)^{\frac{A-1}{2}} \cos\left[u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right) + (A-1) \operatorname{arc\,tang} \frac{b_1 u}{b_0}\right] du -$$

$$- B_1 \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2b_1}} (b_0^2 + b_1^2 u^2)^{\frac{A-1}{2}} \sin\left[u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right) + (A-1) \operatorname{arc\,tang} \frac{b_1 u}{b_0}\right] du.$$

Die Constanten $B_1$ und $C_1$ müssen so gewählt werden, dass $B_1 + C_1 = 0$ wird; $B_2$ ist willkürlich.

Für den Fall, dass $b_1$ negativ ist, hat an die Stelle der Formel (69) oder (72) folgende andere zu treten:

$$(73) \quad y = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{b_0}{b_1}} (b_0 - b_1 u)^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} du + C_2 \int_{\frac{b_0}{b_1}}^{+\infty} (b_0 - b_1 u)^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} du.$$

Wir haben hier $b_1$ in $-b_1$ umgesetzt, um die negative Beschaffenheit dieses Coefficienten dem Auge ersichtlich zu machen.

Die Formeln (72) und (73) setzen beide ein positives $A$ voraus, und gelten nicht mehr, wenn dieser Exponent 0 wird oder negativ. Ersteres tritt ein, wenn Zähler und Nenner des Bruches $\frac{U_0}{U_1}$ einen gemeinschaftlichen Factor besitzen, ein Fall, der das nach unserer Methode gefundene Integral immer unvollständig macht. Wir haben in der That für verschwindende und negative $A$ anstatt dreier, nur mehr zwei der Gleichung (68) genügende Werthe, nämlich: $u = \pm \infty \sqrt{-1}$, für positive $b_1$, und $u = \pm \infty$ für negative Werthe dieses Coefficienten, und somit für positive $b_1$ folgendes particuläre Integral:

$$(74) \quad y = C_1 \int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} \frac{du}{(b_0 + b_1 u)^{A+1}},$$

für negative $b_1$ hingegen:

$$(75) \quad y = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} \frac{du}{(b_0 - b_1 u)^{A+1}}.$$

Wir haben in der ersten dieser beiden Gleichungen $-A$ anstatt $A$, in der zweiten aber $-A$ und $-b_1$ anstatt $A$ und $b_1$ gesetzt, um die negative Beschaffenheit dieser Grössen auffallend zu machen.

Wir werden im folgenden Paragraphe auf diese Formeln zurückkommen und sehen, wie die hier gewonnenen unvollständigen Integrale sich vervollständigen lassen, wo wir auch die Überzeugung gewinnen werden, dass die anscheinende Unzulänglichkeit unserer Methode, weit entfernt eine Unvollkommenheit zu sein, sich vielmehr in einen Vortheil umgestaltet, so wie sich überhaupt in sehr vielen Zweigen der mathematischen Analysis die Bemerkung machen lässt, dass eine überwundene Schwierigkeit, nebst dem durch Überwindung derselben errungenen Vortheil, auch noch meistentheils den anderen darbiete, neue Wege zu eröffnen, und oft neue Entdeckungen zu veranlassen.

Kommt endlich der bisher noch nicht betrachtete specielle Fall vor, wo $b_1 = 0$ ist, dann wird das Integral:

$$\int \frac{U_0}{U_1}\, du$$

nicht mehr den durch die Formel (67) dargestellten Werth besitzen, sondern folgenden anderen:

$$\int \frac{U_0}{U_1}\, du = \int \frac{u^2 + a_0}{b_0}\, du = \frac{u^3}{3b_0} + \frac{a_0}{b_0}\, u. \tag{76}$$

An die Stelle der Gleichung (68) aber tritt:

$$e^{ux + \frac{u^3}{3b_0} + \frac{a_0}{b_0} u} = 0; \tag{77}$$

dieser wird durch alle jene Werthe von $u$ Genüge geleistet, die die Gleichung:

$$\frac{u^3}{b_0} = -\infty$$

erfüllen; die Wurzeln aber dieser letzteren sind für positive $b_0$:

$$u = -\infty, \quad u = \infty\,(-1 + \sqrt{-3}) \quad \text{und} \quad u = \infty\,(-1 - \sqrt{-3}).$$

Es kommt also das Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\,(a_0 + b_0 x) = 0, \tag{78}$$

in folgender Form vor:

$$y = C_1 \int_0^{-\infty} e^{u\left(x + \frac{a_0}{b_0}\right) + \frac{u^3}{3b_0}}\, du + C_2 \int_0^{\infty(-1+\sqrt{-3})} e^{u\left(x + \frac{a_0}{b_0}\right) + \frac{u^3}{3b_0}}\, du + \\ + C_3 \int_0^{\infty(-1-\sqrt{-3})} e^{u\left(x + \frac{a_0}{b_0}\right) + \frac{u^3}{3b_0}}\, du, \tag{79}$$

in der die Constanten $C_1$, $C_2$, $C_3$ der Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

unterworfen gedacht werden.

Von den drei bestimmten Integralen, die den zweiten Theil der Gleichung (79) bilden, formen wir das erste durch Substitution von $-u$ anstatt $u$, das zweite durch Setzen von $u(-1+\sqrt{-3})$ anstatt $u$, das dritte durch Setzen von $u(-1-\sqrt{-3})$ anstatt $u$ um, und bezeichnen der Kürze wegen die beiden imaginären Binome $-1+\sqrt{-3}$ und $-1-\sqrt{-3}$ durch $r_1$ und $r_2$ und erhalten anstatt (79):

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3b_0}} du \left[ -C_1 e^{-u\left(x+\frac{a_0}{b_0}\right)} + C_2 r_1 e^{r_1 u\left(x+\frac{a_0}{b_0}\right)} + C_3 r_2 e^{r_2 u\left(x+\frac{a_0}{b_0}\right)} \right]. \tag{80}$$

Ist $b_0$ negativ, und handelt es sich also um die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y(a - b_0 x) = 0, \tag{81}$$

so erhält man genau auf dieselbe Weise:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3b_0}} du \left[ C_1 e^{u\left(x-\frac{a_0}{b_0}\right)} + C_2 r_1 e^{r_1 u\left(x-\frac{a_0}{b_0}\right)} + C_3 r_2 e^{r_2 u\left(x-\frac{a_0}{b_0}\right)} \right]; \tag{82}$$

es ist dann abermals:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

nur $r_1$ und $r_2$ bekommen eine etwas andere Bedeutung; sie gehen nämlich über in die zwei imaginären Wurzeln der Gleichung:

$$u^3 = 1.$$

Hiermit wären denn alle die Fälle erörtert, die bei der Integration einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung von der betrachteten Form vorkommen mögen, und es ist uns meistentheils gelungen, ein allgemeines Integral mit zwei Constanten aufzufinden; wo wir aber ein solches nicht fanden, bekamen wir wenigstens Ein particuläres mit einer einzigen Constante. Bevor wir nun zeigen, wie das letztere zu completiren sei, wird es gut sein, noch einige Beispiele der Integration solcher Gleichungen anzuführen, die die zweite Ordnung überschreiten.

## §. 3.

## Anwendung der vorgetragenen Integrationsmethode auf einige allgemeinere Beispiele.

Wir wollen jetzt zu einigen allgemeinen Differentialgleichungen der $n^{\text{ten}}$ Ordnung übergehen, unter $n$ eine beliebige ganze positive Zahl verstanden, und wollen namentlich zuvörderst folgende Differentialgleichung der Betrachtung unterwerfen, die schon Kummer in Crelles Journal durch Entwicklung des Integrales in Reihen zu behandeln versucht hat:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + axy = 0. \tag{83}$$

Hier ist:

$$U_0 = u^n, \quad U_1 = a,$$

$$\int \frac{U_0}{U_1} du = \frac{1}{a} \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{a(n+1)};$$

$$e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} = e^{ux + \frac{u^{n+1}}{a(n+1)}} = 0. \tag{84}$$

Dieser Gleichung genügen alle Werthe von $u$, die der Gleichung:

$$u^{n+1} = -\infty; \tag{85}$$

Genüge leisten, vorausgesetzt, dass $a$ positiv ist. Nennt man aber die Wurzeln der Gleichung:

$$u^{n+1} = -1$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots \mu_{n+1}$, so sind die Wurzeln der (85):

$$\mu_1 \infty, \quad \mu_2 \infty, \quad \mu_3 \infty, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mu_{n+1} \infty,$$

woraus schon das allgemeine Integral von (83) folgt, nämlich:

$$\begin{aligned} y = C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{ux + \frac{u^{n+1}}{a(n+1)}} du + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{ux + \frac{u^{n+1}}{a(n+1)}} du + C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{ux + \frac{u^{n+1}}{a(n+1)}} du + \ldots \\ + C_{n+1} \int_0^{\mu_{n+1} \infty} e^{ux + \frac{u^{n+1}}{a(n+1)}} du, \end{aligned} \tag{86}$$

während zwischen den Constanten die Bedingungsgleichung besteht:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots + C_{n+1} = 0.$$

Die $(n+1)$ bestimmten Integrale in der Formel (86) lassen sich in ein einziges zusammenziehen, wenn man in ihnen, der Reihe nach $\mu_1 u, \mu_2 u, \ldots\ldots \mu_{n+1} u$ anstatt $u$ einführt, und zugleich $\mu_1 C_1, \mu_2 C_2, \ldots\ldots \mu_{n+1} C_{n+1}$ durch die willkürlichen Constanten $B_1, B_2, \ldots\ldots B_{n+1}$ ersetzt wie folgt:

$$y = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^{n+1}}{a(n+1)}} du \left[ B_1 e^{\mu_1 ux} + B_2 e^{\mu_2 ux} + B_3 e^{\mu_3 ux} + \ldots\ldots + B_{n+1} e^{\mu_{n+1} ux} \right]. \tag{87}$$

Die zwischen den Constanten $B$ stattfindende Beziehung ist jetzt folgende:

$$\frac{B_1}{\mu_1} + \frac{B_2}{\mu_2} + \frac{B_3}{\mu_3} \ldots\ldots\ldots + \frac{B_{n+1}}{\mu_{n+1}} = 0.$$

Die Formel (87) gilt auch für negative Werthe von $a$; d. h. sie gibt auch das Integral der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} - axy = 0,$$

nur sind dann $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots \mu_{n+1}$ nicht die Wurzeln der Gleichung:

$$u^{n+1} = -1,$$

sondern vielmehr die der andern:

$$u^{n+1} = 1.$$

Wählen wir jetzt als zweites Beispiel folgende Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + (a_0 + b_0 x)\, y = 0, \tag{88}$$

in welcher die eben betrachtete (83) als ein specieller Fall enthalten ist, so bekommen wir:

$$U_0 = u^n + a_{n-1}u^{n-1} + a_{n-2}u^{n-2} + \ldots\ldots + a_0,$$

$$U_1 = b_0,$$

$$\int \frac{U_0}{U_1}du = \frac{1}{b_0}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1}u^n}{n} + \frac{a_{n-2}u^{n-1}}{n-1} + \ldots\ldots + a_0 u\right],$$

und anstatt der Gleichung:

$$e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1}du} = 0,$$

die folgende:

$$e^{ux + \frac{1}{b_0}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1}u^n}{n} + \frac{a_{n-2}u^{n-1}}{n-1} + \ldots\ldots + a_0 u\right]} = 0; \tag{89}$$

dieser aber wird Genüge geleistet durch alle jene Werthe von $u$, für welche

$$\frac{u^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{u^n}{n} + a_{n-2}\frac{u^{n-1}}{n-1} + \ldots\ldots + a_0 u = \mp\infty \tag{90}$$

ist, von der im zweiten Theile enthaltenen unendlichen Grösse das obere oder untere Zeichen genommen, je nachdem $b_0$ positiv ist oder negativ. Diese Werthe von $u$ können nur unendlich sein, es wird also das Gleichungspolynom in (90) mit seinem ersten Gliede zugleich unendlich, und zugleich positiv oder negativ. Hieraus folgt, dass man dieser Gleichung die einfachere:

$$u^{n+1} = \mp\infty \tag{91}$$

wird substituiren können. Setzen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, $b_0$ positiv, und nennen wir die Wurzeln der dieser Annahme entsprechenden Gleichung, die die (91), genommen mit dem obern der beiden Zeichen ist:

$$\mu_1\infty, \quad \mu_2\infty, \quad \mu_3\infty, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mu_{n+1}\infty,$$

so ist das gesuchte allgemeine Integral unserer Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
y = \quad & C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{ux + \frac{1}{b_0}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{u^n}{n} + \cdots\cdots + a_0 u\right]} du \; + \\
+\; & C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{ux + \frac{1}{b_0}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{u^n}{n} + \cdots\cdots + a_0 u\right]} du \; + \\
+\; & C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{ux + \frac{1}{b_0}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{u^n}{n} + \cdots\cdots + a_0 u\right]} du \; + \\
+\; & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \; + \\
+\; & C_{n+1} \int_0^{\mu_{n+1} \infty} e^{ux + \frac{1}{b_0}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{u^n}{n} + \cdots\cdots + a_0 u\right]} du.
\end{aligned}
\qquad (92)
$$

Die Constanten der Integration: $C_1, C_2, \ldots\ldots C_{n+1}$ sind an die Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \cdots\cdots + C_{n+1} = 0$$

gebunden. Die $n+1$ bestimmten Integrale, die in der Formel (92) enthalten sind, lassen sich in ein einziges zusammenziehen, indem dieselbe zunächst auch so geschrieben werden kann:

$$y = \mathop{\mathrm{S}}_1^{n+1} \left[ C_\alpha \int_0^{\mu_\alpha \infty} e^{ux + \frac{1}{b_0}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{u^n}{n} + \cdots\cdots + a_0 u\right]} du \right], \qquad (93)$$

das Summenzeichen auf die Zahl $\alpha$ bezogen. Nun setzen wir $\mu_\alpha u$ anstatt $u$, und formen so den letzten Ausdruck um in:

$$y = \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{u^{n+1}}{b_0(n+1)}} du \mathop{\mathrm{S}}_1^{n+1} \left[ \mu_\alpha C_\alpha e^{\mu_\alpha ux + \frac{1}{b_0}\left[a_{n-1}\frac{\mu_\alpha^n u^n}{n} + \cdots\cdots + a_0 \mu_\alpha u\right]} \right] \right\}. \qquad (94)$$

Dieselbe Formel gilt auch für negative $b_0$, und bietet somit das Integral der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + (a_0 - b_0 x) y = 0,$$

wenn man nur unter $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots \mu_{n+1}$ nicht mehr die Wurzeln der Gleichung $u^{n+1} = -1$, sondern vielmehr die der andern: $u^{n+1} = 1$ versteht.

Wählen wir zuletzt als Beispiel noch eine Gleichung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, bei welcher unsere Methode die mindeste Wirksamkeit besitzt, weil wir mittelst derselben nur ein particuläres Integral, mit 2 oder 3 Constanten weniger als nöthig ist, und als die Ordnungszahl der Gleichung Einheiten in sich enthält, erhalten; nämlich:

$$x \frac{d^n y}{dx^n} \pm a^2 y = 0, \qquad (95)$$

Es ist hier:

$$U_0 = \pm a^2, \qquad U_1 = u^n, \quad \int \frac{U_0}{U_1}\, du = \pm a^2 \int \frac{du}{u^n} = \mp \frac{a^2}{(n-1)\, u^{n-1}},$$

und die Gleichung zur Bestimmung der Grenzen:

$$e^{ux \mp \frac{a^2}{(n-1)\, u^{n-1}}} = 0,$$

welche letztere, wenn $u = \frac{1}{v}$ gesetzt wird, übergeht in:

$$e^{\frac{x}{v} \mp \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} = 0. \tag{96}$$

Betrachten wir hier zuerst den Fall, wo $x$ positiv ist, und von den beiden Zeichen $\mp$ das untere gilt. Die Wurzeln der letzten Gleichung sind dann alle diejenigen Werthe von $v$, die eine der beiden folgenden Gleichungen erfüllen:

$$v = -\varepsilon, \quad v^{n-1} = -\infty,$$

unter $\varepsilon$ eine ins Unendliche abnehmende, entweder reelle positive oder solche imaginäre Zahl verstanden, deren reeller Theil positiv ist. Bezeichnen wir jetzt die Wurzeln der Gleichung $v^{n-1} = -1$, mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots \mu_{n-1}$, so sind die der Gleichung $v^{n-1} = -\infty$:

$$\mu_1 \infty, \quad \mu_2 \infty, \quad \mu_3 \infty, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mu_{n-1} \infty.$$

Unter ihnen wird es reelle negative oder solche imaginäre geben, deren reeller Theil negativ ist, und andere reelle positive oder solche imaginäre, deren reeller Theil positiv ist; man sondere sie von einander, so, dass man zwei Abtheilungen von Wurzeln bekömmt, und wir wollen voraussetzen, dass $\mu_1 \infty, \mu_2 \infty, \ldots\ldots \mu_r \infty$ die der ersten Abtheilung, $\mu_{r+1} \infty, \mu_{r+2} \infty, \ldots\ldots \mu_{n-1} \infty$ die der zweiten Abtheilung angehörenden seien, den speciellen Fall einstweilen ausser Acht gelassen, wo unter den besprochenen Wurzeln ein Paar rein imaginäre: $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ vorkommen.

Es bieten sich uns unter diesen Voraussetzungen vor der Hand $r$ particuläre Integrale an, die, je mit einer willkürlichen Constante multiplizirt und addirt, für $y$ folgenden Ausdruck liefern, der, wie schon gesagt, bloss für positive $x$ giltig ist:

$$\begin{aligned} y = {} & C_1 \int_{\mu_1 \varepsilon}^{\mu_1 \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}}\, v^{n-2}\, dv + C_2 \int_{\mu_2 \varepsilon}^{\mu_2 \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}}\, v^{n-2}\, dv + \ldots\ldots \\ & + C_r \int_{\mu_r \varepsilon}^{\mu_r \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}}\, v^{n-2}\, dv, \end{aligned} \tag{97}$$

und dessen einzelne Theile, durch bezügliche Veränderung der Variablen $v$ in $\mu_1 v$, $\mu_2 v$, ... $\mu_r v$, verwandelt werden können, so dass man erhält:

$$y = -\int_0^\infty e^{-\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\, dv \left(C_1 e^{\frac{x}{\mu_1 v}} + C_2 e^{\frac{x}{\mu_2 v}} + \dots\dots + C_r e^{\frac{x}{\mu_r v}}\right). \tag{98}$$

Dieses innerhalb der Grenzen 0 und $\infty$ genommene Integral muss hier als die Grenze angesehen werden, der sich das innerhalb der Grenzen $\varepsilon$ und $\infty$ genommene fortwährend nähert, bei dem Convergiren von $\varepsilon$ gegen die Nulle.

An die Stelle der Formel (97) hat, wenn $x$ nicht positiv, sondern negativ wäre, offenbar folgende andere zu treten:

$$\begin{aligned} y = C_{r+1}\int_{\mu_{r+1}\varepsilon}^{\mu_{r+1}\infty} e^{\frac{x}{v}+\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\, dv + C_{r+2}\int_{\mu_{r+2}\varepsilon}^{\mu_{r+2}\infty} e^{\frac{x}{v}+\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\, dv + \dots\dots \\ + C_{n-1}\int_{\mu_{n-1}\varepsilon}^{\mu_{n-1}\infty} e^{\frac{x}{v}+\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\, dv, \end{aligned} \tag{99}$$

oder, nach vorhergegangener ähnlicher Reduction, wie die eben angewendete:

$$y = -\int_0^\infty e^{-\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\, dv \left(C_{r+1} e^{\frac{x}{\mu_{r+1} v}} + C_{r+2} e^{\frac{x}{\mu_{r+2} v}} + \dots\dots + C_{n-1} e^{\frac{x}{\mu_{n-1} v}}\right). \tag{100}$$

Wir haben bisher nur von einem Theil der Wurzeln der Gleichung $v^{n-1} = -1$ Gebrauch zu machen vermocht; die übrigen bieten bei ihrer Erscheinung als Grenzen der Integration entweder den Nachtheil, dass die Function unter dem Integralzeichen innerhalb der Grenzen durch Unendlich durchgeht, das Integral selbst also in eine Form übergeht, die etwas Analoges mit einer divergirenden Reihe hat, oder es werden gar beide Grenzen unendlich, und das bestimmte Integral der Nulle gleich.

Gleiches widerfährt uns in dem zweiten, bisher noch nicht betrachteten Falle, wo von den beiden Zeichen $\mp$ in (96) das obere zu gelten hat, d. h. wo:

$$x\frac{d^n y}{dx^n} + a^2 y = 0,$$

die zu integrirende Gleichung ist. Sind nämlich $\mu_1$, $\mu_2$, ... $\mu_r$ und $\mu_{r+1}$, $\mu_{r+2}$, ... $\mu_{n-1}$, die Wurzeln der Gleichung $v^{n-1} = 1$ bereits in zwei Abtheilungen zerlegt, deren erste diejenigen begreift, die reelle negative, die zweite diejenigen, die reelle positive Bestandtheile besitzen, so haben wir für positive $x$ eine Formel für $y$, die der Form nach mit der (98), und für negative $x$ eine andere zu erwarten, die wieder der Form nach mit der (100) übereinstimmt.

Kommen endlich unter den mit $\mu$ bezeichneten Wurzeln die rein imaginären: $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ vor, so entspricht ihnen ein einziges particuläres Integral von der Form:

$$y = C\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\frac{x}{v}+\frac{a^2v^{n-1}}{n-1}}\, v^{n-2}\, dv,$$

die man durch Umwandlung von $v$ in $v\sqrt{-1}$ umsetzen kann, in:

$$y = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x\sqrt{-1}}{v}-\frac{a^2v^{n-1}}{n-1}}\, v^{n-2}\, dv,$$

und dieses particuläre Integral ist dann zu den übrigen in die Formeln (98) und (100) eingehenden, noch hinzuzufügen.

Gehen wir von dem behandelten allgemeinen, zu dem specielleren Beispiele der Gleichung der dritten Ordnung über:

$$x\frac{d^3y}{dx^3} - y = 0, \tag{101}$$

so erhalten wir an die Stelle der (96):

$$e^{\frac{x}{v}+\frac{1}{2}v^2} = 0, \tag{102}$$

und somit:

$$v = \pm\infty\sqrt{-1};$$

diess gibt ein particuläres Integral mit einer einzigen Constante:

$$y = C\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\frac{x}{v}+\frac{1}{2}v^2}\, v\, dv,$$

oder durch Umänderung von $v$ in $v\sqrt{-1}$:

$$y = -C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x\sqrt{-1}}{v}-\frac{1}{2}v^2}\, v\, dv.$$

Da hier:

$$e^{-\frac{x\sqrt{-1}}{v}} = \cos\frac{x}{v} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{x}{v}$$

ist, so lässt sich dieses Integral in zwei zerlegen, von welchen das erste, mit dem $\cos\frac{x}{v}$ verknüpfte, identisch Null, das andere aber aus zwei gleichen Theilen zusammengesetzt ist: dem zwischen den Grenzen $-\infty$ und 0 und dem zwischen 0 und $\infty$ genommenen, so, dass der Werth von $y$ auch folgendermassen wiedergegeben werden kann:

$$y = B\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} \sin\frac{x}{v}\, v\, dv. \tag{103}$$

Hätten wir aber anstatt (101) folgende andere Gleichung der dritten Ordnung:

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + y = 0, \tag{104}$$

zu integriren, so bekämen wir:

$$e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{2} v^2} = 0,$$

somit:

$$v = \pm \infty,$$

und somit entweder:

$$y = C \int_0^{-\infty} e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{2} v^2} v \, dv,$$

oder:

$$y = C \int_0^{+\infty} e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{2} v^2} v \, dv,$$

je nachdem $x$ positiv ist oder negativ, so dass man allgemein für beliebige $x$ schreiben könnte:

$$y = C \int_0^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{x^2}}{v} - \frac{1}{2} v^2} v \, dv. \tag{105}$$

In jedem Falle haben wir von einer derlei Gleichung der dritten Ordnung auf dem hier betretenen Wege nur ein particuläres Integral mit einer einzigen Constante gewonnen, welches noch durch einen Zusatz zu vervollständigen sein wird, der zwei willkürliche Constanten enthalten muss.

Noch ungünstiger ist das Resultat, dem wir bei folgender Gleichung der fünften Ordnung begegnen:

$$x \frac{d^5 y}{dy^5} + y = 0. \tag{106}$$

Hier wird zuvörderst:

$$e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{4} v^4} = 0,$$

und somit:

$$v = \pm \infty \text{ oder } v = \pm \infty \sqrt{-1},$$

also für positive oder negative $x$:

$$y = C_1 \int_0^{-\infty} e^{\frac{\sqrt{x^2}}{v} - \frac{1}{4} v^4} v^3 \, dv + C_2 \int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{4} v^4} v^3 \, dv, \tag{107}$$

also nur ein Integral mit zwei Constanten, das einer Vervollständigung bedürftig ist, die drei andere in sich begreifen muss.

## §. 4.

## Betrachtung derjenigen Fälle, in welchen die vorgetragene Integrationsmethode nur unvollständige Integrale liefert, und Vervollständigung derselben.

Der Weg, den wir zur Integration von solchen Differentialgleichungen eingeschlagen haben, deren Coefficienten lineare Functionen der unabhängigen Variablen sind, ist im Wesentlichen folgender: Wir setzen das gesuchte Integral voraus unter der Form:

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{ux} V du, \tag{108}$$

und erhalten nach gehöriger Rechnung:

$$V = \frac{C}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}, \tag{109}$$

und zur Bestimmung der Grenzen:

$$\left\{ C e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \right\}_{u'}^{u''} = 0. \tag{110}$$

Nun kann offenbar nur dann von einer Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung ein allgemeines Integral mit $n$ Constanten gefunden werden, wenn die Gleichung (110), oder die gewöhnlich an ihre Stelle tretende:

$$e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} = 0 \tag{111}$$

Wurzeln zulässt, $n+1$ an der Zahl, zwischen welchen $n$ Intervalle vorhanden sind, die sich zu Intervallen der Integration machen lassen, was dann zu $n$ particulären Werthen führt. Wir werden also jedesmal ein unvollständiges Integral erlangen:

1. wenn die Anzahl $n+1$ der Wurzeln der Gleichung (111) durch was immer für einen Umstand, der einige derselben wegfallen macht, verringert wird, und
2. wenn unter den particulären Integralen, die man sich verschafft hat, einige entweder identisch gleich Null, oder von den übrigen nicht verschieden sind, oder unter Formen erscheinen, welche eine Analogie mit der Form einer divergirenden Reihe haben, was z. B. dann der Fall ist, wenn die Function unter dem Integralzeichen innerhalb der Integrationsgrenzen durch Unendlich hindurchgeht.

Verfolgen wir jetzt die Fälle, in welchen einige der Wurzeln der Gleichung (111) wegfallen. Offenbar kommt hier alles an auf die Form, in welcher das Integral:

$$\int \frac{U_0}{U_1}\, du \tag{112}$$

erscheint, und man verfährt bekanntlich bei der Berechnung desselben auf folgende Weise: Der Bruch $\frac{U_0}{U_1}$ wird, falls er ein unechter sein sollte, zerlegt in eine ganze Function und in einen echten Bruch; diess gibt die Form:

$$\frac{U_0}{U_1} = L + \frac{M}{U_1},$$

und es ist $L$ ein Polynom vom $r^{\text{ten}}$ Grade, wenn $U_1$ vom Grade $n-r$ ist. Jetzt zerlegt man $U_1$ in Factoren, die entweder einfach oder wiederholt vorhanden sein können, und den echten Bruch $\frac{M}{U_1}$ in Partialbrüche, multiplizirt mit $du$ und integrirt, wobei man offenbar nur mit Formen zu thun hat, wie:

$$\int L\, du, \quad \int \frac{A\, du}{u-\alpha}, \quad \int \frac{A'\, du}{(u-\alpha)^m}. \tag{113}$$

Der erste dieser Ausdrücke ist eine ganze Function $N$ vom Grade $r+1$, der zweite ein Logarithmus von $u-\alpha$, der dritte ein algebraischer Bruch. Es geht hieraus hervor, dass die Gleichung (111) jederzeit folgende Gestalt annehmen wird:

$$\frac{(u-\alpha_1)^{A_1}\,(u-\alpha_2)^{A_2}\,\ldots}{(u-\beta_1)^{B_1}\,(u-\beta_2)^{B_2}\,\ldots}\, e^{ux+N+\frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}}+\cdots} = 0. \tag{114}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots.. \beta_1, \beta_2, \ldots..$ sind sämmtlich einfache, $\gamma \ldots..$ vielfache Wurzeln der Gleichung $U_1=0$, ferner sind $A_1, A_2, \ldots.. B_1, B_2, \ldots..$ constante Zähler von Partialbrüchen, so genommen, dass sämmtliche Exponenten entweder reell und positiv, oder imaginär mit positiven reellen Theilen, sind.

Die sorgfältigere Betrachtung der Gleichung (114) lehrt nun, dass, wiewohl unter den Wurzeln derselben die der Gleichung $U_1=0$ vorfindig sein können, demungeachtet dadurch, dass $U_1$ zufällig ein Polynom niederern Grades wird als $U_0$ und als die Ordnungszahl $n$ der Differentialgleichung Einheiten enthält, keine Wurzel der Gleichung (114) verloren gehe, indem dann nothwendig $U_0$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade ist, uns somit die Wurzeln der Gleichung:

$$N = \int L\, du = -\infty,$$

die auch der (114) Genüge thun, zu Gebote stehen, dass somit Wurzeln nur verloren gehen können auf folgende verschiedene Weisen:

1. Wenn einer oder mehrere der Exponenten, respective Zähler von Partialbrüchen $A_1, A_2, \ldots$ $B_1, B_2, \ldots$ verschwinden, ein Fall, der dann stattfindet, wenn $U_0$ und $U_1$ einen gemeinschaftlichen Factor besitzen.

2. Wenn mehrere Zähler der einfachen Partialbrüche negativ, oder imaginär mit negativen reellen Theilen sind, die dann zu einem Factor von der Form $(u-\beta)^B$ im Nenner Veranlassung geben, wodurch eine Wurzel $u=\beta$ verloren geht.

3. Wenn die Gleichung $U_1=0$ gleiche Wurzeln besitzt.

Wir wollen jetzt der Reihe nach sehen, wie das in diesen drei Fällen unvollständig werdende Integral ergänzt werden muss.

Im ersten Falle, wo $U_0$ und $U_1$ einen gemeinschaftlichen Factor haben von der Form $(u-\alpha)$ oder $(u-\alpha)^m$, entspricht der Differentialgleichung, nebst denjenigen Integralen, die wir durch unsere Methode gewinnen, noch ein einfaches particuläres, welches entweder die Gestalt einer reinen Exponentielle hat, nämlich $e^{\alpha x}$, oder folgende andere:

$$e^{\alpha x}\,(C+C_1 x+C_2 x^2+\ldots\ldots+C_{m-1}x^{m-1}). \tag{115}$$

In der That, setzen wir in der Differentialgleichung (13, §, 2.), $y=e^{ux}$, so erhalten wir als Resultat der Substitution:

$$(U_0+U_1 x)\,e^{ux}=0. \tag{116}$$

Wenn jetzt $U_0$ und $U_1$ den gemeinschaftlichen Factor $(u-\alpha)$ besitzen, so wird dieser Gleichung für $u=\alpha$ Genüge geleistet, und man hat ein particuläres Integral:

$$y=e^{\alpha x}. \tag{117}$$

Wären nun ebenso $(u-\alpha_1)$, $(u-\alpha_2)$, ...... $(u-\alpha_{m-1})$ gemeinschaftliche Factoren von $U_0$ und $U_1$, so erhielte man ein particuläres Integral:

$$y=Ce^{\alpha x}+C_1 e^{\alpha_1 x}+C_2 e^{\alpha_2 x}+\ldots\ldots+C_{m-1}e^{\alpha_{m-1}x}. \tag{118}$$

Lässt man die Wurzeln $\alpha$, $\alpha_1$, ... $\alpha_{m-1}$ gegen einander convergiren, und setzt:

$$\alpha_1=\alpha+\varepsilon_1,\quad \alpha_2=\alpha+\varepsilon_2,\quad \ldots\ldots\quad \alpha_{m-1}=\alpha+\varepsilon_{m-1},$$

unter $\varepsilon$ sehr kleine Zusätze verstanden, so geht die Formel (118) über in:

$$y=e^{\alpha x}\,(C+C_1 e^{\varepsilon_1 x}+\ldots\ldots+C_{m-1}e^{\varepsilon_{m-1}x}).$$

Entwickelt man endlich die eingeklammerten Exponentiellen in die ihnen gleichgeltenden, wegen der Kleinheit der $\varepsilon$ sehr convergirenden Reihen, und setzt überdiess:

$$\begin{aligned}
C+C_1\quad &+C_2\quad +\ldots\ldots+C_{m-1}\quad =B,\\
C_1\varepsilon_1\quad &+C_2\varepsilon_2\quad +\ldots\ldots+C_{m-1}\varepsilon_{m-1}=B_1,\\
C_1\varepsilon_1^2\quad &+C_2\varepsilon_2^2\quad +\ldots\ldots+C_{m-1}\varepsilon_{m-1}^2=2B_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_1\varepsilon_1^{m-1}&+C_2\varepsilon_2^{m-1}+\ldots\ldots+C_{m-1}\varepsilon_{m-1}^{m-1}=2.3\ldots(m-1)\,B_{m-1},
\end{aligned}$$

Bei dem Convergiren von $\varepsilon$ gegen Null nähert sich nun offenbar dieses letztere der Grenze:

$$\int_{-h_1}^{+h_2} e^{\alpha x} \frac{\varphi(\alpha)}{v} \, dv = e^{\alpha x} \varphi(\alpha) \log\left(-\frac{h_2}{h_1}\right),$$

was offenbar die, mit einer willkürlichen Constante multiplizirte, oberwähnte Exponentielle ist.

Hätten ebenso die beiden Polynome $U_0$ und $U_1$ nicht Einen, sondern mehrere gemeinschaftliche Factoren:

$$u - \alpha, \quad u - \alpha_1, \quad u - \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad u - \alpha_{m-1},$$

so würden es auch ebenso viele, d. h. $m$ besondere Integrale sein, die der Differentialgleichung Genüge leisten, und die sich auf ebenso viele mit willkürlichen Constanten multiplizirte Exponentiellen zurückführen liessen. — Convergiren aber die zwischen $\alpha$, $\alpha_1$, ... $\alpha_{m-1}$ bestehenden Unterschiede gegen die Nulle, so dass sich diese Grössen der Gleichheit nähern, so werden auch die $m$ besonderen Integrale sämmtlich Grenzen erhalten, die ungemein nahe aneinander und zugleich an $\alpha$ liegen; solche Integrale werden es also sein, die der Differentialgleichung Genüge leisten, wenn $U_0$ und $U_1$, $m$ gleiche Factoren $u - \alpha$ gemeinschaftlich besitzen. Zu gleicher Zeit wird aber die Function $V$ den Factor $(u-\alpha)^m$ im Nenner erhalten, während der erste Theil der Gleichung (111) ganz davon frei sein, also die Eigenschaft besitzen kann, für $u = \alpha$ nicht unendlich zu werden, sondern einen endlichen Werth beizubehalten, woraus unmittelbar folgt, dass jene nahe an $\alpha$ liegenden Grenzen zwar nicht der Gleichung (111) wohl aber der (110) Genüge leisten werden. Es kann ferner ohne Schwierigkeit gezeigt werden, dass die Summe dieser $m$ besonderen Integrale auf den geschlossenen Ausdruck (115) oder (119) zurückgeführt werden kann; wir wollen aber an diesem Orte noch mehr darthun. Wir wollen nämlich zeigen, dass, ob auch $U_0$ und $U_1$ einen gemeinschaftlichen Factor besitzen oder nicht, sobald nur $V$ einen Factor von der Form $u - \alpha$, in beliebiger Potenz im Nenner hat, der Differentialgleichung stets durch ein besonderes Integral, oder durch eine Summe von mehreren solchen Genüge geleistet werden kann. Vielmehr, um noch eigentlicher zu sprechen: die besonderen Integrale als Übergangsform führen zu Integralen der vorgelegten Differentialgleichung, welche letztere zunächst in Form eines Differentiales mit beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Exponenten vorhanden sind, dann aber, wenn man will, als Product dargestellt werden können aus einer Exponentielle, in eine endliche oder unendliche, nach absteigenden Potenzen von $x$ geordnete Reihe.

In der That: setzen wir voraus, $V$ enthalte den Factor $(u-\alpha)^m$ im Nenner, unter $m$ vor der Hand eine ganze positive Zahl verstanden. Lassen wir $\varepsilon$ eine ins Unendliche abnehmende Grösse bedeuten, und $h_1$, $h_2$, .... $h_{m+1}$ Zahlen von unbestimmtem endlichen Werth, die man sich nach ihrer natürlichen Grössenordnung hingeschrieben vorstellen kann, so, dass mit $\varepsilon$ zugleich auch $h_1\varepsilon$, $h_2\varepsilon$, ... $h_{m+1}\varepsilon$ im Zustande des unendlichen Abnehmens sich befinden, so wird immer folgende Summe:

$$C_1\int_{\alpha+h_1\varepsilon}^{\alpha+h_2\varepsilon} e^{ux}\, V\, du + C_2\int_{\alpha+h_2\varepsilon}^{\alpha+h_3\varepsilon} e^{ux}\, V\, du + \ldots\ldots + C_m\int_{\alpha+h_m\varepsilon}^{\alpha+h_{m+1}\varepsilon} e^{ux}\, V\, du,$$

ein Integral der Differentialgleichung darstellen, wenigstens mit Einer, oft mit mehreren willkürlichen Constanten. Wir wollen, der Kürze wegen, diese Summe symbolisch andeuten durch den Ausdruck:

$$\overset{m}{\underset{1}{\mathrm{S}}}\left[C_\mu \int_{\alpha+h_\mu\varepsilon}^{\alpha+h_{\mu+1}\varepsilon} e^{ux}\, V\, du\right], \tag{121}$$

so lässt sich derselbe, dem früher Gesagten zufolge, mittelst der Substitution:

$$e^{ux}\, V = \frac{\varphi(u)}{(u-\alpha)^m}, \tag{122}$$

auf die Form:

$$\overset{m}{\underset{1}{\mathrm{S}}}\left[C_\mu \int_{\alpha+h_\mu\varepsilon}^{\alpha+h_{\mu+1}\varepsilon} \frac{\varphi(u)}{(u-\alpha)^m}\, du\right], \tag{123}$$

bringen, während auch noch der erste Theil der Gleichung (111), nämlich:

$$e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}, \tag{124}$$

eine ähnliche Form:

$$\frac{\psi(u)}{(u-\alpha)^k}$$

annehmen wird, in welcher der Exponent $k$ stets, und zwar mindestens um die Einheit, kleiner ausfällt als $m$, $\varphi(u)$ aber und $\psi(u)$ Functionen sind, die für $u=\alpha$ nicht mehr unendlich werden. Die Fälle, in welchen diess Letztere nicht Statt finden kann, weil $V$ einen Bruch, dessen Nenner eine Potenz von $u-\alpha$ ist, im Exponenten der Exponentielle enthält, sollen hier einstweilen ausser Acht gelassen werden.

Um jetzt zu zeigen, dass die Summe (121) anstatt $y$ gesetzt, die Differentialgleichung wirklich erfüllen könne, wird es nur nothwendig sein darzuthun, dass man durch schickliche Wahl von $C_1, \ldots C_m$ machen kann, dass:

$$\overset{m}{\underset{1}{\mathrm{S}}}\left[C_\mu \left\{\frac{\psi(u)}{(u-\alpha)^k}\right\}_{\alpha+h_\mu\varepsilon}^{\alpha+h_{\mu+1}\varepsilon}\right] = 0 \tag{125}$$

wird, während zugleich die Summe (121) einen endlichen und von der Nulle verschiedenen Werth bekömmt, der wenigstens Eine, oft aber auch mehrere willkürliche Constanten in sich schliesst. Führen wir zu diesem Zwecke eine neue Variable ein, mittelst der Substitution:

$$u = \alpha + \varepsilon r,$$

entwickeln die Functionen $\varphi$ und $\psi$ mittelst der Taylor'schen Formel, so dass wir erhalten:

$$\frac{\varphi(u)}{(u-\alpha)^m} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varepsilon^m v^m} + \frac{\varphi'(\alpha)}{\varepsilon^{m-1} v^{m-1}} + \frac{\varphi''(\alpha)}{2.\varepsilon^{m-2} v^{m-2}} + \frac{\varphi'''(\alpha)}{2.3.\varepsilon^{m-3} v^{m-3}} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha)}{2.3.\ldots(m-1)\,\varepsilon v} + \frac{\varphi^{(m)}(\alpha+\vartheta\varepsilon v)}{2.3.\ldots m}, \tag{126}$$

$$\frac{\psi(u)}{(u-\alpha)^k} = \frac{\psi(\alpha)}{\varepsilon^k v^k} + \frac{\psi'(\alpha)}{\varepsilon^{k-1} v^{k-1}} + \frac{\psi''(\alpha)}{2.\varepsilon^{k-2} v^{k-2}} + \frac{\psi'''(\alpha)}{2.3.\varepsilon^{k-3} v^{k-3}} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{\psi^{(k-1)}(\alpha)}{2.3.\ldots(k-1)\,\varepsilon v} + \frac{\psi^{(k)}(\alpha+\vartheta\varepsilon v)}{2.3.\ldots k}, \tag{127}$$

und setzen die gefundenen Werthe in die Formeln (123) und (125). Die daselbst vorhandenen Summen werden sich sodann in so viele Theile zerlegen lassen, als in den zweiten Theilen der Gleichungen (126) und (127) Glieder vorhanden sind, und jeder derselben wird wieder eine Summe sein. Es kann ferner in jedem ein von $\mu$ unabhängiger Factor gesondert, und vor das Summenzeichen gestellt werden, da die Summirung nur nach $\mu$ zu geschehen hat. Führt man diess aus, so gelangt man zu folgenden Ausdrücken:

$$y = \frac{\varphi(\alpha)}{\varepsilon^{m-1}} \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^m}\right] + \frac{\varphi'(\alpha)}{\varepsilon^{m-2}} \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^{m-1}}\right] + \frac{\varphi''(\alpha)}{2.\varepsilon^{m-3}} \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^{m-2}}\right] + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha)}{2.3.\ldots(m-1)} \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v}\right] + \frac{\varepsilon}{2.3.\ldots m} \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \varphi^{(m)}(\alpha+\vartheta\varepsilon v)\, dv\right]. \tag{128}$$

$$0 = \frac{\psi(\alpha)}{\varepsilon^k} \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\left\{\frac{C_\mu}{v^k}\right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}}\right] + \frac{\psi'(\alpha)}{\varepsilon^{k-1}} \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-1}}\right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}}\right] + \frac{\psi''(\alpha)}{2.\varepsilon^{k-2}} \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-2}}\right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}}\right] + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{\psi^{(k-1)}(\alpha)}{2.3.\ldots(k-1)\,\varepsilon} \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\left\{\frac{C_\mu}{v}\right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}}\right] + \frac{1}{2.3.\ldots k} \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\left\{C_\mu\, \psi^{(k)}(\alpha+\vartheta\varepsilon v)\right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}}\right]. \tag{129}$$

Man überzeugt sich leicht auf den ersten Anblick, dass in den letzten beiden Gleichungen die Ergänzungsglieder bei dem unendlichen Abnehmen von $\varepsilon$ gegen die Nulle convergiren, und dass der zweiten derselben durch solche Werthe der Constanten $C_1$, $C_2$, ... $C_m$ Genüge geleistet werde, die das folgende System von $k$ Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\left\{\frac{C_\mu}{v^k}\right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}}\right] &= \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}^k} - \frac{C_\mu}{h_\mu^k}\right] = 0,\\
\mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-1}}\right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}}\right] &= \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}^{k-1}} - \frac{C_\mu}{h_\mu^{k-1}}\right] = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\left\{\frac{C_\mu}{v}\right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}}\right] &= \mathop{\mathrm{S}}_1^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}} - \frac{C_\mu}{h_\mu}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{130}$$

unter $B_1, B_2, \ldots B_{m-k}$ eben auch ganz willkürliche Constanten verstanden. Das damit versehene particuläre Integral der Differentialgleichung erhält nun offenbar folgende Form:

$$(134)\quad y = B_1\varphi(\alpha) + B_2\varphi'(\alpha) + B_3\varphi''(\alpha) + \ldots\ldots + B_{m-k-1}\varphi^{(m-k-2)}(\alpha) + B_{m-k}\varphi^{(m-1)}(\alpha).$$

Um über den Bau dieses Ausdruckes näheren Aufschluss zu erhalten, bemerken wir, dass sowohl $\varphi(u)$ als auch $\psi(u)$ die Exponentielle $e^{ux}$ als Factor besitzen, also von der Form sind:

$$(135)\quad \varphi(u) = e^{ux} M, \qquad \psi(u) = e^{ux} N,$$

unter $M$ und $N$ solche Functionen von $u$ verstanden, die weiter kein $x$ in sich enthalten. Die successiven Differentialquotienten dieser Ausdrücke wird man erhalten, indem man von einer bekannten allgemeinen Formel der Differentialrechnung Gebrauch macht, nämlich:

$$(136)\quad \frac{d^n}{du^n}(PQ) = (PQ)^{(n)} = P^{(n)}Q + \binom{n}{1} P^{(n-1)}Q' + \binom{n}{2} P^{(n-2)}Q'' + \binom{n}{3} P^{(n-3)}Q''' + \ldots\ldots$$

und aus welcher man, $e^{ux}$ anstatt $P$, $M$ anstatt $Q$ setzend, in der Form einer nach absteigenden Potenzen von $x$ geordneten, und mit der Exponentielle $e^{ux}$ multiplizirten Reihe ganz allgemein den Werth erhält von:

$$(137)\quad \varphi^{(r)}(u) = e^{ux}\left[x^r M + \binom{r}{1} x^{r-1} M' + \binom{r}{2} x^{r-2} M'' + \binom{r}{3} x^{r-3} M''' + \ldots\ldots\right],$$

in welchem die eingeklammerte Reihe, eben, weil der bisherigen Voraussetzung nach, die stillschweigend in unseren Entwicklungen niedergelegt ist, $r$ eine ganze Zahl bedeutet, eine endliche, bei dem $(r+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbrechende Reihe ist. Hier muss man sich noch $u = \alpha$ gesetzt, $r$ der Reihe nach in $0, 1, 2, \ldots. (m-k-2)$ und $(m-1)$ verwandelt, und die so gewonnenen Ausdrücke mit den Constanten $B_1, B_2, \ldots B_{m-k}$ multiplizirt denken, um die Bestandtheile des Werthes von $y$ zu erhalten, welcher letztere sodann in folgender Form erscheinen wird:

$$(138)\quad \begin{aligned} y = {} & e^{\alpha x}\left[D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + D_4 x^3 + \ldots\ldots + D_{m-k-1} x^{m-k-2}\right] \\ & + B_{m-k} e^{\alpha x}\left[x^{m-1} M + \binom{m-1}{1} x^{m-2} M' + \binom{m-1}{2} x^{m-3} M'' + \ldots\ldots\right]. \end{aligned}$$

$D_1, D_2, \ldots. D_{m-k-1}$ bedeuten ganz willkürliche Constanten, wie man unmittelbar aus den na folgenden Gleichungen erkennt, durch welche die Werthe derselben gegeben sind, und in denen u $M, M', M'', \ldots.$ bereits die Werthe verstanden werden, welche die Function $M$ und ihre succ ven Differentialquotienten erhalten, wenn man in ihnen $u = \alpha$ setzt:

der früheren Deduction, die uns zu der Gleichung (119) führte, unmittelbar klar und kann überdiess du directe Substitution sehr leicht erwiesen werden. In der That, setzen wir in unsere Differentialgleich der $n^{ten}$ Ordnung $e^{ux}$ anstatt $y$, so geht sie über in:

$$U_0 + U_1 x = 0. \tag{140}$$

Enthalten nun die Polynome $U_0$ und $U_1$ den gemeinschaftlichen Factor $(u-\alpha)^s$, so wird d ser Gleichung Genüge geleistet werden, wenn man $u=\alpha$ setzt, und somit ist der Ausdruck:

$$C e^{\alpha x}$$

ein particuläres Integral.

Allein auch jeder andere Ausdruck von der Form:

$$B \cdot x^r \cdot e^{\alpha x}, \tag{141}$$

wird, wenn $r$ eine ganze Zahl bedeutet, die kleiner ist als $s$, dieselbe Eigenschaft darbieten; denn s stituiren wir:

$$y = x^r \cdot e^{ux} \tag{142}$$

in die Differentialgleichung, und achten darauf, dass dann:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= e^{ux}\left[u \cdot x^r + r x^{r-1}\right] \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= e^{ux}\left[u^2 \cdot x^r + 2\, u \cdot r x^{r-1} + r(r-1)\, x^{r-2}\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{d^m y}{dx^m} &= e^{ux}\left[u^m \cdot x^r + \binom{m}{1} u^{m-1} \cdot r x^{r-1} + \binom{m}{2} u^{m-2} \cdot r(r-1)\, x^{r-2} + \ldots + r(r-1)\ldots(r-m+1)\, x^{r}\right.
\end{aligned} \tag{143}$$

ist, so erhalten wir:

$$x^r\left[U_0 + U_1 x\right] + \binom{r}{1} x^{r-1}\left[\frac{dU_0}{du} + \frac{dU_1}{du} x\right] + \binom{r}{2} x^{r-2}\left[\frac{d^2U_0}{du^2} + \frac{d^2U_1}{du^2} x\right] + \ldots + \frac{d^rU_0}{du^r} + \frac{d^rU_1}{du^r} x = \tag{144}$$

eine Gleichung, die für $u=\alpha$ identisch wird, weil der Voraussetzung nach den Polynomen $U_0$ und der Factor $(u-\alpha)$ $s$-mal angehört, und $r < s$ ist.

Es ist somit erwiesen, dass der Ausdruck (141) für solche ganze Werthe von $r$, die klei sind als $s$, der Differentialgleichung Genüge leistet, und, weil man der Reihe nach $r = 0, 1, 2, \ldots s$ - setzen, und zugleich die angehängte Constante $B$ in $B_0, B_1 \ldots B_{s-1}$ verwandeln, ja auch die Sum aller so hervorgehenden Werthe nehmen kann, so erhellet unmittelbar, dass, wenn $U_0$ und $U_1$ gem schaftliche Factoren $(u-\alpha)$, $s$ an der Zahl, besitzen:

$$y = e^{\alpha x}\left[B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{s-1} x^{s-1}\right],$$

werden muss, während die (146) als kurzer symbolischer, zwar geschlossener, aber practisch unbrauchbarer Ausdruck dasteht, thut der Anwendbarkeit derselben auf dem Felde der Mechanik oder mathematischen Physik durchaus keinen Eintrag, wenn nur der jederzeit nothwendigen Bedingung der Convergenz Genüge geleistet ist, ohne welcher solche Reihen bekanntlich unbrauchbar werden. Auf diesem Felde bedeutet nämlich $y$ in der Regel die sehr kleine Verschiebung aus der Ruhelage eines in Schwingungen von geringen Amplituden begriffenen materiellen Theilchens, $x$ aber die Entfernung desselben von der Erregungsstelle, oder, bei anderen Gelegenheiten, die Zeit, die vom Anfange der Bewegung an verflossen ist. Da nun der für $y$ gewonnene particuläre Werth, d. h. die unendliche Reihe (145) ihrer Natur nach desto convergirender wird, je grösser man $x$ annimmt, so erhalten wir aus derselben die Gesetze sehr kleiner Schwingungen mit desto grösserer Genauigkeit, je weiter das schwingende Theilchen vom Orte der ursprünglichen Erregung entfernt ist. oder in anderen Fällen, je weiter man in der Zeit fortschreitet. Diess ist aber gerade dasjenige, was man bei der Auflösung ähnlicher Probleme wünscht, indem man in der nächsten Nähe der Erregungsstelle in der Regel, wegen der Grösse der Excursionen der sich bewegenden Theilchen, gar noch nicht zur Annahme der linearen Form der Differentialgleichungen berechtigt ist, welche letztere man ohnehin nur dadurch erzeugt hat, dass man die Glieder höherer Ordnungen nach $y$ als sehr klein vernachlässigte und somit die Giltigkeit der erhaltenen Formeln auf kleinere Schwingungsamplituden beschränkte, die meist nur in grössern Entfernungen von der Erregungsstelle wirklich Statt finden. Ueberdem sind derartige Ausdrücke mit jener wünschenswerthen Durchsichtigkeit begabt, die ihre vornehmsten Eigenschaften, als da sind: Periodicität, Maximum-, Null- und Minimumwerthe u. s. w., ohne mühevolle Rechnungen, in den meisten Fällen erkennen lässt; wenigstens besitzt in dieser Hinsicht die Form eines bestimmten Integrals vor der letzterwähnten, eines Differentials mit beliebigen Exponenten keinerlei Vorzug.

Es sind uns bisher bei der Integration der betrachteten linearen Differentialgleichungen drei verschiedene Formen aufgestossen, nämlich erstens: die eines bestimmten Integrales, zweitens: die eines Differentiales, dessen Exponent eine allgemeine Zahl ist, die positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, ja auch irrational oder imaginär sein kann, genommen nach einer Variablen $u$, die in der Differentialgleichung nicht erscheint, und wofür nach vollbrachtem Differenziren irgend ein constanter Werth $\alpha$ gesetzt wird, und endlich drittens: die eines Productes aus einer Exponentielle in eine ganze algebraische Function der unabhängigen Veränderlichen. Und diejenige Analysis, die uns zur Kenntniss der zwei letzten Formen verholfen hat, führt uns zugleich zur Vervollständigung der im zweiten Paragraphe vorgetragenen Integrationsmethode hinsichtlich derjenigen Fälle, in welchen dieselbe nur unvollständige, nicht mit der genügenden Anzahl willkürlicher Constanten versehene Integrale lieferte. Diese nach den letzten Ergebnissen vervollständigte Integrationsmethode, wird nun in Folgendem bestehen: Man ersetze in der gegebenen Differentialgleichung die Grössen:

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d^ny}{dx^n},$$

beziehungsweise durch die Potenzen:

$$1, \quad u, \quad u^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad u^n,$$

und bezeichne das Resultat der vollbrachten Substitution mit:

$$U_0 + U_1 x, \tag{147}$$

berechne ferner den Werth des folgenden Integrales:

$$\int \frac{U_0}{U_1} du,$$

und achte bei der Zerlegung des Bruches in Partialbrüche darauf, ob die beiden Polynome $U_0$ und $U_1$ gemeinschaftliche Factoren besitzen von der Form $(u-\alpha)$, was sich bekanntlich dadurch verräth, dass gewisse Zähler der erhaltenen Partialbrüche der Nulle gleich werden; findet dieser Umstand Statt, und haben namentlich $U_0$ und $U_1$ nur Einen derartigen Factor gemeinschaftlich, so entspricht der Differentialgleichung ein particuläres Integral:

$$C\, e^{\alpha x}. \tag{148}$$

Erscheint aber dieser gemeinschaftliche Factor in jedem Polynome mindestens $s$-mal, so besteht auf dieselbe Weise ein, willkürliche Constanten $s$ an der Zahl enthaltendes particuläres Integral:

$$e^{\alpha x}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots + C_{s-1} x^{s-1}); \tag{149}$$

und wir werden sohin jedesmal so viele particuläre, der Gleichung Genüge leistende Werthe unmittelbar erhalten, als die Polynome $U_0$ und $U_1$ gemeinschaftliche Factoren von der Form $(u-\alpha)$ besitzen.

Ferner suchen wir diejenige zweite Reihe particulärer Werthe auf, die unter der Gestalt eines bestimmten Integrales erscheinen, nämlich unter der folgenden:

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V du. \tag{150}$$

Hier hat man, dem früher Gesagten zufolge:

$$V = \frac{C}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}; \tag{151}$$

$u'$ und $u''$ sind Wurzeln der Gleichung:

$$e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} = 0. \tag{152}$$

Letztere erscheint nun jedesmal unter folgender Form, wie im Anfange dieses Paragraphes nachgewiesen wurde:

$$\frac{(u-\alpha_1)^{A_1}(u-\alpha_2)^{A_2}\ldots\ldots}{(u-\beta_1)^{B_1}(u-\beta_2)^{B_2}\ldots\ldots} e^{ux + N + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \cdots} = 0, \tag{153}$$

und wird erfüllt, erstens: durch die Werthe:

$$u = \alpha_1, \quad u = \alpha_2 \quad \ldots\ldots$$

zweitens durch diejenigen, die der Gleichung:

$$N = -\infty$$

Genüge leisten. Diese wird man also für $u'$ und $u''$ nehmen können, und so eine zweite Reihe particulärer Werthe erhalten, die in Form von bestimmten Integralen erscheinen, aber gelegenheitlich die Unzukömmlichkeit bieten werden, dass die Function unter dem Integralzeichen innerhalb der bezeichneten Grenzen durch Unendlich durchgeht, ein Übelstand, der nicht immer leicht wird vermieden werden können, und z. B. gleich vorhanden sein wird, wenn $\beta_1$ seiner Grösse nach zwischen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ fällt, bei dem innerhalb der Grenzen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ genommenen bestimmten Integrale.

Eine dritte Reihe endlich von particulären Werthen, und zugleich das beste Gegenmittel gegen den letzterwähnten Übelstand, wird uns in der Form von Differentialen mit beliebigen Exponenten an die Hand gegeben. Um diese Reihe zu erhalten, entwickeln wir die Form (151) und bekommen offenbar:

$$V = \frac{C}{U_1} e^{\int \frac{U_2}{U_1} du} = C \frac{(u-\alpha_1)^{\mathfrak{a}_1} (u-\alpha_2)^{\mathfrak{a}_2} \dots}{(u-\beta_1)^{\mathfrak{b}_1} (u-\beta_2)^{\mathfrak{b}_2} \dots} e^{N + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \cdots}, \tag{154}$$

wo $\mathfrak{a}_1 = A_1 - 1$, $\mathfrak{a}_2 = A_2 - 1$, ... $\mathfrak{b}_1 = B_1 + 1$, $\mathfrak{b}_2 = B_2 + 1$, ... sein werden, wenn nicht etwa $\alpha_1, \alpha_2, \dots \beta_1, \beta_2 \dots$ wiederholt vorkommende Wurzeln der Gleichung $U_1 = 0$ sind, in welchem Falle $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \dots$ andere Werthe erhalten, und zugleich die entsprechenden Factoren $(u-\alpha_1)$, $(u-\alpha_2)$, ... $(u-\beta_1)$, $(u-\beta_2)$, ... als Nenner von Brüchen im Exponenten der Exponentielle vorkommen können. Dieser letzte Umstand ist sorgfältig zu beachten; findet derselbe nicht Statt, d. h. kommen diese Factoren im Exponenten als Nenner gar nicht vor, so erhalten wir, den Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \dots$ entsprechend, eine Reihe von particulären Integralen:

$$G_1 \frac{d^{\mathfrak{b}_1 - 1}}{du^{\mathfrak{b}_1 - 1}} [e^{ux} M_1], \qquad G_2 \frac{d^{\mathfrak{b}_2 - 1}}{du^{\mathfrak{b}_2 - 1}} [e^{ux} M_2] \dots\dots \tag{155}$$

in Form von Differentialquotienten nach $u$ genommen, in denen:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{(u-\alpha_1)^{\mathfrak{a}_1} (u-\alpha_2)^{\mathfrak{a}_2} \dots}{(u-\beta_2)^{\mathfrak{b}_2} \dots\dots} e^{N + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \cdots} \\ M_2 &= \frac{(u-\alpha_1)^{\mathfrak{a}_1} (u-\alpha_2)^{\mathfrak{a}_2} \dots}{(u-\beta_1)^{\mathfrak{b}_1} \dots\dots} e^{N + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \cdots} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{156}$$

ist und nach der Differentiation im ersten der Ausdrücke (155) $u = \beta_1$, im zweiten $u = \beta_2$ gesetzt werden muss. Diese letzte Substitution wollen wir künftighin durch ein, dem eingeklammerten Ausdrucke als Stellenzeiger angehängtes $\beta_1$ und $\beta_2$ andeuten, so:

$$\left\{ G_1 \frac{d^{\mathfrak{b}_1 - 1}}{du^{\mathfrak{b}_1 - 1}} \left[ e^{ux} M_1 \right] \right\}_{\beta_1}, \qquad \left\{ G_2 \frac{d^{\mathfrak{b}_2 - 1}}{du^{\mathfrak{b}_2 - 1}} \left[ e^{ux} M_2 \right] \right\}_{\beta_2}. \tag{157}$$

Ähnliche particuläre Werthe könnten wir auch für die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ erhalten, wenn uns die ihnen entsprechenden bestimmten Integrale, des obenerwähnten Übelstandes wegen, nicht zusagen sollten, nämlich:

$$\left\{H_1 \frac{d^{-a_1-1}}{du^{-a_1-1}}\left[e^{ux} P_1\right]\right\}_{\alpha_1}, \qquad \left\{H_2 \frac{d^{-a_2-1}}{du^{-a_2-1}}\left[e^{ux} P_2\right]\right\}_{\alpha_2}, \quad \ldots\ldots \tag{158}$$

wo:

$$P_1 = \frac{(u-\alpha_2)^{a_2} \;\ldots\ldots\ldots}{(u-\beta_1)^{b_1}\,(u-\beta_2)^{b_2}\,\ldots} \, e^{N+\frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}}+\cdots}$$

$$P_2 = \frac{(u-\alpha_1)^{a_1} \;\ldots\ldots\ldots}{(u-\beta_1)^{b_1}\,(u-\beta_2)^{b_2}\,\ldots} \, e^{N+\frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}}+\cdots}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sind.

Endlich wäre noch der Fall gleicher Wurzeln der Gleichung $U_1 = 0$ zu erörtern; $\gamma$ sei eine solche und es erscheine namentlich, nach Absonderung aller gemeinschaftlichen Factoren $(u-\gamma)$ aus den Polynomen $U_0$ und $U_1$, wenn solche wirklich vorhanden sein sollten, in $U_1$ noch $(u-\gamma)^m$ als Factor, so gibt derselbe Veranlassung zu einer Reihe von Partialbrüchen mit Nennern: $(u-\gamma)^m$, $(u-\gamma)^{m-1}$, ..., deren Integrale, die wieder Brüche sind, mit Nennern: $(u-\gamma)^{m-1}$, $(u-\gamma)^{m-2}$, ... im Exponenten der Exponentielle vorhanden sein werden. Hier werden wir, um derjenigen particulären Integrale, die den $m$ Wurzeln $\gamma$ angehören, und die $m$ an der Zahl vorhanden sein müssen, wenn sich nicht ein Verlust von Einem oder einigen particulären Werthen ergeben soll, habhaft zu werden, eine neue Variable mittelst der Substitution:

$$u - \gamma = \frac{1}{v}$$

einführen, wodurch die Gleichung (153) übergeht in:

$$\frac{[v(\gamma-\alpha_1)+1]^{A_1}\,[v(\gamma-\alpha_2)+1]^{A_2}\,\ldots\, v^{B_1+B_2+\cdots}}{[v(\gamma-\beta_1)+1]^{B_1}\,[v(\gamma-\beta_2)+1]^{B_2}\,\ldots\, v^{A_1+A_2+\cdots}}\, e^{\frac{v\gamma+1}{v}x+N+Dv^{m-1}+Ev^{m-2}+\cdots} = 0, \tag{159}$$

und offenbar neue ihr Genüge leistende Werthe zulässt: erstens diejenigen, die die Gleichung:

$$D v^{m-1} = -\infty$$

erfüllen, zweitens noch überdiess denjenigen unendlich kleinen Werth von $v$, welcher $\frac{x}{v}$ unendlich und negativ macht. Diess gibt neue Wurzeln $m$ an der Zahl, die sich so werden schreiben lassen:

$$\pm\varepsilon, \quad \mu_1\infty, \quad \mu_2\infty, \quad \ldots\ldots \quad \mu_{m-1}\infty,$$

und zu welchen man noch irgend einen der Gleichung:

$$[v(\gamma - \alpha_1) + 1][v(\gamma - \alpha_2) + 1] \;\ldots\ldots = 0$$

Genüge leistenden Werth $k$ hinzufügen wird, um Grenzen für $m$ bestimmte Integrale in hinlänglicher Anzahl zu erhalten. Bei der Combination dieser Grenzen nun wird man Sorge tragen müssen, Integrale zu vermeiden, bei welchen die Function unter dem Integralzeichen innerhalb dieser Grenzen durch $\infty$ durchgeht, was manchmal nur dadurch zu erreichen ist, dass man unter dieselben einen der Gleichung (159) gar nicht Genüge leistenden Werth $v = g$ aufnimmt, bestimmte Integrale als particuläre Werthe aufstellt, innerhalb Grenzen $g$ und $\mu_1\infty$, oder $g$ und $\mu_2\infty$ bis $g$ und $\mu_r\infty$, und zugleich die Constanten der Integration, die als Multiplikatoren dieser Integrale erscheinen, an die Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots + C_r = 0$$

knüpft. Macht man von diesen Kunstgriffen den gehörigen Gebrauch, so hat man meist nur den Verlust eines einzigen particulären Integrales zu erwarten. Der Verlust dieses Einen particulären Integrales rührt auch an diesem Orte wesentlich daher, weil dasselbe nicht unter die vorausgesetzte Form eines bestimmten Integrals fällt, sondern eine irrationale Function von $x$ ist, was sich aus dem Umstande erkennen lässt, dass in der Differentialgleichung vom ersten auf den letzten Coefficienten ein Abfallen in der Ordnungszahl um Eine Einheit vorhanden ist; dieses Kennzeichen soll in dem nächsten Abschnitte, der die Formenlehre enthält, begründet werden, im fünften Abschnitte aber soll gezeigt werden, wie das fehlende particuläre Integral, unabhängig von der Methode der Variation der Constanten gefunden werden kann; vorderhand mag es genügen die Möglichkeit der Vervollständigung durch irgend eine, wenn auch praktisch nicht bequeme Methode dargethan zu haben. Die bei solchen Gelegenheiten am zweckmässigsten in Anwendung kommende Methode der Variation der willkürlichen Constanten, wird dann diesen Einen noch fehlenden particulären Werth, und zwar durch Integriren Einer Differentialgleichung der ersten Ordnung, ohne Anstand liefern.

Es ist nur noch übrig, die Wirksamkeit unserer vervollständigten Methode in einigen und namentlich denjenigen Beispielen nachzuweisen, die im zweiten Paragraphe der Betrachtung unterworfen worden sind.

Wir fangen an bei der Differentialgleichung (53), nämlich:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} \pm b^2xy = 0, \tag{160}$$

deren allgemeines Integral, für positive von 0 verschiedene Werthe von $a$, gefunden worden ist, so dass uns nur mehr die Fälle zu betrachten übrig bleiben, wo $a$ Null ist oder negativ.

Im ersten dieser Fälle verwandelt sich die (160) in die einfache Gleichung mit constanten Coefficienten:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \pm b^2y = 0,$$

und kann, nach den für diese Klasse bekannten Methoden, gleich integrirt werden; im zweiten Falle, den wir dadurch anschaulich machen wollen, dass wir $-a$ anstatt $a$ setzen, so dass es sich also um die Gleichung handelt:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - a \frac{dy}{dx} \pm b^2 xy = 0, \tag{161}$$

ist:

$$V = \frac{1}{(u^2 \pm b^2)^{\frac{a}{2}+1}}, \tag{162}$$

und wir wollen eher den Fall erörtern, wo von den beiden Zeichen $\pm$ das untere gilt, und in welchem der Werth von $V$ so geschrieben werden kann:

$$V = \frac{1}{(u+b)^{\frac{a}{2}+1}\ (u-b)^{\frac{a}{2}+1}}, \tag{163}$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung somit zufolge (157) dargestellt werden kann unter folgender Form:

$$y = C_1 \left\{ \frac{d^{\frac{a}{2}}}{du^{\frac{a}{2}}} \left[ \frac{e^{ux}}{(u+b)^{\frac{a}{2}+1}} \right] \right\}_b + C_2 \left\{ \frac{d^{\frac{a}{2}}}{du^{\frac{a}{2}}} \left[ \frac{e^{ux}}{(u-b)^{\frac{a}{2}+1}} \right] \right\}_{-b}, \tag{164}$$

oder, wenn man die Differentialquotienten mit Hilfe der Formel (137) entwickelt, und dann, so wie es sein muss, im ersten Theile des Ausdruckes $u$ in $b$, im zweiten $u$ in $-b$ verwandelt:

$$\begin{aligned} y = \quad & G_1 e^{bx} \left\{ x^{\frac{a}{2}} - \frac{a(a+2)}{2^2 b} x^{\frac{a}{2}-1} + \frac{a(a+2)\ (a-2)\ (a+4)}{2\,.\,2^4\,.\,b^2} x^{\frac{a}{2}-2} - \right. \\ & \left. - \frac{a(a+2)\ (a-2)\ (a+4)\ (a-4)\ (a+6)}{2\,.\,3\,.\,2^6\,.\,b^3} x^{\frac{a}{2}-3} + \dots\dots \right\} + \\ + \ & G_2 e^{-bx} \left\{ x^{\frac{a}{2}} + \frac{a(a+2)}{2^2 b} x^{\frac{a}{2}-1} + \frac{a(a+2)\ (a-2)\ (a+4)}{2\,.\,2^4\,.\,b^2} x^{\frac{a}{2}-2} + \right. \\ & \left. + \frac{a(a+2)\ (a-2)\ (a+4)\ (a-4)\ (a+6)}{2\,.\,3\,.\,2^6\,.\,b^3} x^{\frac{a}{2}-3} + \dots\dots \right\}. \end{aligned} \tag{165}$$

Die in dieser Formel enthaltenen Reihen brechen jedesmal ab, wenn $\frac{a}{2}$ eine ganze Zahl ist. Hätte man zum Beispiel $a = 2$, so bekäme man als Integral der Gleichung:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - b^2 xy = 0$$

folgenden sehr einfachen Ausdruck:

$$y = G_1 e^{bx} \left( x - \frac{1}{b} \right) + G_2 e^{-bx} \left( x + \frac{1}{b} \right),$$

von dem man sich auch ohne Schwierigkeit *a posteriori* überzeugen kann, dass er der Differentialgleichung Genüge leiste.

Diess lässt sich indess auch ganz allgemein bei der Formel (165) nachweisen, und man kann sich namentlich, um darzuthun, dass der erste mit dem Factor $G_1$ verknüpfte Theil derselben die Differentialgleichung erfülle, benehmen auf folgende Weise:

Es sei allgemein:

$$H_r = \frac{a\ (a+2)\ (a-2)\ \ldots\ldots\ \big(a+2\ (r-1)\big)\big(a-2\ (r-1)\big)\ (a+2r)}{2\,.\,3\ \ldots\ldots\ r\,.\,2^{3r}\,.\,b^r} \tag{166}$$

so besteht die Relation:

$$H_r = H_{r-1}\,\frac{\big(a-2\ (r-1)\big)\ (a+2r)}{r\,.\,2^3\,.\,b}\,, \tag{167}$$

und es ist nur zu zeigen, dass:

$$y = e^{bx}\ \mathrm{S}\left\{(-1)^r\ x^{\frac{a}{2}-r}\ H_r\right\} \tag{168}$$

Genüge leistet. Nun erhält man durch Differenziren:

$$\frac{dy}{dx} = e^{bx}\ \mathrm{S}\left\{(-1)^r\ x^{\frac{a}{2}-r}\left[b\,H_r - \left(\frac{a}{2} - r + 1\right)H_{r-1}\right]\right\}, \tag{169}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{bx}\ \mathrm{S}\left\{(-1)^r\ x^{\frac{a}{2}-r}\left[b^2 H_r - 2\,.\,b\left(\frac{a}{2}-r+1\right)H_{r-1} + \left(\frac{a}{2}-r+2\right)\left(\frac{a}{2}-r+1\right)H_{r-2}\right]\right\}. \tag{170}$$

Nun multiplizire man (168) mit $-b^2x$, (169) mit $-a$, (170) mit $x$ und addire sie, nehme zugleich Rücksicht auf die Relation (167), die man dazu benützt, um $H_{r-1}$ durch $H_{r-2}$ auszudrücken, so erhält man 0 als Endresultat, und auf dieselbe Weise überzeugt man sich auch, dass der zweite mit $G_2$ verknüpfte Bestandtheil von $y$ ein particuläres Integral sei, und diess zwar, was auch $a$ für eine Zahl bedeuten mag, somit auch dann, wenn man $a$ in $-a$ verwandelt, wodurch das unter (164) und (165) dargestellte Integral der Differentialgleichung (161) in das Integral der Gleichung (160) übergeht, so dass also dieses letztere nach Belieben in der Form eines Differentialquotienten mit allgemeinen Exponenten oder in der andern eines bestimmten Integrales erscheinen kann. Es finden sich hierdurch in einem speciellen Beispiele diejenigen Betrachtungen bestätigt, die wir früher anführten, um die Giltigkeit eines für ganze und positive Exponenten des Differentiales bewiesenen Ausdruckes auf beliebige Werthe desselben auszudehnen.

Endlich erübrigt noch die Erörterung des zweiten Falles, wo nämlich in den Gleichungen (161) und (162) von den beiden Zeichen $\pm$ das obere zu nehmen ist; dieser Fall erfordert keine neue Rechnung, und das darauf bezügliche Integral geht offenbar auch aus der Form (165) hervor, wenn in derselben $b\sqrt{-1}$ anstatt $b$ gesetzt wird. Führt man diess aus und ersetzt zugleich die

imaginären Exponentiellen durch ihre trigonometrischen Werthe, so bekommt man anstatt $y$ einen unter folgender Form erscheinenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
y = \; & (K_1 \cos bx + K_2 \sin bx) \left[ x^{\frac{a}{2}} - \frac{a\,(a+2)\,(a-2)\,(a+4)}{2\,.\,2^6\,.\,b^2}\, x^{\frac{a}{2}-2} + \right. \\
& \left. + \frac{a\,(a+2)\,(a-2)\,\ldots\,(a+8)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,2^{12}\,.\,b^4}\, x^{\frac{a}{2}-4} - \ldots\ldots \right] + \\
& + (K_2 \cos bx - K_1 \sin bx) \left[ \frac{a\,(a+2)}{2^3\, b}\, x^{\frac{a}{2}-1} - \frac{a\,(a+2)\,(a-2)\,(a+4)\,(a-4)\,(a+6)}{2\,.\,3\,.\,2^9\,.\,b^3}\, x^{\frac{a}{2}-3} + \right. \\
& \left. + \frac{a\,(a+2)\,(a-2)\,\ldots\,(a+10)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,2^{15}\,.\,b^5}\, x^{\frac{a}{2}-5} - \ldots\ldots \right],
\end{aligned}
\tag{171}
$$

wo $K_1$ und $K_2$ die Constanten der Integration bedeuten. Die hier vorkommenden Reihen besitzen dieselbe Eigenschaft, wie die in der Formel (165) enthaltenen, nämlich abzubrechen, wenn $\frac{a}{2}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist. Wird $\frac{a}{2}$ aber gebrochen, so verwandeln sich dieselben in unendliche Reihen von der Classe derjenigen, die man halbconvergirende nennt, und die sich der Function, deren Ausdruck sie sein sollten, beim Zusammennehmen von mehr und mehr Anfangsgliedern anfänglich bis zu einer gewissen Grenze nähern, dann aber davon entfernen und nicht nur divergent, sondern sogar steigend werden, d. h. hier mit andern Worten: wenn man diese Reihen, etwa die in der Formel (165) enthaltenen, bei dem $(r+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbricht, so erhält man einen Ausdruck, welcher anstatt $y$ gesetzt den ersten Theil der Differentialgleichung (161) nicht auf Null reduzirt, sondern auf einen von $x$ abhängigen Werth, der bei dem fortwährenden Wachsen der Zahl $r$ sich der Nulle bis zu einer gewissen, ebenfalls von $x$ abhängigen, Gränze anfänglich nähert, dann aber bei dem fernern Wachsen dieser Zahl davon entfernt. Dass die Reihen, von welchen die Rede ist, zu den convergirenden nicht gehören, davon belehrt uns der Quotient, den man erhält, das $(r+1)^{\text{te}}$ Glied durch das $r^{\text{te}}$ theilend:

$$
- \frac{\big(a - 2\,(r-1)\big)\,(a+2r)}{r\,.\,2^3\,.\,b\,.\,x}, \tag{172}
$$

welcher für grössere $x$, und bei dem fortwährenden Wachsen von $r$ anfänglich ein kleiner, nahe an Null liegender Bruch sein kann, sich aber dann fortwährend der Einheit nähert und sie endlich überschreitet, wodurch die Reihe aus einer fallenden in eine steigende übergeht. Um aber über das Mass der Genauigkeit, mit welcher ein solches halbconvergirendes Reihengebilde, bei dem $(r+1)^{\text{ten}}$ Gliede abgebrochen, das Integral der vorgelegten Differentialgleichung wiederzugeben vermag, Aufschluss zu erhalten, betrachten wir das Resultat der Substitution in dieselbe, welches unmittelbar aus den Gleichungen (168), (169) und (170) folgt, die bezüglich mit $-b^2x$, $-a$ und $x$ multiplizirt und dann addirt werden müssen. Diess gibt als Resultat:

$$
e^{bx}\, \mathsf{S} \left\{ (-1)^r\, x^{\frac{a}{2}-r+1} \left[ 2\,(r-1)\, b\, H_{r-1} - \left( \frac{a}{2} - r + 2 \right) \left( \frac{a}{2} + r - 1 \right) H_{r-2} \right] \right\}, \tag{173}
$$

welches eine Summe ist, deren einzelne Glieder, in Folge der Relation (167) oder auch:

$$H_{r-1} = \frac{\left(\frac{a}{2} - r + 2\right)\left(\frac{a}{2} + r - 1\right)}{2\,(r-1)\,b}\,H_{r-2}, \tag{174}$$

sich auf die Nulle reduziren, so lange diese Relation zwischen den mit $H$ bezeichneten Coefficienten wir lich Statt findet. Da man indess willkürlich bei dem Gliede, dessen Coefficient $H_r$ ist, die Reihe (16 abbrechen lässt, so sind $H_{r+1}$, $H_{r+2}$ ... nicht mehr die durch diese Relation gegebenen, sondern Nul es werden daher alle Glieder der Summe (173) bis zu demjenigen mit $x^{\frac{a}{2}-r}$ inclusive, der Nulle glei werden, das darauffolgende aber von Null verschieden und gleich:

$$(-1)^{r+1}\,e^{bx}\,x^{\frac{a}{2}-r-1}\left(\frac{a}{2} - r\right)\left(\frac{a}{2} + r + 1\right)H_r \tag{175}$$

ausfallen, die sämmtlichen darauffolgenden aber wieder verschwinden. Sohin sieht man, dass der pa ticuläre Werth (168), bei dem $(r+1)^{ten}$ Gliede abgebrochen, den ersten Theil der Differentialgleichu nicht auf Null, wohl aber auf den Ausdruck (175) reduzire, der für sich eines und zwar das letzte d Glieder von (168) ist, nur noch mit einem constanten Factor multiplizirt, dass es somit vortheilhaft s die Reihe abzubrechen bei demjenigen Gliede, für welches der Ausdruck (175) ein Minimum ist, u welches das $r^{te}$ ist, wenn man unter $r$ diejenige genügend gross vorausgesetzte Zahl versteht, die de Quotienten (172) den der Einheit nächsten Werth ertheilt. Es kann noch hinzugesetzt werden, das wenn in einer solchen Reihe die Zeichen wechseln, der wahre Werth des betreffenden particulären Int grales zwischen der Summe aus $r$ und aus $(r+1)$ Gliedern liegen muss. Aus diesen Betrachtungen fol dass solche halbconvergirende Reihen, ungeachtet des ungünstigen Auges, welches der Analyst in d Regel darauf zu werfen pflegt, zur numerischen Berechnung der Werthe von $y$, und zum Herausles der daraus folgenden Erscheinungen, wenigstens für grössere Werthe der Veränderlichen $x$ nicht ga nutzlos seien. Man kann sich indess, wenn man sie doch unanständig finden sollte, immer andere Form von bestimmten Integralen erscheinende verschaffen, und diess zwar auf mannigfache verschiede Arten, von denen hier nur einige hervorgehoben werden sollen; nur muss leider bemerkt werden, da in sehr vielen Fällen diese bestimmten Integrale keine andere numerische Berechnung zulassen, als d durch halbconvergirende Reihen. Immer kömmt es im Wesentlichen darauf an, dass man das unter d Form eines Differentials mit allgemeinem Exponenten vorkommende particuläre Integral entwickeln od wenigstens auf eine andere Form bringen könne, die der Berechnung zugängiger ist. Diess kann n nicht bloss geschehen auf die eben vorgetragene Weise, sondern auch dadurch, dass man die zu differe zirende Function in eine Reihe von Exponentiellen, oder die analoge eines, solche in sich enthaltend bestimmten Integrales verwandelt, und dann dem Differenziren unterwirft. So kann man z. B. zur Umg staltung der Formel (164) folgenden Weg einschlagen: In dem bestimmten Integrale, welches für $m >$ einen constanten endlichen Werth hat:

$$C = \int_0^\infty e^{-\lambda}\, \lambda^{m-1}\, d\lambda, \tag{176}$$

setzen wir $\lambda(u+b)$ anstatt $\lambda$ und erhalten, unter der Voraussetzung, dass $u+b$ immer positiv ist, was hier im ersten Theile des Werthes von $y$, Formel (164), da nach der Differentiation $u=b$ gesetzt werden muss, wirklich Statt findet:

$$\frac{C}{(u+b)^m} = \int_0^\infty e^{-\lambda(u+b)}\, \lambda^{m-1}\, d\lambda. \tag{177}$$

Es lässt sich, in Folge dieser Gleichung, der erste Theil des Werthes von $y$ auch so darstellen:

$$C_1 \left\{ \frac{d^{\frac{a}{2}}}{du^{\frac{a}{2}}} \int_0^\infty e^{-\lambda b + u(x-\lambda)}\, \lambda^{\frac{a}{2}}\, d\lambda \right\}_b = C_1\, e^{bx} \int_0^\infty e^{-2\lambda b}\, (x-\lambda)^{\frac{a}{2}}\, \lambda^{\frac{a}{2}}\, d\lambda. \tag{178}$$

Genau auf demselben Wege verschafft man sich auch einen Ausdruck für den zweiten Theil. Man formt nämlich das Integral (176) durch die Substitution von $\lambda(u-b)$ anstatt $\lambda$ um, darauf Rücksicht nehmend, dass, weil nach dem Differenziren $-b$ anstatt $u$ gesetzt werden muss, $u-b$ als eine negative Zahl zu betrachten sei. Diess gibt:

$$\frac{C}{(u-b)^m} = \int_0^{-\infty} e^{-\lambda(u-b)}\, \lambda^{m-1}\, d\lambda, \tag{179}$$

und der zweite Theil des Werthes von $y$ lässt sich offenbar so schreiben:

$$C_2 \left\{ \frac{d^{\frac{a}{2}}}{du^{\frac{a}{2}}} \int_0^{-\infty} e^{\lambda b + u(x-\lambda)}\, \lambda^{\frac{a}{2}}\, d\lambda \right\}_{-b} = C_2\, e^{-bx} \int_0^{-\infty} e^{2\lambda b}\, (x-\lambda)^{\frac{a}{2}}\, \lambda^{\frac{a}{2}}\, d\lambda, \tag{180}$$

und man hat:

$$y = C_1\, e^{bx} \int_0^\infty e^{-2\lambda b}\, (x-\lambda)^{\frac{a}{2}}\, \lambda^{\frac{a}{2}}\, d\lambda + C_2\, e^{-bx} \int_0^{-\infty} e^{2\lambda b}\, (x-\lambda)^{\frac{a}{2}}\, \lambda^{\frac{a}{2}}\, d\lambda. \tag{181}$$

Diese Formel gestattet keine Verwandlung von $a$ in $-a$, sie gibt also nur das Integral der Gleichung (161) nicht aber das der (160), welches letztere übrigens im zweiten Paragraphe bereits gefunden worden ist, und es ist nicht schwer zu zeigen, dass man, durch Entwicklung von $(x-\lambda)^{\frac{a}{2}}$ mittelst der Binomialformel und nachfolgende Integration, zur Gleichung (165) zurückgelange; es lässt sich aber auch anderseits *a posteriori* darthun, dass der eben gewonnene Ausdruck (181) die Differentialgleichung erfülle. Zeigen wir diess namentlich für den ersten Theil desselben, d. h. für:

$$y = e^{bx} \int_0^\infty e^{-2\lambda b}\, (x-\lambda)^{\frac{a}{2}}\, \lambda^{\frac{a}{2}}\, d\lambda, \tag{182}$$

woraus durch Differenziren:

$$(183)\qquad \frac{dy}{dx} = e^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}\,(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1}\,\lambda^{\frac{a}{2}}\left[b\,(x-\lambda)+\frac{a}{2}\right]d\lambda,$$

$$(184)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}\,(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-2}\,\lambda^{\frac{a}{2}}\left[b^2(x-\lambda)^2+ab\,(x-\lambda)+\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-1\right)\right]d\lambda$$

folgt. Nun multiplizire man die erste dieser drei Gleichungen mit $-b^2x$, die zweite mit $-a$, die dritte mit $x$ und addire sie, so erhält man zunächst:

$$(185)\qquad \begin{aligned} &a\,b\,e^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}\,(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1}\,\lambda^{\frac{a}{2}+1}\,d\lambda - \frac{a^2}{2}\,e^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}\,(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1}\,\lambda^{\frac{a}{2}}\,d\lambda + \\ &+\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-1\right)x\,e^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}\,(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-2}\,\lambda^{\frac{a}{2}}\,d\lambda,\end{aligned}$$

sodann, durch das Verfahren des theilweisen Integrirens:

$$(186)\qquad \begin{aligned} a\,b\int e^{-2\lambda b}\,(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1}\,\lambda^{\frac{a}{2}+1}\,d\lambda &= -\frac{a}{2}\,e^{-2\lambda b}\,(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1}\,\lambda^{\frac{a}{2}+1} + \\ &+\frac{a}{2}\int e^{-2\lambda b}\,(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-2}\,\lambda^{\frac{a}{2}}\left[\left(\frac{a}{2}+1\right)(x-\lambda)-\left(\frac{a}{2}-1\right)\lambda\right]d\lambda,\end{aligned}$$

also innerhalb der Grenzen 0 und $\infty$:

$$(187)\qquad ab\int_0^\infty e^{-2\lambda b}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1}\,\lambda^{\frac{a}{2}+1}\,d\lambda = \frac{a}{2}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-2}\,\lambda^{\frac{a}{2}}\left[\left(\frac{a}{2}+1\right)(x-\lambda)-\left(\frac{a}{2}-1\right)\lambda\right]d\lambda,$$

ein Werth, der den Ausdruck (185) verschwinden macht. Genau auf dieselbe Weise überzeugt man sich von der Richtigkeit des zweiten Bestandtheiles von $y$. Es kann also die Formel (181) für gebrochene jedoch positive Werthe von $\frac{a}{2}$ an die Stelle der (165) gesetzt werden.

Ein zweites Mittel die Differentiale mit allgemeinen Exponenten umzuformen, bietet uns die Fourier'sche Formel:

$$(188)\qquad f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(u-\lambda)\sqrt{-1}}\,f(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda,$$

deren Ableitung wir aus dem doppelten Grunde geben, weil diese Formel, mit Rücksicht auf ihre universelle Wichtigkeit, einerseits überhaupt noch viel zu wenig beachtet wird, und auch andererseits in einem Werke wie dieses, das von ihr den ausgedehntesten Gebrauch macht, ihrer vollen Bedeutung nach erwo-

gen zu werden verdient. Wir bezeichnen zu diesem Zwecke das in der eben angeführten Formel enthaltene Doppelintegral, um dessen Werth es sich augenscheinlich handelt mit $J$, so dass wir haben:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(u-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda, \tag{189}$$

und können dasselbe $J$, die daselbst vorkommende imaginäre Exponentielle durch ihren trigonometrischen Werth wiedergebend, auch ersetzen durch:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \cos\alpha(u-\lambda) f(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda + \sqrt{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \sin\alpha(u-\lambda) f(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda.$$

Der zweite, mit dem Factor $\sqrt{-1}$ verbundene Theil dieses Ausdruckes ist gleich Null, weil die Function der Veränderlichen $\alpha$, nach welcher die erste Integration zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu vollführen ist, die Eigenschaft hat nur das Zeichen zu ändern, wenn $+\alpha$ in $-\alpha$ verwandelt wird, und somit das bestimmte Integral nach $\alpha$ eine Summe andeutet, die aus positiven und negativen, sich paarweise aufhebenden Gliedern besteht. Wir schreiben also kürzer:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \cos\alpha(u-\lambda) f(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda, \tag{190}$$

oder, weil $\cos\alpha(u-\lambda)$ sich gar nicht ändert bei der Verwandlung von $+\alpha$ in $-\alpha$, und somit das vorliegende Integral nach $\alpha$ eine Summe andeutet von Gliedern, die sich paarweise addiren:

$$J = 2\int_{0}^{\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \cos\alpha(u-\lambda)\, f(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda. \tag{191}$$

Diess ist offenbar der reelle Theil des imaginären Integrales:

$$J' = 2\int_{0}^{\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(u-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda)\, d\alpha . d\lambda,$$

und dieses ist wieder die Grenze, der sich folgendes andere bestimmte Integral, bei dem unendlichen Abnehmen der darin vorhandenen positiven Constante $k$, fortwährend nähert:

$$J'' = 2\int_{0}^{\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(-k+(u-\lambda)\sqrt{-1})} f(\lambda)\, d\alpha . d\lambda.$$

Man wird daher, um zu dem Werthe des Integrales $J$ zu gelangen, mit der Berechnung des $J''$ anfangen können. In dem gefundenen Werthe des letzteren wird man zunächst $k=0$ nehmen, sodann aber das Glied mit $\sqrt{-1}$ auslassen, wodurch sich derselbe zuerst auf $J'$, dann auf $J$ zurückziehen wird. — Es ist hierbei freilich nicht in Abrede zu stellen, dass das Integral $J$ nach der gegenwärtigen Ableitungsweise nur als Grenze, der sich ein anderes, bei dem unendlichen Abnehmen des Parameters $k$

fortwährend nähert, einen bestimmten Werth habe; und wirklich kömmt dem in der Fourier'sche mel vorkommenden Doppelintegrale in sehr vielen Fällen derselbe Charakter der Unbestimmthei Werthe nach zu, wie etwa dem Integrale:

$$\int_0^\infty \cos\alpha\, d\alpha,$$

eine Unbestimmtheit, die allsogleich wegfällt, wenn man dieses Integral als die Grenze betrachte sich folgendes andere:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha k}.\cos\alpha\, d\alpha,$$

bei dem fortwährenden Abnehmen von $k$ nähert. Als eine solche Grenze betrachten wir daher gege tig das fragliche $J$.

Eine Integration nach $\alpha$ zur Ermittlung von $J''$ lässt sich augenscheinlich unmittelba führen; da man nämlich allgemein hat:

$$\int e^{m\alpha}\, d\alpha = \frac{1}{m}\, e^{m\alpha},$$

und somit, zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ nehmend, wenn $m$ entweder negativ oder imagin negativem reellen Theile ist:

$$\int_0^\infty e^{m\alpha}\, d\alpha = -\frac{1}{m},$$

so erhält man auch sofort:

$$\int_0^\infty e^{\alpha(-k+(u-\lambda)\sqrt{-1})}\, d\alpha = \frac{1}{k-(u-\lambda)\sqrt{-1}},$$

und, indem man den Nenner reell macht und das Reelle von dem Imaginären sondert:

$$\int_0^\infty e^{\alpha(-k+(u-\lambda)\sqrt{-1})}\, d\alpha = \frac{k}{k^2+(u-\lambda)^2} + \frac{(u-\lambda)\sqrt{-1}}{k^2+(u-\lambda)^2}.$$

Lässt man den imaginären Theil hier gleich ausser Acht, da diess zur Auffindung von $J$ hin nothwendig ist, so ist die Grenze, gegen welche das folgende einfache Integral, bei dem allmä Verschwinden des $k$ convergirt:

$$2\int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{k.f(\lambda)\, d\lambda}{k^2+(u-\lambda)^2} \tag{192}$$

das gesuchte $J$ selbst. In Bezug auf die Berechnung desselben haben wir also das Recht, $k$ im Vo als einen sehr kleinen positiven Bruch anzusehen; diess hat zur unmittelbaren Folge, dass auch di

tion unter dem Integralzeichen sehr klein, und von der Ordnung des Parameters $k$ wird, so lange $\lambda$ von $u$ verschieden ist, und nur für solche Werthe von $\lambda$, welche nahe an $u$ liegen, oder für welche $u-\lambda$ auch eine sehr kleine Differenz von der Ordnung des $k$ ist, kann diese Function einen nicht nur nicht unendlich kleinen, sondern sogar einen sehr grossen Werth bekommen. Betrachtet man sohin dieses Integral als Summe, so werden offenbar nur diejenigen Glieder derselben, für welche $\lambda$ nahe an $u$ streift, einen wesentlich von Null verschiedenen Werth erlangen; wenn man daher:

$$\lambda = u + kv \tag{193}$$

setzt, unter $v$ eine anstatt der $\lambda$ neu einzuführende Veränderliche verstanden, so wird sich $kv$ immer als ein sehr kleiner Zusatz zu $u$ ansehen, und somit:

$$f(\lambda) = f(u+kv)$$

in eine sehr convergirende Reihe, mittelst der Taylor'schen Formel, entwickeln lassen, unter der Bedingung wenigstens, dass, für den dem $u$ ertheilten Werth, die Function $f(u)$ endlich und stetig bleibt; d. h. wir haben:

$$f(\lambda) = f(u) + f'(u+\theta kv)\, kv.$$

Da noch überdiess: $d\lambda = kdv$ ist und $u-\lambda = -kv$, also: $v = \dfrac{\lambda - u}{k}$, so wird:

$$\int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{k.f(\lambda)\,d\lambda}{k^2+(u-\lambda)^2} = \int_{\frac{\lambda'-u}{k}}^{\frac{\lambda''-u}{k}} \frac{f(u+kv)\,dv}{1+v^2} = f(u)\int_{\frac{\lambda'-u}{k}}^{\frac{\lambda''-u}{k}} \frac{dv}{1+v^2} + k\int_{\frac{\lambda'-u}{k}}^{\frac{\lambda''-u}{k}} f'(u+\theta kv)\,\frac{vdv}{1+v^2}. \tag{194}$$

Die Taylor'sche Reihe bricht hier gleich nach dem ersten Gliede mit ihrer bekannten Ergänzung ab, und es ist $\theta$ eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl. Das letzte in dieser Gleichung vorkommende Glied:

$$k\int_{\frac{\lambda'-u}{k}}^{\frac{\lambda''-u}{k}} f'(u+\theta kv)\,\frac{vdv}{1+v^2} \tag{195}$$

ist, wegen des verschwindenden Factors $k$, der ihm anhängt, eine verschwindende Grösse, nachdem der andere Factor, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Function $f$, einen endlichen Werth behält, der zwischen angebbare endliche Grenzen fällt. In der That: da die Function $f'(u+\theta kv)$ bei allen möglichen Werthen, die man dem $v$ innerhalb der Integrationsgrenzen ertheilen kann, nur Werthe zu bekommen vermag, die zwischen $f'(\lambda')$ und $f'(\lambda'')$ liegen, da ferner, vermöge der zwischen den Grenzen $\lambda'$ und $\lambda''$ vorausgesetzten Stetigkeit der Function $f(u)$, hier nur lauter endliche Werthe der Function $f'$ vorhanden sind, so wird offenbar auch der grösste von ihnen, den wir $G$ und der kleinste, den wir $K$ nennen wollen, ein endlicher sein; da noch überdiess der rückständige Differentialfactor:

$$\frac{vdv}{1+v^2}$$

zwischen den Integrationsgrenzen einerlei Zeichen beibehält, so liegt offenbar der Werth des obgenannten Gleichungsgliedes (195) zwischen:

$$kG\int_{\frac{\lambda'-u}{k}}^{\frac{\lambda''-u}{k}} \frac{vdv}{1+v^2} \quad \text{und} \quad kK\int_{\frac{\lambda'-u}{k}}^{\frac{\lambda''-u}{k}} \frac{vdv}{1+v^2}$$

und es bedeutet, da überhaupt:

$$\int \frac{vdv}{1+v^2} = \frac{1}{2}\, log\, (1+v^2),$$

und somit:

$$\int_{\frac{\lambda'-u}{k}}^{\frac{\lambda''-u}{k}} \frac{vdv}{1+v^2} = \frac{1}{2}\, log\, \frac{(\lambda''-u)^2+k^2}{(\lambda'-u)^2+k^2},$$

ist, so lange keine der Differenzen $\lambda''-u$ und $\lambda'-u$ von der Ordnung der verschwindenden Grösse $k$ sind:

$$\int_{\frac{\lambda'-u}{k}}^{\frac{\lambda''-u}{k}} \frac{vdv}{1+v^2} = \frac{1}{2}\, log\, \frac{(\lambda''-u)^2}{(\lambda'-u)^2} = log\, \frac{\lambda''-u}{\lambda'-u},$$

eine endliche Grösse, die wir mit $h$ bezeichnen, woraus wir unmittelbar folgern, dass der Werth des obigen Gliedes (195) zwischen die zwei verschwindenden Zahlen:

$$khG \quad \text{und} \quad khK$$

falle und sohin selber eine verschwindende Grösse sei, was sich übrigens auch für solche Fälle ohne Mühe darthuen liesse, wo entweder die Differenz $\lambda''-u$ oder $\lambda'-u$ der Nulle gleich wäre.

Es handelt sich demnach nur noch um den Werth von:

$$f(u)\int_{\frac{\lambda'-u}{k}}^{\frac{\lambda''-u}{k}} \frac{dv}{1+v^2} = f(u)\left[arc\,.\,tang\,\frac{\lambda''-u}{k} - arc\,.\,tang\,\frac{\lambda'-u}{k}\right]. \tag{196}$$

Um den Werth, den dieses bestimmte Integral annimmt, zu erörtern, unterscheiden wir drei Fälle:

Erstens: den, wo $u$ zwischen $\lambda'$ und $\lambda''$ fällt, sohin Eine der Differenzen $\lambda''-u$ und $\lambda'-u$ positiv, die andere aber negativ ausfällt,

Zweitens: den, wo $u$ ausserhalb der Grenzen $\lambda'$ und $\lambda''$ liegt, wo also beide Differenzen einerlei Zeichen haben,

**Drittens.** den Fall, wo $u$ mit Einer der beiden Zahlen $\lambda'$ und $\lambda''$ zusammenfällt, also Eine der beiden Differenzen verschwindet.

Denken wir uns jetzt unter dem an sich vieldeutigen Symbole *arc tang t* stets, nach der angenommenen Sitte, wenn nicht ausdrücklich etwas Anderes erinnert wird, den seiner absoluten Länge nach kleinsten Bogen, der die Tangente $t$ besitzt, so sind die Werthe, die das obige bestimmte Integral (196) in den drei angedeuteten Fällen, für ein verschwindendes $k$ annimmt, beziehungsweise und ohne Rücksicht auf ihr Zeichen:

$$\pi \cdot f(u), \quad 0, \quad \frac{\pi}{2} \cdot f(u).$$

Der erste Fall ist eben derjenige, dessen Stattfinden hier postulirt wird; wir haben daher unter der ausdrücklichen Bedingung, dass $u$ zwischen $\lambda'$ und $\lambda''$ fällt:

$$J = 2\pi \cdot f(u), \tag{197}$$

und sohin:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(u-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda)\, d\alpha \,.\, d\lambda.$$

Diese so eben bewiesene Fourier'sche Formel besitzt die zu so vielen Zwecken in der Analysis unschätzbare und den unseren gleichfalls dienende Eigenschaft: eine jede stetige Function und eine jede andere, mindestens innerhalb der Gränzen der Variablen wo sie stetig ist, in Form einer Reihe von Exponentiellen wiederzugeben, eine Form, die sich bekanntlich den Operationen des Differenzirens und Integrirens mit beliebiger Ordnungszahl des Differential- oder Integral-Zeichens mit besonderer Leichtigkeit fügt.

Man wird daher gar keine Mühe finden, mittelst dieser Formel jeden Ausdruck von der Form:

$$\left\{ \frac{d^\mu}{du^\mu} \left[ e^{ux} F(u) \right] \right\}_\alpha \tag{198}$$

umzugestalten in:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda'} e^{-\alpha\lambda\sqrt{-1}+u(x+\alpha\sqrt{-1})} (x + \alpha\sqrt{-1})^\mu F(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda. \tag{199}$$

Ein drittes Mittel zu demselben Zwecke bietet eine von Liouville im *Journal de l'école polytechnique, Tome XIII.* bewiesene Formel:

$$\int^\mu \varphi(u)\, du^\mu = \frac{d^{-\mu}}{du^{-\mu}} [\varphi(u)] = \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)} \int^\infty \varphi(u+\alpha)\, \alpha^{\mu-1}\, d\alpha, \tag{200}$$

in welcher $\Gamma(\mu)$ das Euler'sche Integral:

$$\int_0^\infty e^{-\theta}\,\theta^{\mu-1}\,d\theta,$$

$\mu$ aber eine positive Zahl bedeutet, und deren Beweis wir hier genau so, wie ihn der Verfasser ge
hat, folgen lassen wollen. Es wird in demselben vorausgesetzt, dass $\varphi(u)$ nicht beliebig sei, so
einer gewissen Bedingung entspreche; die Entwicklung nämlich dieser Function in eine Reihe von
nentiellen:

$$\mathbf{S}\,[A_m e^{mu}]$$

darf nur negative $m$ oder wenigstens solche imaginäre enthalten, deren reeller Theil negativ ist
Nothwendigkeit dieser Bedingung erhellt schon daraus, weil sonst:

$$\int_0^\infty \varphi(u+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha$$

unendlich wäre, und ihr Stattfinden wird unmittelbar aus dem Umstande, dass $\varphi(u)=0$ ist für $u$
erkannt. — Um diese Formel zu beweisen, ersetzt man $\varphi(u)$ durch:

$$\mathbf{S}\,[A_m e^{mu}]$$

und sucht den Werth des Integrales:

$$\int_0^\infty \varphi(u+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha.$$

Bezeichnen wir in der That dieses Integral durch $z$, so erhalten wir nach der angede
Substitution:

$$z=\int_0^\infty \mathbf{S}\,[A_m e^{m(u+\alpha)}\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha],$$

oder, wenn man die Ordnung der Zeichen $\mathbf{S}$ und $\int$ umkehrt, was erlaubt ist, wegen der Unabhäng
der dadurch angedeuteten Operationen:

$$z=\mathbf{S}\left[A_m e^{mu}\int_0^\infty e^{m\alpha}\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha\right].$$

Nun setze man in diesem Integral $m\alpha=-\theta$, indem man bedenkt, dass $m$ immer n
ist, so erhält man:

$$\int_0^\infty e^{m\alpha}\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha=(-1)^\mu\,\frac{\int_0^\infty e^{-\theta}\,\theta^{\mu-1}\,d\theta}{m^\mu}=\frac{(-1)^\mu\,\Gamma(\mu)}{m^\mu}.$$

Diess gibt den Werth von $z$:

$$z = (-1)^{\mu}\, \Gamma(\mu)\, \mathrm{S}\left[A_m \frac{e^{mu}}{m^{\mu}}\right],$$

und weil:

$$\mathrm{S}\left[A_m \frac{e^{mu}}{m^{\mu}}\right] = \int^{\mu} \varphi(u)\, du^{\mu}$$

ist, so wird:

$$z = (-1)^{\mu}\, \Gamma(\mu) \int^{\mu} \varphi(u)\, du^{\mu},$$

und, wenn man anstatt $z$ das hiedurch angedeutete Integral zurücksetzt:

$$\int_0^{\infty} \varphi(u+\alpha)\, \alpha^{\mu-1}\, d\alpha = (-1)^{\mu}\, \Gamma(\mu) \int^{\mu} \varphi(u)\, du^{\mu}, \tag{201}$$

was bereits die Formel ist, die zu beweisen war.

Da hier der Exponent $\mu$ positiv vorausgesetzt wurde, so wird man die eben bewiesene Formel nur zur Verwandlung der Differentiale mit negativen Exponenten benützen können. Es gibt aber Liouville an derselben Stelle eine andere Formel an, mittelst welcher auch Differentialquotienten mit beliebigen positiven Exponenten umgeformt werden können. Diese wird auf ungemein einfache Weise aus der vorigen abgeleitet. In der That: nennen wir, um zu einem Ausdruck für:

$$\frac{d^{\mu}}{du^{\mu}}[\varphi(u)]$$

zu gelangen, $n$ eine beliebige ganze Zahl, die grösser ist als $\mu$ und $p$ diejenige gebrochene, um welche $n$ das $\mu$ überschreitet, so dass:

$$\mu = n - p$$

wird, so hat man auch:

$$\frac{d^{\mu}\varphi(u)}{du^{\mu}} = \frac{d^{n-p}\varphi(u)}{du^{n-p}} = \frac{d^{n}\int^{p}\varphi(u)\, du^{p}}{du^{n}}.$$

Da $p$ eine positive Zahl ist, so kann man in der Formel (201) $\mu$ durch $p$ ersetzen; diess gibt:

$$\int^{p} \varphi(u)\, du^{p} = \frac{1}{(-1)^{p}\, \Gamma(p)} \int_0^{\infty} \varphi(u+\alpha)\, \alpha^{p-1}\, d\alpha,$$

und, wenn man von beiden Theilen den $n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten nimmt:

$$\frac{d^{\mu}\varphi(u)}{du^{\mu}} = \frac{1}{(-1)^{p}\, \Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{d^{n}\varphi(u+\alpha)}{du^{n}}\, \alpha^{p-1}\, d\alpha. \tag{202}$$

Von dieser Formel wird man Gebrauch machen, nicht nur, wenn man einen Differentialquotienten mit reellem, übrigens beliebigem Exponenten in ein bestimmtes Integral umzugestalten wünscht, son-

dern auch, wenn $\mu$ eine imaginär... Zahl, deren numerischer Werth den des reellen ... $\mu = n - p$ und:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-\theta}\,\theta^{p-1}\,d\theta, \tag{203}$$

d. h. gleich einer endlichen Grösse, wie sich für solche imaginäre $p$, deren reeller Theil positiv ist, ohne Mühe beweisen lässt. Den numerischen Werth dieses $\Gamma(p)$ zu kennen, ist nicht nöthig, da er sich hier in der Constante der Integration verliert.

Ueberhaupt ist zu bemerken, dass es an Mitteln, eine Umstaltung der erhaltenen Ausdrücke zu bewirken, und diess zwar in die mannigfaltigsten Formen, eben nicht fehle, und dass zu diesem Zwecke dienliche Formeln von mehreren Analysten, vorzüglich von Cauchy, in den *Exercices de mathématique*, von Liouville am erwähnten Orte und Anderen aufgespeichert worden sind. Wir werden selbst in diesem Werke noch einige spezielle derselben zur Sprache bringen.

Nachdem wir die Hauptformen, unter welchen das Integral der Differentialgleichung (160) erscheinen kann, und die allgemeinen Methoden diese Formen in einander zu verwandeln so umständlich erörtert haben, als zu unsern Zwecken nothwendig erschien, kehren wir zur Gleichung (33) des zweiten Paragraphes zurück, und wollen auch hier diejenigen Fälle kurz berühren, in welchen das Integral derselben einer Vervollständigung bedarf. Wir bekamen allda:

$$\int \frac{U_0}{U_1}\,du = A \log(u-\alpha) + A' \log(u-\beta) = \log\left[(u-\alpha)^A (u-\beta)^{A'}\right], \tag{204}$$

und zur Bestimmung der Integrationsgränzen:

$$(u-\alpha)^A (u-\beta)^{A'} e^{ux} = 0,$$

...ollständigen, nur mit einer einzigen willkürlichen Constante versehene
...ponenten $A$ oder $A'$, oder beide negativ sind. Es sei zu
...geht in:

was ein endliches, mit einer Exponentielle $e^{\beta x}$ multiplizirtes algebraisches Polynom gibt, so oft entweder $A$ oder $A'$ eine ganze Zahl bedeutet, im entgegengesetzten Falle aber in eine Reihe von der Sorte der halbconvergirenden übergeht, anstatt deren man, irgend eines der früher angezeigten Mittel in Anwendung bringend, ein bestimmtes Integral wird substituiren können. Man wird sohin die Formeln (44) und (45) des zweiten Paragraphes durch folgende ersetzen können:

$$y = C_1 \int_\alpha^{-\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1}\, du}{(u-\beta)^{A'+1}} + C_2 \left\{ \frac{d^{A'}}{du^{A'}} \left[ e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} \right] \right\}_\beta ,$$

$$y = C_1 \int_\alpha^{+\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1}\, du}{(u-\beta)^{A'+1}} + C_2 \left\{ \frac{d^{A'}}{du^{A'}} \left[ e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} \right] \right\}_\beta , \tag{209}$$

die nun als Integral der Differentialgleichung:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(a_1 + b_1 x) + y(a_0 + b_0 x) = 0$$

dastehen, und deren erste für positive, die andere für negative $x$ giltig ist.

Wären $A$ und $A'$ beide negativ, so dass an die Stelle der Gleichungen (206) und (207) folgende andere treten:

$$\frac{e^{ux}}{(u-\alpha)^A (u-\beta)^{A'}} = 0 ,$$

und:

$$V = \frac{1}{(u-\alpha)^{A+1} (u-\beta)^{A'+1}} ,$$

so erscheint das Integral derselben Differentialgleichung in folgender, mit zwei willkürlichen Constanten versehener Form:

$$y = C_1 \left\{ \frac{d^A}{du^A} \left[ \frac{e^{ux}}{(u-\beta)^{A'+1}} \right] \right\}_\alpha + C_2 \left\{ \frac{d^{A'}}{du^{A'}} \left[ \frac{e^{ux}}{(u-\alpha)^{A+1}} \right] \right\}_\beta , \tag{210}$$

wofür man dann wieder bestimmte Integrale wird einführen können. Verschwindet einer der beiden Exponenten, etwa $A'$, so ist diess ein Zeichen, dass die mit $U_0$ und $U_1$ bezeichneten Polynome den gemeinschaftlichen Factor $(u-\beta)$ besitzen, dass also die Exponentielle $e^{\beta x}$ ein particuläres Integral sei. Wir erhalten also den mit zwei Constanten versehenen Werth von $y$:

$$y = C_1 e^{\beta x} + C_2 \int_\alpha^{-\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1}}{u-\beta} du \tag{211}$$

für positive $A$ und positive $x$,

$$y = C_1 e^{\beta x} + C_2 \int_\alpha^{+\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1}}{u-\beta} du \tag{212}$$

für positive $A$ und negative $x$, endlich:

$$y = C_1 e^{\beta x} + C_2 \left\{ \frac{d^A}{du^A} \left[ \frac{e^{ux}}{u-\beta} \right] \right\}_\alpha \tag{213}$$

für negative $A$ und beliebige $x$. Es wird hier, gleich wie in den übrigen Fällen, vorausgesetzt, dass, wenn irgend einer der Exponenten $A$ oder $A'$ negativ ausfallen sollte, man allsogleich anstatt desselben $-A$ schreibt, und somit in den Formeln (211), (212) und (213) die vorkommenden $A$ bereits positiv gedacht werden müssen.

Wenn endlich $\beta = \alpha$ ist, also die Gleichung $U_1 = 0$ gleiche Wurzeln hat, so wird man, zur Vervollständigung des, nur mit einer einzigen willkürlichen Constante verbundenen Integrales, die allbekannte Methode der Variation der willkürlichen Constanten in Anwendung bringen.

Es ist nur noch übrig einige Aufmerksamkeit der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b_1 x \frac{dy}{dx} + y(a_0 + b_0 x) = 0, \tag{214}$$

die bereits im zweiten Paragraphe integrirt wurde, und in ein Paar speziellen Fällen ein unvollständiges Integral gab, zu schenken. Wir erhielten an dem bezeichneten Orte:

$$V = (b_1 u + b_0)^{A-1} e^{\frac{u^2}{2b_1} - \frac{b_0 u}{b_1^2}}, \tag{215}$$

und gelangten für verschwindende und negative Werthe von $A$ zu einem, nur mit einer einzigen Constante versehenen, particulären Integrale, ausgedrückt durch die Formeln (74) und (75).

Im ersten dieser beiden Fälle haben die Polynome $U_0$ und $U_1$ den gemeinschaftlichen Factor $(b_0 + b_1 u)$, folglich wird die Exponentielle:

$$e^{-\frac{b_0}{b_1} x}$$

der Differentialgleichung Genüge leisten; es tritt somit für $A = 0$ an die Stelle der Formel (74) folgende andere:

$$y = C_1 e^{-\frac{b_0}{b_1} x} + C_2 \int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} \frac{du}{b_0 + b_1 u}, \tag{216}$$

die jetzt als allgemeines Integral der Gleichung (214) dasteht, wenn $b_1$ positiv, und zwischen den Coefficienten $a_0$, $b_0$ und $b_1$ folgende Relation vorhanden ist:

$$A = \frac{a_0}{b_1} + \frac{b_0^2}{b_1^3} = 0. \tag{217}$$

Ist dagegen $b_1$ negativ, und handelt es sich somit um die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - b_1 x \frac{dy}{dx} + y(a_0 + b_0 x) = 0, \tag{218}$$

während die Relation (217) fortbesteht, so bekommen wir anstatt der Formel (75, §. 2) folgende vollständigere:

$$y = C_1 e^{\frac{b_0}{b_1} x} + C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} \frac{du}{b_0 - b_1 u}, \tag{219}$$

Im zweiten Falle, wo $A$ negativ ist, wo also an die Stelle der Formel (215) die andere:

$$V = \frac{e^{\frac{u^2}{2b_1} - \frac{b_0 u}{b_1^2}}}{b_1^{A+1}\left(u + \frac{b_0}{b_1}\right)^{A+1}} \tag{220}$$

tritt, erscheint Ein particuläres Integral der Gleichung (214) in Form eines Differentialquotienten:

$$y = C \left\{ \frac{d^A}{du^A} \left[ e^{u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right) + \frac{u^2}{2b_1}} \right] \right\}_{-\frac{b_0}{b_1}}, \tag{221}$$

die auch eine Verwandlung gestattet in ein Produkt aus einer Exponentielle in eine nach absteigenden Potenzen von $x - \frac{b_0}{b_1^2}$ geordnete Reihe, nämlich:

$$\begin{aligned} y = C e^{-\frac{b_0}{b_1} x + \frac{3b_0^2}{2b_1^3}} \Bigg[ & \left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)^A - A \frac{b_0}{b_1^2} \left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)^{A-1} + \\ & + \frac{A(A-1)}{2} \left(\frac{b_0^2}{b_1^4} + \frac{1}{b_1}\right) \left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)^{A-2} - \frac{A(A-1)(A-2)}{2.3} \left(\frac{b_0^3}{b_1^6} + \frac{3b_0}{b_1^3}\right) \left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)^{A-3} + \ldots \Bigg], \end{aligned} \tag{222}$$

welche jederzeit abbricht, wenn $A$ eine ganze positive Zahl ist, im entgegengesetzten Falle aber unbrauchbar wird, was schon der unmittelbare Anblick ihres $2n^{\text{ten}}$ und $(2n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes lehrt, denen wir, um den ganzen Bau der Reihe klar vor Augen zu haben, hier eine Stelle gönnen:

$$\begin{aligned} & \frac{A(A-1) \ldots (A-2n+1)}{2 \ldots\ldots 2n} \left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)^{A-2n} \left(\frac{b_0^{2n}}{b_1^{4n}} + \frac{2n(2n-1)}{2} \frac{b_0^{2n-2}}{b_1^{4n-3}} + \right. \\ & \left. + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.4} \frac{b_0^{2n-4}}{b_1^{4n-6}} + \ldots + \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots 1}{2.4.6 \ldots 2n} \frac{1}{b_1^n}\right); \end{aligned} \tag{223}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{A(A-1) \ldots (A-2n)}{2.3 \ldots (2n+1)} \left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)^{A-2n-1} \left(\frac{b_0^{2n+1}}{b_1^{4n+2}} + \frac{(2n+1)2n}{2} \frac{b_0^{2n-1}}{b_1^{4n-1}} + \right. \\ & \left. + \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{2.4} \frac{b_0^{2n-3}}{b_1^{4n-4}} + \ldots + \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)\ldots 2}{2.4.6 \ldots 2n} \frac{b_0}{b_1^{n+2}}\right). \end{aligned} \tag{224}$$

Mit Hilfe der Formeln (223) und (224), die das $2n^{\text{te}}$ und das $(2n+1)^{\text{te}}$ Glied der Reihe geben, wird man nun das entsprechende particuläre Integral jedesmal construiren können, wenn $A$ eine beliebig gross gedachte ganze Zahl ist; im entgegengesetzten Falle wird man besser thun, einen Ausdruck

desselben particulären Werthes in Form eines bestimmten Integrals anstatt des (221) zu substituiren, was hier keinen Schwierigkeiten unterliegt.

Wir verwenden zu diesem Zwecke, nur um ein bisher noch nicht gebrauchtes Mittel zur Sprache zu bringen, das Laplace'sche Integral:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \tag{225}$$

dessen Ableitung wir hier nach einer minder bekannten, aber äusserst einfachen und doch sehr fruchtbaren Methode geben, die von Krone herrührt und in der Theorie der bestimmten Integrale beinahe allgemeine Anwendbarkeit besitzt. Sie besteht dem Wesen nach darin, dass man in das bestimmte Integral, dessen Werth zu ermitteln ist, durch bekannte Umformungen und Substitutionen Einen oder mehrere constante Parameter einführt, sodann aber mit eben so vielen bestimmten Integralen, von bekanntem numerischen Werthe des Productes derselben, in welchen diese Parameter als Variable enthalten sind, multiplizirt und integrirt; was möglich ist, wenn man diese letzteren bestimmten Integrale schicklich gewählt hat.

Um diese Methode klar zu machen, bringen wir ein Paar Beispiele und wählen zuerst das früher erwähnte Laplace'sche Integral, oder vielmehr ein anderes, in welchem dieses als specieller Fall enthalten ist, d. h.:

$$\int_0^\infty e^{-\mu x^2}\,dx = A. \tag{226}$$

Der Werth $A$ dieses Integrales ist ein endlicher, wenn $\mu$ eine in folgender Form enthaltene imaginäre Zahl ist:

$$\mu = h + k\sqrt{-1}, \tag{227}$$

deren reeller Theil $h > 0$ sein muss, und gestaltet sich offenbar als eine noch zu ermittelnde Function dieser Grösse $\mu$.

Wir führen nun zuvörderst, dadurch, dass wir $ax$ anstatt der Variablen $x$ setzen, unter $a$ eine reelle positive Constante verstanden, einen neuen Parameter $a$ ein, und erhalten sofort:

$$A = \int_0^\infty e^{-\mu a^2 x^2}\,a\,dx.$$

Es ist aber auch:

$$A = \int_0^\infty e^{-\mu a^2}\,da;$$

sohin erhält man durch Multiplication dieser beiden Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-\mu a^2}\,da \int_0^\infty e^{-\mu a^2 x^2}\,a\,dx = A^2,$$

und durch Vereinigung der Differentialfunctionen unter ein Doppelintegral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\mu a^2(1+x^2)}\, a da . dx = A^2.$$

Eine Integration, und zwar die nach $a$, lässt sich hier unmittelbar vollführen, denn es ist:

$$\int e^{-\mu a^2(1+x^2)}\, a da = -\frac{e^{-\mu a^2(1+x^2)}}{2\mu(1+x^2)},$$

sohin, mit Rücksicht auf den obenangeführten Werth von $\mu$, zwischen den Gränzen 0 und $\infty$:

$$\int_0^\infty e^{-\mu a^2(1+x^2)}\, a da = \frac{1}{2\mu(1+x^2)},$$

und es ist nur noch übrig dieses Resultat mit $dx$ zu multipliziren und abermals zwischen den Gränzen 0 und $\infty$ zu integriren, um zu erhalten:

$$A^2 = \frac{1}{2\mu}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4\mu} = \frac{\pi h}{4(h^2+k^2)} - \frac{\pi k\sqrt{-1}}{4(h^2+k^2)},$$

oder, wenn wir:

$$h = r\cos\varphi, \qquad k = r\sin\varphi, \qquad h^2 + k^2 = r^2$$

setzen:

$$A^2 = \frac{\pi}{4r}\left[\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\sin\varphi\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{r}}\left[\cos{}^1\!/_2\varphi - \sqrt{-1}\,\sin{}^1\!/_2\varphi\right]. \tag{228}$$

Substituirt man nun auch in das mit $A$ bezeichnete Integral (226) anstatt $\mu$ seinen imaginären Werth (227) und verwandelt die hervorgehende imaginäre Exponentielle in das ihr entsprechende trigonometrische Binom, so wird man die Gleichung (228) in zwei zerfällen können, indem ihre reellen Bestandtheile für sich, und die imaginären abermals für sich eine Gleichung bilden; man erhält nämlich:

$$\int_0^\infty e^{-hx^2}\cos kx^2\, dx = {}^1\!/_2\sqrt{\frac{\pi}{r}}\,\cos{}^1\!/_2\,\varphi, \tag{229}$$

$$\int_0^\infty e^{-hx^2}\sin kx^2\, dx = {}^1\!/_2\sqrt{\frac{\pi}{r}}\,\sin{}^1\!/_2\,\varphi. \tag{230}$$

Setzt man in diesen beiden Formeln erst $k=0$, dann aber $h=0$, so erhält man die Werthe von folgenden drei bestimmten Integralen, deren erstes das Laplace'sche Integral (226) ist:

$$\int_0^\infty e^{-hx^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h}} \tag{231}$$

$$\int_0^\infty \cos kx^2\,dx = \int_0^\infty \sin kx^2\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}. \tag{232}$$

In all den vier zuletzt gewonnenen Formeln kann man, unbeschadet ihrer Richtigkeit, anstatt der Gränzen 0 und $\infty$ auch $-\infty$ und 0 substituiren. Hievon überzeugt man sich, indem man $-x$ anstatt der Variablen $x$ einführt. Addirt man nun die so gewonnenen neuen vier Gleichungen beziehungsweise zu den vier anderen aus denen sie hervorgegangen sind, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-hx^2}\cos kx^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\cos \tfrac{1}{2}\varphi, \tag{233}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-hx^2}\sin kx^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\sin \tfrac{1}{2}\varphi, \tag{234}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-hx^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{h}}, \tag{235}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \cos kx^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty \sin kx^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}. \tag{236}$$

Um die Anwendung der Krone'schen Methode auch noch in einem anderen Beispiele darzuthuen, wählen wir das, seines häufigen Vorkommens wegen ebenfalls sehr wichtige bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = B. \tag{237}$$

Sein numerischer Werth $B$ ist offenbar eine reine endliche Zahl. Um einen constanten Parameter einzuführen, setzen wir $hx$ anstatt $x$ und gewinnen, wenn $h > 0$ ist:

$$\int_0^\infty \frac{\sin hx}{x}\,dx = B.$$

Nun aber multipliziren wir mit:

$$\int_0^\infty e^{-hk}\,dh = \frac{1}{k}$$

und erhalten nach Vereinigung unter ein doppeltes Integralzeichen:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-hk}\frac{\sin hx}{x}\,dh.dx = \frac{B}{k}.$$

Eine Integration nach $h$ lässt sich unmittelbar vollführen, denn man hat:

$$\int_0^\infty e^{-hk}\sin hx.dh = \frac{x}{k^2+x^2},$$

siehe die analogen Gleichungen auf Seite 86. Nun multiplizirt man noch mit $\frac{dx}{x}$ und integrirt abermals zwischen den Gränzen 0 und $\infty$, um zu erhalten:

$$\frac{B}{k} = \int_0^\infty \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{\pi}{2k},$$

somit:

$$B = \int_0^\infty \frac{\sin hx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{238}$$

Hier muss $h$ positiv sein, denn, wie leicht einzusehen, verwandelt sich für negative $h$ der Werth des Integrales in $-\frac{\pi}{2}$. Die Grösse $B$ als Function von $h$ betrachtet, steht also hier als isolirtes Beispiel einer unstetigen Function, welche die Eigenschaft hat, für alle Werthe der Variablen $h$ von $-\infty$ bis 0, den Werth $-\frac{\pi}{2}$ zu besitzen, und beim Übergehen des $h$ zu positiven Werthen plötzlich zu $+\frac{\pi}{2}$ überzuspringen.

Kehren wir jetzt zum Laplace'schen Integrale (235) zurück, von welchem wir, zur Umformung eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, Gebrauch machen wollten, und setzen:

$$h = 1, \quad x = az + b,$$

so wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2z^2-2abz}\,dz = e^{b^2}\frac{\sqrt{\pi}}{a}.$$

Hieraus erhält man, wenn man ferner: $a^2 = \frac{b_1}{2}$, $b^2 = \frac{u^2}{2b_1}$ setzt:

$$e^{\frac{u^2}{2b_1}} = \sqrt{\frac{b_1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{b_1z^2}{2}-uz}\,dz. \tag{239}$$

Den durch diese Formel gegebenen Werth führen wir nunmehr in die Gleichung (221) ein, und erhalten alsbald:

$$y = C\int_{-\infty}^{+\infty}\left[z-\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)\right]^A e^{-\frac{b_1 z^2}{2}+\frac{b_0}{b_1}\left[z-\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)\right]}dz;$$

das allgemeine Integral der Gleichung (214), wird daher jetzt so aussehen:

$$(240)\quad y = C_1\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\frac{u^2}{2b_1}+u\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)}\frac{du}{(b_0+b_1u)^{A+1}} + C_2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[z-\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)\right]^A e^{-\frac{b_1 z^2}{2}+\frac{b_0}{b_1}\left[z-\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)\right]}dz.$$

Eben so erhalten wir das allgemeine Integral der Gleichung (218), indem wir zuförderst einen particulären Werth aufschreiben in Form eines $A^{ten}$ Differentialquotienten:

$$(241)\quad y = C\left\{\frac{d^A}{du^A}\left[e^{u\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)-\frac{u^2}{2b_1}}\right]\right\}_{\frac{b_0}{b_1}},$$

welchen wir dann mittelst der Fourier'schen Formel in ein bestimmtes Integral umgestalten. Wir bekommen mittelst derselben:

$$e^{-\frac{u^2}{2b_1}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(u-\lambda)\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2b_1}}\, d\alpha\, d\lambda;$$

diess in die Gleichung (241) gesetzt gibt:

$$(242)\quad y = \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha\sqrt{-1}+x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)^A e^{\alpha\left(\frac{b_0}{b_1}-\lambda\right)\sqrt{-1}-\frac{\lambda^2}{2b_1}+\frac{b_0}{b_1}\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)}\, d\alpha\, d\lambda.$$

Hier lässt sich eine Integration nach $\lambda$ bewerkstelligen, und man bekömmt namentlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2b_1}-\alpha\lambda\sqrt{-1}}\, d\lambda = \sqrt{2b_1\pi}\, e^{-\frac{\alpha^2 b_1}{2}},$$

somit:

$$y = C\,\frac{\sqrt{2b_1\pi}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha\sqrt{-1}+x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)^A e^{-\frac{\alpha^2 b_1}{2}+\frac{\alpha b_0}{b_1}\sqrt{-1}+\frac{b_0}{b_1}\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)}\, d\alpha,$$

wornach der allgemeine, mit zwei Constanten versehene Werth von $y$ so aussieht:

$$(243)\quad \begin{aligned} y = {} & C_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2b_1}+u\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)}\frac{du}{(b_0-b_1u)^{A+1}} + \\ & + C_2\, e^{\frac{b_0}{b_1}\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha\sqrt{-1}+x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)^A e^{-\frac{\alpha^2 b_1}{2}+\frac{\alpha b_0}{b_1}\sqrt{-1}}\, d\alpha. \end{aligned}$$

Sowohl diese Formel, als auch die (219) enthält als Bestandtheil ein bestimmtes Integral, bei dem die unter dem Integralzeichen befindliche Function innerhalb der Grenzen durch Unendlich durchgeht; solche Formeln sind nun mindestens nicht bequem und werden daher gerne vermieden; auf dem Felde jedoch, welches wir hier betreten haben, würde man sich übereilen, wenn man dieselben unbedingt verwerfen würde, da es nicht schwer ist, eine Verwandlung zu bewerkstelligen in eine andere dem erwähnten Übelstande nicht unterliegende Form, womit sich dann gelegentlich noch andere Vortheile verbinden lassen, die wir an diesem Orte nicht ins Detail verfolgen wollen. Es soll daher hier nur obenhin der Weg angedeutet werden, den man bei ähnlichen Integralen zu gehen hat, und namentlich wollen wir zuförderst das in der Formel (219) enthaltene Integral der Differentialgleichung (218) unter der bestehenden Beziehungsgleichung (217) betrachten. Da in Folge der letztern:

$$a_0 = -\frac{b_0^2}{b_1^2}$$

ist, so geht die (218), nachdem man den eben ermittelten Werth für $a_0$ eingeführt hat, über in:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - b_1 x \frac{dy}{dx} + y\left(-\frac{b_0^2}{b_1^2} + b_0 x\right) = 0, \tag{244}$$

und dieser entspricht wenigstens Ein tadelloses particuläres Integral:

$$y = C_1 e^{\frac{b_0}{b_1} x},$$

wie man sich auch durch unmittelbare Substitution leicht überzeugen kann; anstatt des zweiten particulären Integrales jedoch, welches in der Formel (219) enthalten ist, und die so eben erwähnte Unzukömmlichkeit darbietet, können wir uns, von der, in §. 5 des ersten Abschnittes allgemein auseinandergesetzten Methode Gebrauch machend, ein anderes verschaffen. Ist nämlich allgemein die Gleichung zu integriren:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = 0,$$

und hat man ein particuläres Integral:

$$y = y_1,$$

gefunden, so substituire man:

$$y = y_1 \int z\,dx,$$

und die vorgelegte Gleichung geht nach gehöriger Reduction über in:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2\,dy_1}{y_1} - X_1\,dx$$

und daraus durch Integration:

$$\log \frac{z}{k} = - \log y_1^2 - \int X_1\, dx,$$

unter $k$ eine willkürliche Constante verstanden. — In der Gleichung (244) ist nun:

$$y_1 = e^{\frac{b_0}{b_1} x}, \quad X_1 = - b_1 x,$$

und somit:

$$\log \frac{z}{k} = - 2 \frac{b_0}{b_1} x + \frac{b_1 x^2}{2},$$

$$z = k e^{-2\frac{b_0}{b_1} x + \frac{b_1 x^2}{2}},$$

$$\int z\, dx = k \int e^{-2\frac{b_0}{b_1} x + \frac{b_1 x^2}{2}} dx + C_1,$$

also:

$$y = y_1 \int z\, dx = C_1 e^{\frac{b_0}{b_1} x} + C_2 e^{\frac{b_0}{b_1} x} \int e^{-2\frac{b_0}{b_1} x + \frac{b_1 x^2}{2}} dx, \tag{245}$$

eine Formel, in welcher $C_2$ anstatt $k$ geschrieben ist, und die an die Stelle der (219) gesetzt werden kann. Allein dasselbe auf diesem Wege erhaltene allgemeine Integral hätten wir auch aus der Formel (219) unmittelbar ableiten können, ohne von der Methode der willkürlichen Constanten Gebrauch zu machen. In der That, setzen wir ebendaselbst:

$$\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} \frac{du}{b_0 - b_1 u}, \tag{246}$$

und lassen beide Theile dieser Gleichung diejenige Reihe von Rechnungsoperationen erfahren, die durch die Formel:

$$b_0 - b_1 \frac{d}{dx}$$

angedeutet ist, so erhalten wir:

$$b_0 \xi - \frac{b_1 d\xi}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} du = \sqrt{2 b_1 \pi}\, e^{\frac{b_1}{2}\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)^2}. \tag{247}$$

Diese Differentialgleichung besitzt den integrirenden Factor:

$$e^{-\frac{b_0}{b_1} x},$$

und gibt mit demselben multiplizirt und integrirt:

$$-b_1 \xi e^{-\frac{b_0}{b_1}x} = \sqrt{2b_1\pi}\, e^{\frac{b_0^2}{2b_1^2}} \int e^{\frac{b_1 x^2}{2} - \frac{2b_0 x}{b_1}} dx + C,$$

hieraus:

$$\xi = -\frac{C}{b_1} e^{\frac{b_0}{b_1}x} - \sqrt{\frac{2\pi}{b_1}}\, e^{\frac{b_0^2}{2b_1^2}}\, e^{\frac{b_0 x}{b_1}} \int e^{\frac{b_1 x^2}{2} - \frac{2b_0 x}{b_1}} dx; \tag{248}$$

diess ist aber ein Ausdruck, der mit dem obigen (245) genau einerlei Form hat; der mit $\xi$ bezeichnete particuläre Werth (246) hat daher die Eigenschaft, trotz seiner scheinbaren Unbrauchbarkeit, mit Hilfe einer passenden Transformation sogar das allgemeine Integral der Differentialgleichung (244) zu liefern, so dass also hier aus einem einzigen gehörig umgestalteten particulären Werthe, deren zwei hervorgehen, und es ist nicht schwer Beispiele aufzufinden, in denen auf ähnliche Weise eine Zerspaltung von Einem particulären Werthe, in deren drei, vier u. s. w. Statt findet, und offenbar verdanken wir diesen glücklichen Umstand der bekannten Vieldeutigkeit solcher bestimmter Integrale, bei denen die Function innerhalb der Integrationsgrenzen durch Unendlich durchgeht; hiedurch stellt sich aber dasjenige, was auf einem andern Felde als Übelstand zu betrachten wäre, bei der Integration der Differentialgleichungen als Vortheil heraus. Wichtig, wegen der Klarheit, die sie über den Gegenstand verbreitet, ist an diesem Orte auch die Bemerkung, dass die Unbrauchbarkeit des particulären Integrales, wenn es, als in Form eines bestimmten Integrales vorhanden vorausgesetzt wird, wesentlich daher rühre, weil eben dieses in Frage stehende particuläre Integral eine andere Form besitzt, nämlich die (248) — ein Umstand, den wir im folgenden Abschnitte, der die Formenlehre enthält, ohne vorhergegangene Integration unmittelbar aus der Differentialgleichung herauszulesen lernen werden. Wir bemerken nämlich in dieser von dem ersten auf den zweiten Coefficienten ein Steigen um die Einheit in der Ordnungszahl nach $x$, was auf eine, in Einem der particulären Integrale vorhandene Exponentielle wie $e^{ax^2}$ einen unmittelbaren Schluss gestattet. — Auf ähnliche Weise können wir auch den ersten Bestandtheil des Werthes von $y$ in der Formel (243) behandeln; wir setzen nämlich:

$$\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} \frac{du}{(b_0 - b_1 u)^{A+1}},$$

und bringen dann an beide Theile dieser Gleichung diejenige Reihe von Rechnungsoperationen an, welche durch die Formel:

$$\left(b_0 - b_1 \frac{d}{dx}\right)^{A+1}$$

angedeutet ist, und erhalten so:

$$\left(b_0 - b_1 \frac{d}{dx}\right)^{A+1} \xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)} du = \sqrt{2b_1\pi}\, e^{\frac{b_1}{2}\left(x - \frac{b_0}{b_1^2}\right)^2}. \tag{249}$$

Das Integral dieser completen Differentialgleichung von linearer Form und mit constanten Coefficienten besteht wie bekannt aus zwei Theilen: dem, eine gewisse Anzahl willkürlicher Constanten

enthaltenden Integrale der reduzirten Gleichung, und einem singulären Werthe, der keine Constante in sich schliesst, auch den Zusatz einer solchen nicht verträgt, und die Eigenschaft hat, der completen Gleichung Genüge zu leisten. Wir finden diesen letzteren mittelst der Fourier'schen Formel, nach welcher:

$$\xi = \sqrt{\frac{b_1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}}{(b_0 - b_1 \alpha \sqrt{-1})^{A+1}} \, e^{\frac{b_1}{2}\left(\lambda - \frac{b_0}{b_1^2}\right)^2} \, d\alpha \, d\lambda$$

ein solcher Werth ist, wie man sich durch wirkliches Differenziren und Bilden des im ersten Theile der Gleichung (249) enthaltenen Ausdruckes:

$$\left(b_0 - b_1 \frac{d}{dx}\right)^{A+1} \xi,$$

alsogleich überzeugen kann. Der erstere aber erscheint in Form eines Productes aus einer Exponentielle:

$$e^{\frac{b_0}{b_1} x}$$

in eine ganze Function von $x$, in der die Constanten der Integration enthalten sind, welche man offenbar nicht so wird zu wählen haben, dass $\xi$ dem oben bezeichneten bestimmten Integrale gleich wird, denn dieses ist vieldeutig, sondern so, dass der Differentialgleichung Genüge geleistet wird.

Übrigens hätten wir, zur Integration der (249), der Fourier'schen Formel gar nicht bedurft; denn es ist offenbar:

$$e^{-\frac{b_0}{b_1} x}$$

der integrirende Factor derselben, und ihr erster Theil verwandelt sich durch Multiplication mit demselben, in den vollständigen $(A+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten des Productes aus diesem in $\xi$, also:

$$(-b_1)^{A+1} \frac{d^{A+1}}{dx^{A+1}} \left[ e^{-\frac{b_0}{b_1} x} \xi \right] = e^{\frac{b_0^2}{2b_1^2}} \sqrt{2b_1 \pi} \, e^{\frac{b_1 x^2}{2} - \frac{2b_0 x}{b_1}},$$

sodann durch Multiplication mit $dx^{A+1}$, $(A+1)$maliges Integriren und Auflösung der Gleichung nach $\xi$:

$$\xi = \frac{\sqrt{2b_1\pi}}{(-b_1)^{A+1}} \, e^{\frac{b_0^2}{2b_1^2}} \, e^{\frac{b_0}{b_1} x} \int^{A+1} e^{\frac{b_1 x^2}{2} - \frac{2b_0 x}{b_1}} \, dx^{A+1} + e^{\frac{b_0}{b_1} x} (C_0 + C_1 x + \ldots + C_A x^A):$$

$C_0$, $C_1$, ... $C_A$ sind Constanten, die man, wie schon gesagt, so zu bestimmen hat, dass $\xi$ der Differentialgleichung Genüge leistet.

Und so wären wir denn in allen Fällen zu den allgemeinen, mit der gehörigen Anzahl von Constanten versehenen Integralen der Gleichungen gelangt, die im zweiten Paragraphe der Betrachtung unterworfen wurden. Wir können also allgemein annehmen, dass eine jede Differentialgleichung von beliebig hoher Ordnung und mit Coefficienten, die nach der unabhängigen Variablen vom ersten Grade sind,

durch unsere Methode vollständig integrirt werden könne, und dass diejenigen particulären Integrale, aus welchen sich das allgemeine zusammensetzt, in drei verschiedenen Formen erscheinen, nämlich: in der eines bestimmten Integrales, ferner in der eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, und endlich als Product aus einer Exponentielle in eine endliche oder unendliche, nach absteigenden Potenzen der Variablen geordnete Reihe. — Wir wollen nunmehr die Wirksamkeit dieser Methode auch bei Gleichungen mit anders gestalteten Coefficienten erproben.

## §. 5.

## Integration der Differentialgleichungen der zweiten Ordnung von der Form:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (A_1 + B_1 x^m) x \frac{dy}{dx} + (A_0 + B_0 x^m + C_0 x^{2m}) y = 0, \tag{250}$$

für beliebige Werthe des Exponenten $m$.

Die in den vorhergehenden Paragraphen auseinandergesetzte Integrationsmethode lässt sich nicht nur anwenden bei solchen Differentialgleichungen, deren Coefficienten ganze Functionen der ersten Ordnung der unabhängigen Veränderlichen sind, sondern auch bei mehreren anderen, die sich durch passende Substitution auf die Form solcher Gleichungen zurückbringen lassen. Eine solche ist aber die Differentialgleichung (250), was auch immer die in ihr enthaltenen Coefficienten und der Exponent $m$ für Werthe haben mögen; nur werden, um dieselbe in eine solche mit linearen Coefficienten zu verwandeln, zwei aufeinanderfolgende Substitutionen nothwendig sein; wir setzen nämlich:

$$x^m = t, \tag{251}$$

somit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot m x^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot m^2 x^{2(m-1)} + \frac{dy}{dt} m (m-1) x^{m-2},$$

hiedurch geht die (250) über in:

$$m^2 t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + [(m(m-1) + m A_1) t + m B_1 t^2] \frac{dy}{dt} + [A_0 + B_0 t + C_0 t^2] y = 0: \tag{252}$$

hier setzen wir ferner:

$$y = t^k \cdot z, \tag{253}$$

somit:

$$\frac{dy}{dt} = t^k \frac{dz}{dt} + k t^{k-1} z,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = t^k \frac{d^2z}{dt^2} + 2 . k t^{k-1} \frac{dz}{dt} + k (k-1) t^{k-2} z:$$

diess in die Gleichung (252) substituirt, gibt:

$$m^2 t^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + t \frac{dz}{dt} \left[2km^2 + m(m-1) + mA_1 + mB_1 t\right] +$$
$$+ z \left[k(k-1)m^2 + k\left(m(m-1) + mA_1\right) + A_0 + (mkB_1 + B_0)t + C_0 t^2\right] = 0;$$

endlich wählen wir den bisher unbestimmt gelassenen Exponenten $k$ so, dass:

$$k(k-1)m^2 + k\left(m(m-1) + mA_1\right) + A_0 = 0$$

wird; hierdurch wird eine weitere Division durch $t$ möglich und wir erhalten folgende Differentialgleichung mit linearen Coefficienten:

$$m^2 t \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \left[2km^2 + m(m-1) + mA_1 + mB_1 t\right] + z(mkB_1 + B_0 + C_0 t) = 0. \tag{254}$$

Hiermit wäre die Gleichung (250), vermittelst zweier auf einander folgender Substitutionen, auf die Form der (33) des zweiten Paragraphes gebracht worden, und kann somit genau auf dieselbe Weise integrirt werden wie jene. Auch kann bemerkt werden, dass man, wegen des doppelten Werthes den $k$ annimmt, welcher eine beliebige der zwei Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$m^2 k^2 + mk(A_1 - 1) + A_0 = 0 \tag{255}$$

ist, oft nur ein Integral der Differentialgleichung mit einer einzigen Constante benöthigt, in welchem $k$ vorkommen muss, und welches, wenn man demselben alle beide aus der Gleichung (255) hervorgehende Werthe der Reihe nach beilegt, zwei von einander verschiedene particuläre Integrale liefert, die zusammengesetzt das allgemeine Integral bilden.

Es sei uns gestattet, um die ausnehmende Wirksamkeit der vorgetragenen Methode in gewissen speciellen Fällen in ein helleres Licht zu stellen, als Beispiel diejenige Differentialgleichung der Betrachtung zu unterwerfen, die unter dem Namen der Riccati'schen seit Langem bekannt geworden ist, und an der mehrere Mathematiker ihre Kräfte versucht haben:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \pm a^2 x^n y = 0. \tag{256}$$

Man fand, dass diese Gleichung in besonderen Fällen in endlicher Form integrirbar sei, und namentlich, so oft der Exponent $n$ folgende Form besitzt:

$$n = -\frac{4r}{2r \pm 1} \tag{257}$$

unter $r$ eine beliebige ganze und positive Zahl verstanden, und das zwar mittelst $r$ auf einander folgender Transformationen, die nicht unbedeutende Rechnungsentwicklungen erheischen. Auch entwickelte man

$$B_1 - C_2 = 0 \tag{261}$$

erfüllen müssen, die dritte $B_2$ aber willkürlich bleibt.

Um hieraus das Integral der Riccati'schen Gleichung abzuleiten, ist nur nöthig anstatt $t$ seinen Werth in Function von $x$, d. h. $x^{\frac{n+2}{2}}$ einzuführen. Thun wir diess, und setzen zugleich den positiven Werth von:

$$\sqrt{\frac{4a^2}{(n+2)^2}} = b, \tag{262}$$

führen ferner, $u$ in $bu$ verwandelnd, eine neue Variable ein, um geschmeidigere Formeln zu erhalten, so bekommen wir als Resultat:

$$y = \int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{n+4}{2n+4}} \left[B_1 \sin bux^{\frac{n+2}{2}} + B_2 \cos bux^{\frac{n+2}{2}}\right] du + B_1 \int_0^{\mp\infty} (u^2+1)^{-\frac{n+4}{2n+4}} e^{bux^{\frac{n+2}{2}}} du. \tag{263}$$

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} (u^2-1)^{-\frac{n+4}{2n+4}} e^{bux^{\frac{n+2}{2}}} du + C_2 \int_1^{\infty} (u^2-1)^{-\frac{n+4}{2n+4}} e^{\mp bux^{\frac{n+2}{2}}} du. \tag{264}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen drückt das Integrale aus von:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 x^n y = 0,$$

die zweite von folgender andern Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - a^2 x^n y = 0.$$

Von den beiden Zeichen $\mp$ ist das obere oder untere zu wählen, letzteres aber nur dann, wenn der Werth von $x$ so beschaffen ist, dass $x^{\frac{n+2}{2}}$ negativ wird. Ferner wird vorausgesetzt, dass der Bruch $\frac{n}{n+2}$ positiv ist, das somit $n$ entweder zwischen die Grenzen 0 und $\infty$, oder zwischen $-2$ und $-\infty$ fällt. Wäre im Gegentheile $n$ zwischen 0 und $-2$ enthalten, somit dieser eben erwähnte Bruch negativ, dann treten die im vierten Paragraphe entwickelten Formeln, und namentlich die (181) in Anwendung, in der wir nur $x$ in $x^{\frac{n+2}{2}}$ und $a$ in $-\frac{n}{n+2}$ zu verwandeln haben, um zu erhalten:

$$\begin{aligned} y = \; & C_1 e^{bx^{\frac{n+2}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda b} \left(x^{\frac{n+2}{2}} - \lambda\right)^{-\frac{n}{2(n+2)}} \lambda^{-\frac{n}{2(n+2)}} d\lambda + \\ & + C_2 e^{-bx^{\frac{n+2}{2}}} \int_0^{-\infty} e^{2\lambda b} \left(x^{\frac{n+2}{2}} - \lambda\right)^{-\frac{n}{2(n+2)}} \lambda^{-\frac{n}{2(n+2)}} d\lambda. \end{aligned} \tag{265}$$

Wir sagten, dass, nach dem, was schon von älteren Analysten gefunden wurde, Riccati's Gleichung integrirt werden könne in endlicher Form, so oft $n$ eine Zahl ist von folgender Form:

$$n = -\frac{4r}{2r \pm 1},$$

unter $r$ eine ganze positive Zahl verstanden. Diess bestätigt auch unsere Analysis, denn es wird für solche Werthe von $n$ der Bruch:

$$\frac{n}{n+2} = \mp 2r,$$

gleich einer ganzen und geraden Zahl; wir wissen aber, dass in diesem Falle an die Stelle der (265) eine andere Form trete, die keine bestimmten Integrale, sondern vielmehr zwei mit willkürlichen Constanten multiplizirte Producte enthält aus Exponentiellen in ganze Functionen von $x$, und die man aus den Formeln (165) und (171) §. 4 ableitet, $\frac{a}{2}$ durch $\pm r$ ersetzend und zugleich $x$ in $x^{\frac{n+2}{2}}$ verwandelnd, die jedoch auch in der Formel (265) enthalten sind, und aus ihr abgeleitet werden können durch Entwicklung der $\left(-\frac{n}{2n+4}\right)^{\text{ten}}$ Potenz des Binomes $(x^{\frac{n+2}{2}} - \lambda)$ mittelst der Binomialformel, und Berechnung der sodann zum Vorschein kommenden bestimmten Integrale. — Man sieht also, dass die Riccati'sche Gleichung am aller bequemsten auf dem von uns eingeschlagenen Wege integrirt werden könne.

Es lassen sich nicht bloss Gleichungen des zweiten Grades von der Form der (250), sondern auch viele andere höheren Ordnungen angehörige, von ähnlichem Baue, auf dieselbe Weise mittelst der zwei früher gebrauchten Substitutionen, einzeln oder zusammengenommen angewendet, behandeln; z. B. folgende Gleichung der dritten Ordnung:

$$\begin{aligned} x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2} (A_2 + B_2 x^m) + x \frac{dy}{dx} (A_1 + B_1 x^m + C_1 x^{2m}) + \\ + y (A_0 + B_0 x^m + C_0 x^{2m} + D_0 x^{3m}) = 0, \end{aligned} \tag{266}$$

die, wenn man $x^m = t$ setzt, unmittelbar übergeht in folgende einfachere mit der unabhängigen Veränderlichen $t$, wenn man genau so verfährt wie bei der ähnlich gebauten Gleichung (250):

$$\begin{aligned} m^3 t^3 \frac{d^3y}{dt^3} + m^2 t^2 \frac{d^2y}{dt^2} [3(m-1) + A_2 + B_2 t] + \\ + mt \frac{dy}{dt} [(m-1)(m-2) + (m-1) A_2 + A_1 + ((m-1) B_2 + B_1) t + C_1 t^2] + \\ + y [A_0 + B_0 t + C_0 t^2 + D_0 t^3] = 0, \end{aligned} \tag{267}$$

und sich in eine nach unserer Methode integrirbare verwandelt, wenn:

$$(m-1)(m-2) + (m-1) A_2 + A_1 = 0. \tag{268}$$

und

$$A_0 = B_0 = 0$$

wird, welche aber auch noch mittelst der zweiten Substitution:

$$y = t^k z$$

behandelt werden kann, wodurch sich die drei Bedingungsgleichungen auf zwei zurückziehen.

Um hier wieder ein einfaches Beispiel anzuführen, wählen wir die Gleichung:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} \pm a^3 x^3 y = 0, \tag{269}$$

die in der (266) als specieller Fall enthalten ist, und aus ihr hervorgeht, wenn man:

$$A_2 = B_2 = A_1 = B_1 = C_1 = A_0 = B_0 = C_0 = 0,$$
$$D_0 = \pm a^3, \qquad m = 2,$$

setzt, somit durch die Substitution:

$$x^2 = t$$

verwandelt wird in:

$$8t \frac{d^3 y}{dt^3} + 12 \frac{d^2 y}{dt^2} \pm a^3 t y = 0; \tag{270}$$

und um die Integration dieser letzteren handelt es sich jetzt. Nun haben wir aber hier:

$$U_0 = 12 u^2, \qquad U_1 = 8u^3 \pm a^3, \qquad \int \frac{U_0}{U_1} du = \frac{1}{2} \log (8u^3 \pm a^3), \tag{271}$$

und zur Bestimmung der Integrationsgränzen die Gleichung:

$$e^{ut} \sqrt{u^3 \pm \frac{1}{8} a^3} = 0. \tag{272}$$

Die Wurzeln dieser letzteren können bezeichnet werden mit:

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \mp \infty;$$

die drei ersten davon deuten die Wurzeln der Gleichung:

$$u^3 \pm \frac{1}{8} a^3 = 0$$

an, bei der vierten ist das obere oder untere Zeichen zu wählen, je nachdem $t$ positiv oder negativ ist. Es kann daher das allgemeine Integral der Gleichung (270) auf folgende Weise geschrieben werden:

$$y = C_1 \int_0^{\mp\infty} \frac{e^{ut}\,du}{\sqrt{u^2 \pm \frac{1}{8} a^2}} + C_2 \int_0^{r_1} \frac{e^{ut}\,du}{\sqrt{u^2 \pm \frac{1}{8} a^2}}$$
$$+ C_3 \int_0^{r_2} \frac{e^{ut}\,du}{\sqrt{u^2 \pm \frac{1}{8} a^2}} + C_4 \int_0^{r_3} \frac{e^{ut}\,du}{\sqrt{u^2 \pm \frac{1}{8} a^2}}. \tag{273}$$

Die Constanten $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, hängen durch die Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0, \tag{274}$$

oder durch folgende andere:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \frac{b}{\sqrt{\pm a^2}} \tag{275}$$

zusammen; ersteres, wenn der zweite Theil der Gleichung (269) wirklich Null ist, letzteres, wenn derselbe von Null verschieden und gleich einer Constante $b$ wird. Der erste Theil des viertheiligen Werthes von $y$, d. h. das Integral:

$$\int_0^{\mp\infty} \frac{e^{ut}\,du}{\sqrt{u^2 \pm \frac{1}{8} a^2}},$$

bietet mitunter die Unbequemlichkeit dar, aus zwei Theilen, einem reellen und einem imaginären zu bestehen; dieser auszuweichen wird es gestattet sein, demselben, wo diess nothwendig ist, eines der folgenden zwei anderen Integrale zu substituiren:

$$\int_{-\frac{1}{2}a}^{\mp\infty} \frac{e^{ut}\,du}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{8} a^2}}, \quad \int_{\frac{1}{2}a}^{\mp\infty} \frac{e^{ut}\,du}{\sqrt{u^2 - \frac{1}{8} a^2}},$$

und die Constanten jetzt so zu wählen, dass $C_1$ willkürlich, und:

$$C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

wird. Endlich wird man noch $x^2$ anstatt $t$ setzen, und so aus (273) das Integral der Gleichung (269) erhalten; und so hätten wir denn wieder mit äusserst geringem Rechenaufwande eine Differentialgleichung der dritten Ordnung allgemein integrirt.

**Liouville** hat im *Journal de l'école polytechnique* eine Abhandlung veröffentlicht über die Integration der Gleichung:

$$s \frac{d^2y}{dx^2} + (r + qx) \frac{dy}{dx} + (p + nx + mx^2)\, y = 0 \tag{276}$$

durch Differentiale mit allgemeiner Ordnungszahl; er fängt damit an, diese mittelst der Substitution:

$$y = z \cdot e^{\int (\alpha + \beta x) dx} \tag{277}$$

umzuformen in:

$$s \frac{d^2 z}{dx^2} + [(2s\beta + q)x + 2\alpha s + r] \frac{dz}{dx} + \\ + [x^2 (s\beta^2 + \beta q + m) + x(2\alpha\beta s + \alpha q + \beta r + n) + s\alpha^2 + s\beta + r\alpha + p] z = 0, \tag{278}$$

und wählt sodann $\alpha$ und $\beta$ dergestalt, dass:

$$s\beta^2 + \beta q + m = 0, \quad 2\alpha\beta s + \alpha q + \beta r + n = 0,$$

wird, und so die obige Gleichung in die einfachere:

$$s \frac{d^2 z}{dx^2} + [(2s\beta + q)x + 2\alpha s + r] \frac{dz}{dx} + [s\alpha^2 + s\beta + r\alpha + p] z = 0 \tag{279}$$

übergeht, die er dann durch Differentiale mit allgemeiner Ordnungszahl integrirt. Es ist aber klar, dass die letzte Gleichung (279) ganz in den Bereich der durch unsere Methode integrirbaren Formen falle, und so lassen sich denn Differentialgleichungen in grosser Anzahl anführen, die sämmtlich durch die in diesem Abschnitte auseinandergesetzten Methoden integrirt werden können. Wir haben nicht im Sinne, alle diese Formen complet aufzuzählen, begnügen uns daher zum Schlusse dieses Paragraphes noch auf eine allgemein integrirbare Differentialgleichung von beliebig hoher Ordnung, und mit ganz willkürlichen, darin enthaltenen constanten Coefficienten aufmerksam zu machen, nämlich:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} (a_n + b_n \log x) + x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} (a_{n-1} + b_{n-1} \log x) + \ldots \\ + x \frac{dy}{dx} (a_1 + b_1 \log x) + y (a_0 + b_0 \log x) = 0, \tag{280}$$

die durch die Substitution:

$$t = \log x, \quad x = e^t$$

unmittelbar in eine bekannte Form wie:

$$\frac{d^n y}{dt^n} (A_n + B_n t) + \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} (A_{n-1} + B_{n-1} t) + \cdots + y (A_0 + B_0 t) = 0 \tag{281}$$

verwandelt wird.

## §. 6.

## Integration der Differenzengleichungen von der Form:

$$\Delta^n y(a_n + b_n x) + \Delta^{n-1} y(a_{n-1} + b_{n-1} x) + \dots + \Delta y(a_1 + b_1 x) + y(a_0 + b_0 x) = 0. \quad (282)$$

Dieselbe Integrationsmethode, die wir bei Differentialgleichungen, deren Coefficienten die unabhängige Variable nur in der ersten Potenz enthalten, angewendet haben, lässt sich auch beinahe unverändert zur Integration von ähnlich gestalteten Differenzengleichungen benützen. Man setzt nämlich ein particuläres Integral unter der Form:

$$y = \int_{u}^{u''} e^{ux} V du$$

voraus, und bekömmt, so $\Delta x = h$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \Delta\, e^{ux} &= e^{u(x+h)} - e^{ux} = e^{ux}(e^{uh} - 1), \\ \Delta^2 e^{ux} &= e^{ux}(e^{uh} - 1)^2, \\ \Delta^3 e^{ux} &= e^{ux}(e^{uh} - 1)^3, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \Delta^n e^{ux} &= e^{ux}(e^{uh} - 1)^n, \end{aligned} \quad (283)$$

somit allgemein:

$$\Delta^n y = \int_{u'}^{u''} e^{ux}(e^{uh} - 1)^n V du.$$

Setzt man also:

$$U_0 = a_n(e^{uh} - 1)^n + a_{n-1}(e^{uh} - 1)^{n-1} + \dots + a_1(e^{uh} - 1) + a_0, \quad (284)$$

$$U_1 = b_n(e^{uh} - 1)^n + b_{n-1}(e^{uh} - 1)^{n-1} + \dots + b_1(e^{uh} - 1) + b_0, \quad (285)$$

und denkt sich den obigen Werth von $y$ in die vorliegende Differenzengleichung substituirt, so erhält man als Resultat offenbar:

$$\int_{u'}^{u''} (U_0 + U_1 x) e^{ux} V du = 0, \quad (286)$$

eine Gleichung, die sich auch so schreiben lässt:

$$\int_{u'}^{u''} U_0 e^{ux} V du + x \int_{u'}^{u''} U_1 e^{ux} V du = 0. \quad (287)$$

Nun gibt das Verfahren der theilweisen Integration:

$$x \int U_1 e^{ux} V du = e^{ux}.U_1 V - \int e^{ux} d(U_1 V),$$

wodurch anstatt der Gleichung (287) folgende andere auftritt:

$$\left\{e^{ux} U_1 V\right\}_{u'}^{u''} + \int_{u'}^{u''} e^{ux} \left[U_0 V du - d(U_1 V)\right] = 0, \tag{288}$$

der nun Genüge geleistet werden wird, wenn man erstens für $V$ eine solche Function der Veränderlichen $u$ setzt, dass identisch für jedes $u$:

$$U_0 V du - d(U_1 V) = 0 \tag{289}$$

wird, und zweitens die Integrationsgrenzen $u'$ und $u''$ so wählt, dass auch:

$$\left\{e^{ux} U_1 V\right\}_{u'}^{u''} = 0 \tag{290}$$

ausfällt. Die Gleichung (289), oder was dasselbe ist, die folgende:

$$\frac{U_0}{U_1} du - \frac{dV}{V} - \frac{dU_1}{U_1} = 0 \tag{291}$$

liefert integrirt:

$$V = \frac{C}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}, \tag{292}$$

und es kann das im Exponenten der hier vorkommenden Exponentielle vorhandene Integral ohne sonderliche Mühe und andere Schwierigkeiten als diejenigen, denen das Zerlegen gebrochener Functionen in Partialbrüche unterliegt, jederzeit ermittelt werden, wiewohl der Bruch $\frac{U_0}{U_1}$ eine Function der transcendenten Grösse: $(e^{uh} - 1)$ ist. Man setzt nämlich:

$$e^{uh} = 1 + v,$$

$$uh = \log(1 + v),$$

$$du = \frac{dv}{h(1 + v)},$$

und wird offenbar durch Einführung dieser Werthe ein jedes Integral einer transcendenten Function wie:

$$\int f(e^{uh} - 1) du$$

zurückführen auf ein algebraisches, nämlich:

$$\int f(v) \frac{dv}{h(1 + v)};$$

hat man letzteres berechnet, und in die Gleichung (290). die auch so geschrieben werden kann:

$$\left\{ C\, e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \right\}_{u'}^{u''} = 0, \tag{293}$$

substituirt, also $v$ anstatt $(e^{uh} - 1)$, somit $\frac{1}{h} \log (1+v)$ anstatt $u$ gesetzt, und dasjenige, was aus $U_0$ und $U_1$ durch diese Substitutionen hervorgeht, mit $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1$ bezeichnet, so erhält man anstatt der (293):

$$\left\{ C\, e^{\frac{x}{h} \log (1+v) + \int \frac{\mathfrak{U}_0\, dv}{h\, \mathfrak{U}_1 (1+v)}} \right\}_{v'}^{v''} = 0, \tag{294}$$

oder:

$$\left\{ C\, (1+v)^{\frac{x}{h}}\, e^{\int \frac{\mathfrak{U}_0\, dv}{h\, \mathfrak{U}_1 (1+v)}} \right\}_{v'}^{v''} = 0. \tag{295}$$

Diess ist die zur Bestimmung der Grenzen dienende Gleichung; ihre Wurzeln seien: $v_1, v_2, v_3 \ldots v_{n+1}$, falls deren wirklich $(n+1)$ an der Zahl aufgefunden werden können, so sind die der Gleichung (293):

$$u_1 = \frac{\log (1+v_1)}{h}, \quad u_2 = \frac{\log (1+v_2)}{h}, \quad u_3 = \frac{\log (1+v_3)}{h}, \quad \ldots\ldots \quad u_{n+1} = \frac{\log (1+v_{n+1})}{h},$$

und es werden folgende particuläre Integrale anstatt $y$ gesetzt, der Differenzengleichung (282) Genüge leisten:

$$\begin{aligned} y &= \psi_1 (x) \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, V\, du, \\ y &= \psi_2 (x) \int_{u_1}^{u_3} e^{ux}\, V\, du, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y &= \psi_n (x) \int_{u_1}^{u_{n+1}} e^{ux}\, V\, du. \end{aligned} \tag{296}$$

Unter $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \ldots \psi_n$ sind solche Functionen von $x$ zu verstehen, die sich nicht ändern, wenn man $x$ in $x+h$ verwandelt, also periodische, wie z. B. $\sin \frac{2\pi x}{h}$.

Es können nun einige der Werthe von $y$ unbrauchbar werden, wenigstens in der Form, in welcher sie in den Gleichungen (296) erscheinen, weil die Function unter dem Integralzeichen zwischen den betreffenden Grenzen ein oder mehrmal durch Unendlich geht. Diess wird entweder durch eine andere Combination der Grenzen, oder, wenn eine solche nicht möglich wäre, durch eine solche Umformung des bestimmten Integrales vermieden, die wir im Vorhergehenden vorgeschlagen haben. Weil endlich die vorgelegte Differenzengleichung linear ist, so wird auch die Summe der ermittelten particulären Werthe

derselben Genüge leisten, und wir gelangen sohin zu folgendem, $n$ willkürliche periodische Functionen der unabhängigen Veränderlichen in sich enthaltenden allgemeinen Integrale:

$$y = \psi_1(x) \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, V\, du + \psi_2(x) \int_{u_1}^{u_3} e^{ux}\, V\, du + \ldots\ldots + \psi_n(x) \int_{u_1}^{u_{n+1}} e^{ux}\, V\, du, \tag{297}$$

wobei:

$$V = \frac{C}{U_1}\, e^{\int \frac{U_0}{U_1} du} \tag{298}$$

ist, diess jedoch unter der früher schon erwähnten Voraussetzung, dass man wirklich $(n+1)$ Wurzeln der Gleichung (295) aufgefunden habe.

Es ist hieraus ersichtlich, dass die Integration der Differenzengleichungen nicht grössern Schwierigkeiten unterliege, als die der Differentialgleichungen von ähnlichem Baue, und es wird das hiezu dienende Verfahren folgendes sein: Man bilde zuförderst die mit $U_0$ und $U_1$ bezeichneten Polynome, indem man in der zur Integration vorgelegten Differenzengleichung die Grössen:

$$\Delta^n y, \qquad \Delta^{n-1} y, \qquad \Delta^{n-2} y \qquad \ldots\ldots \qquad y$$

beziehungsweise in die Potenzen:

$$(e^{uh}-1)^n, \quad (e^{uh}-1)^{n-1}, \quad (e^{uh}-1)^{n-2}, \quad \ldots\ldots \quad (e^{uh}-1)^0$$

verwandelt, und die Summe aller derjenigen Glieder die kein $x$ enthalten für $U_0$, die Summe der übrigen, mit dem Factor $x$ verknüpften aber für $U_1 x$ nimmt; dann suche man:

$$\int \frac{U_0}{U_1} du$$

und bilde aus dem gefundenen Werthe dieses Integrales den, durch die Gleichung (292) gegebenen Werth von $V$, ingleichen den ersten Theil der Gleichung (293), von der man sich $(n+1)$ Wurzeln zu verschaffen sucht, wenn sie deren so viele zulässt; substituire die gefundenen Werthe in die Gleichung (297), so hat man das allgemeine Integral. Wären aber von den erwähnten $(n+1)$ Wurzeln, die der (293) ihrer Natur nach zukommen können, einige weggefallen, oder die ihnen entsprechenden particulären Werthe, aus einer der früher zur Sprache gebrachten Ursachen, unbrauchbar geworden, so hat man kein allgemeines, sondern nur ein particuläres, mit der genügenden Anzahl willkürlicher periodischer Functionen nicht versehenes Integral gefunden, welches durch den Zusatz Eines oder einiger neuer particulärer Werthe vervollständigt werden muss, welche letzteren in Form von Exponentiellen oder Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl zunächst erscheinen werden, und zwar: Wenn $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1$ Einen gemeinschaftlichen Factor besitzen, von der Form $v - v_1$, durch welchen der Bruch $\frac{\mathfrak{U}_0}{\mathfrak{U}_1}$ abgekürzt werden kann, so geht Eine Wurzel $v_1$ der Gleichung (295) verloren, und es entspricht derselben ein particuläres Integral:

$$\psi_1 (x) (1 + v_1)^{\frac{x}{h}}, \tag{299}$$

unter $\psi_1$ eine periodische, sonst aber ganz willkürliche Function von $x$ verstanden. Kömmt der Factor $(v - v_1)$ in $U_0$ und $U_1$ $s$-mal vor, so bekömmt man eben so um $s$ Wurzeln der Gleichung (295) weniger, und, denselben entsprechend, ein particuläres Integral mit $s$ willkürlichen Functionen:

$$(1 + v_1)^{\frac{x}{h}} [\psi_1 (x) + x \psi_2 (x) + x^2 \psi_3 (x) + \ \ldots\ldots \ + x^{s-1} \psi_s (x)], \tag{300}$$

wo abermals unter $\psi_1 (x)$, $\psi_2 (x)$, $\psi_3 (x) \ldots \psi_s (x)$, willkürliche Functionen verstanden werden, die nur die Eigenschaft besitzen müssen, ihren Werth nicht zu ändern, wenn $x$ in $x + h$ verwandelt wird. Endlich werden auch diejenigen Werthe von $U_1$, die dem Ausdruck:

$$C\, e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du}$$

einen unendlichen Werth ertheilen, wenn solche vorhanden sind, gerade wie bei den Differentialgleichungen, eine Reihe particulärer Werthe liefern, welche in Form von Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl erscheinen, und gelegentlich, wo diess erspriesslich ist, verwandelt werden können entweder in bestimmte Integrale oder Producte aus Exponentialgrössen in endliche oder unendliche Polynome, geordnet nach absteigenden Potenzen von $x$. Es lässt sich in der That, genau auf dieselbe Weise wie bei den Differentialgleichungen im ähnlichen Falle, nachweisen, dass, wenn $V$ einen Factor $(v - v_1)$ im Nenner $(m + 1)$ mal enthält, von welchem im Exponenten der in $V$ enthaltenen Exponentielle keine Spur vorhanden ist, ein particuläres Integral vorhanden sei in Form eines $m^{\text{ten}}$ Differentialquotienten, nämlich:

$$\left\{ \frac{d^m}{dv^m} \left[ (1 + v)^{\frac{x}{h}} (v - v_1)^{m+1}\, V \right] \right\}_{v_1} \tag{301}$$

Dass aber der Ausdruck (300), unter der oben angedeuteten Bedingung, dass nämlich die Polynome $U_0$ und $U_1$ den gemeinschaftlichen Factor $(v - v_1)^s$ haben, der Differenzengleichung Genüge leiste, lässt sich auch durch unmittelbare Substitution, mit Hilfe der folgenden allgemeinen Formel darthun:

$$\begin{aligned} \Delta^r (P . Q) = P . \Delta^r Q + \binom{r}{1} \Delta P [\Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q] + \binom{r}{2} \Delta^2 P [\Delta^{r-2} Q + 2 \Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q] + \\ + \binom{r}{3} \Delta^3 P [\Delta^{r-3} Q + 3 \Delta^{r-2} Q + 3 \Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q] + \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{302}$$

Diese Formel ist nicht bloss für positive Werthe der Zahl $r$, sondern auch für negative, ganze und gebrochene, und allgemein für beliebige $r$ brauchbar, wenn man nur übereinkömmt die Gleichung:

$$\Delta^r . e^{ux} = e^{ux} (e^{uh} - 1)^r, \tag{303}$$

die sich für ganze und positive Werthe von $r$ durch die directe Operation des Differenzennehmens ableiten lässt, für jedes $r$ allgemein giltig vorauszusetzen, und somit als Definition der Differenzen mit allge-

meiner Ordnungszahl zu betrachten. Um sie zu erweisen, ist nur nöthig, die beiden Factoren des Productes $PQ$ durch ihre Entwicklungen in eine Reihe von Exponentiellen zu ersetzen, also etwa:

$$P = \mathbf{S}\,[A_\alpha\, e^{\alpha x}], \qquad Q = \mathbf{S}\,[B_\beta\, e^{\beta x}], \tag{304}$$

somit:

$$PQ = \mathbf{S}\,[A_\alpha\, B_\beta\, e^{(\alpha+\beta)x}] \tag{305}$$

und:

$$\Delta^r\,(PQ) = \mathbf{S}\,[A_\alpha\, B_\beta\, e^{(\alpha+\beta)x}\,(e^{(\alpha+\beta)h} - 1)^r] \tag{306}$$

zu setzen, ferner die letzte Gleichung zu schreiben wie folgt:

$$\Delta^r\,(PQ) = \mathbf{S}\left[A_\alpha\, B_\beta\, e^{(\alpha+\beta)x}\,[(e^{\beta h} - 1) + (e^{\alpha h} - 1)\,\big((e^{\beta h} - 1) + 1\big)]^r\right] \tag{307}$$

und die $r^{\text{te}}$ Potenz des hier vorkommenden Ausdruckes mittelst der Binomialformel zu entwickeln, indem man in demselben $e^{\beta h} - 1$ als erstes und $(e^{\alpha h} - 1)\,\big((e^{\beta h} - 1) + 1\big)$ als zweites Glied des Binoms ansieht, schliesslich aber zu bemerken, dass allgemein, für beliebige Werthe von $p$ und $q$:

$$\mathbf{S}\,[A_\alpha\, B_\beta\, e^{(\alpha+\beta)x}\,(e^{\alpha h} - 1)^p\,(e^{\beta h} - 1)^q] = \Delta^p\, P\,.\,\Delta^q\, Q \tag{308}$$

ist. Nehmen wir also diese Formel (302) als erwiesen an und setzen:

$$Q = e^{ux}, \qquad \Delta^r\, Q = e^{ux}\,(e^{uh} - 1)^r,$$

somit:

$$\begin{aligned} \Delta^{r-1}\, Q + \Delta^r\, Q &= e^{ux+uh}\,(e^{uh} - 1)^{r-1} \\ \Delta^{r-2}\, Q + 2\Delta^{r-1}\, Q + \Delta^r\, Q &= e^{ux+2uh}\,(e^{uh} - 1)^{r-2} \\ \Delta^{r-3}\, Q + 3\Delta^{r-2}\, Q + 3\Delta^{r-1}\, Q + \Delta^r\, Q &= e^{ux+3uh}\,(e^{uh} - 1)^{r-3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{309}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \Delta^r(PQ) = \Delta^r(P\,.\,e^{ux}) = e^{ux}\Big[P\,(e^{uh} - 1)^r + \binom{r}{1}\,\Delta P\, e^{uh}\,(e^{uh} - 1)^{r-1} + \binom{r}{2}\,\Delta^2\, P e^{2uh}\,(e^{uh} - 1)^{r-2} + \\ + \binom{r}{3}\,\Delta^3\, P e^{3uh}\,(e^{uh} - 1)^{r-3} + \,\cdots\cdots\Big]. \end{aligned} \tag{310}$$

Diess vorausgesetzt, denken wir uns in der Differenzengleichung (282) die abhängige Veränderliche $y$ durch das Product $P.Q$ ersetzt, ferner mit $U_0'$, $U_0''$, $U_0'''$ ... die successiven Differentialquotienten von $U_0$, nach der darin enthaltenen Grösse $(e^{uh} - 1)$ genommen, bezeichnet, und ebenso die ähnlichen Differentialquotienten von $U_1$ durch $U_1'$, $U_1''$, $U_1'''$ ... angedeutet, so erhalten wir als Resultat der Substitution:

$$P(U_0 + U_1 x) + e^{uh}\,.\,\Delta P(U_0' + U_1' x) + \frac{1}{2}\,e^{2uh}\,.\,\Delta^2 P(U_0'' + U_1'' x) + \frac{1}{2.3}\,e^{3uh}\,.\,\Delta^3 P\,(U_0''' + U_1''' x) + \ldots \tag{311}$$

Haben nun die Polynome $U_0$ und $U_1$ den Factor:

$$(v - v_1)^s = (e^{uh} - 1 - v_1)^s$$

gemeinschaftlich, so verschwinden für $v = v_1$ nicht bloss $U_0$ und $U_1$, sondern auch ihre successiven Differentialquotienten bis zum $(s-1)^{ten}$ inclusive, und somit ist der Ausdruck (311) identisch Null, wenn nur unter $P$ eine Function verstanden wird, deren successive Differenzen von der $s^{ten}$ angefangen der Nulle gleich sind, also eine Function wie:

$$\psi_1(x) + x\psi_2(x) + x^2\psi_3(x) + \cdots\cdots + x^{s-1}\psi_s(x), \tag{312}$$

unter $\psi_1(x), \psi_2(x) \ldots . \psi_s(x)$ periodische Functionen von $x$ verstanden, die ihren Werth nicht ändern, wenn $x$ in $x+h$ übergeht, wodurch denn die Giltigkeit des Ausdruckes (300) als particuläres Integral unter den entsprechenden Bedingungen nachgewiesen ist. Wir sehen also, dass die Differenzengleichungen eine ähnliche Behandlung wie die Differentialgleichungen zulassen, und im Ganzen nicht mehr und nicht weniger Schwierigkeiten darbiethen wie diese.

## §. 7.

## Integration der completen Differenzen- und Differentialgleichungen.

Diejenigen Gleichungen, die wir bisher zu integriren versucht haben, enthielten sämmtlich kein Glied, das als eine reine Function von $x$ ohne $y$ erschienen wäre; wir wollen nun auch diejenigen betrachten, die ein solches enthalten, d. h. wir wollen sehen, wie man die Integrale der Gleichungen:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x), \tag{313}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n}(a_n + b_n x) + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(a_{n-1} + b_{n-1}x) + \cdots\cdots + \frac{dy}{dx}(a_1 + b_1 x) + y(a_0 + b_0 x) = f(x), \tag{314}$$

und der entsprechenden Differenzengleichungen:

$$a_n \Delta^n y + a_{n-1}\Delta^{n-1}y + a_{n-2}\Delta^{n-2}y + \cdots\cdots + a_1\Delta y + a_0 y = f(x) \tag{315}$$

$$\Delta^n y(a_n + b_n x) + \Delta^{n-1}y(a_{n-1} + b_{n-1}x) + \cdots\cdots + \Delta y(a_1 + b_1 x) + y(a_0 + b_0 x) = f(x) \tag{316}$$

zu ermitteln habe, wenn man die Integrale derjenigen anderen bereits gefunden hat, die aus diesen hervorgehen, wenn $f(x)$ durch die Nulle ersetzt wird, oder mit andern Worten: wir wünschen aus dem Integrale der reducirten Gleichung jenes der completen abzuleiten.

Im ersten Abschnitte (siehe: Einleitung §. 5) ist bereits zu diesem Zwecke eine allgemeine Methode, die nämlich der Variation der willkürlichen Constanten auseinandergesetzt wor-

den; ihre Wirksamkeit erstreckt sich auf alle linearen Differentialgleichungen mit beliebigen Coefficienten, vorausgesetzt, dass man im Besitze des allgemeinen Integrales der reducirten Gleichung ist. Diese Methode ist nun auch hier anwendbar; man begegnet jedoch, wenn man sie in speciellen Fällen practisch durchzuführen beabsichtigt, mancherlei Schwierigkeiten, welche es räthlich machen sie zu verlassen und andere Wege aufzusuchen, wiewohl nicht zu läugnen ist, dass sie unter allen hiezu dienlichen Methoden jedenfalls den ersten Rang einnehme, sowohl in Bezug auf ihre Allgemeinheit, als auch auf die Leichtigkeit, mit der sie sich manchen Gleichungsformen, z. B. denen mit constanten Coefficienten anschmiegt.

In der That: ist eine solche Differentialgleichung von linearer Form und mit constanten Coefficienten zu integriren, die, in symbolischer Form hingeschrieben, so aussieht:

$$F\left(\frac{d}{dx}\right) y = f(x), \tag{317}$$

so fängt man damit an, vorerst, nach §. 1 dieses Abschnittes, particuläre, der reducirten Gleichung Genüge leistende Werthe zu ermitteln, welche $n$ an der Zahl vorhanden sein werden, wenn die vorgelegte Differentialgleichung von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung ist und:

$$y_1, \quad y_2, \quad \dots\dots\dots \quad y_n$$

heissen mögen. Sie erscheinen, wie der eben citirte Paragraph lehrt, in der Regel alle in Form von Exponentiellen, so dass man hat:

$$y_1 = e^{\theta_1 x}, \quad y_2 = e^{\theta_2 x}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad y_n = e^{\theta_n x}; \tag{318}$$

$\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$ sind die Wurzeln der Gleichung: $F(\theta) = 0$, und das allgemeine Integral der reducirten Gleichung ist:

$$y = C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{\theta_2 x} + \dots\dots\dots + C_n e^{\theta_n x}. \tag{319}$$

Um nun von diesem den Übergang zu jenem der completen Gleichung zu vermitteln, wenden wir die Methode der Variation der Constanten an und führen demgemäss die obigen Werthe von $y_1, y_2, \dots y_n$ in die Gleichungen (53) (siehe §. 5 des I. Abschnittes) ein, zugleich die allda vorfindigen $F(x)$ und $X_n$ durch die ihnen hier zukommenden Werthe $f(x)$ und 1 ersetzend, wodurch wir erhalten:

$$\begin{array}{lllll}
C_1' e^{\theta_1 x} & + C_2' e^{\theta_2 x} & + \dots\dots\dots + & C_n' e^{\theta_n x} & = 0 \\
C_1' e^{\theta_1 x} \theta_1 & + C_2' e^{\theta_2 x} \theta_2 & + \dots\dots\dots + & C_n' e^{\theta_n x} \theta_n & = 0 \\
C_1' e^{\theta_1 x} \theta_1^2 & + C_2' e^{\theta_2 x} \theta_2^2 & + \dots\dots\dots + & C_n' e^{\theta_n x} \theta_n^2 & = 0 \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \\
C_1' e^{\theta_1 x} \theta_1^{n-2} & + C_2' e^{\theta_2 x} \theta_2^{n-2} & + \dots\dots\dots + & C_n' e^{\theta_n x} \theta_n^{n-2} & = 0 \\
C_1' e^{\theta_1 x} \theta_1^{n-1} & + C_2' e^{\theta_2 x} \theta_2^{n-1} & + \dots\dots\dots + & C_n' e^{\theta_n x} \theta_n^{n-1} & = f(x).
\end{array} \tag{320}$$

In diesen Gleichungen betrachten wir die Producte:

$$C_1' \, e^{\theta_1 x}, \quad C_2' \, e^{\theta_2 x}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad C_n' \, e^{\theta_n x}$$

als die Unbekannten, deren Werthe zu ermitteln sind und verfahren, behufs der Auflösung derselben auf folgende Weise: Um namentlich den Werth der ersten dieser Unbekannten zu erhalten, denken wir uns das Product:

$$(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3) \ldots\ldots\ldots (\theta_1 - \theta_n) = F'(\theta_1) \tag{321}$$

gebildet und nach Potenzen von $\theta_1$ geordnet, so, dass man es erhält in der Form:

$$B_0 + B_1 \theta_1 + B_2 \theta_1^2 + \ldots\ldots\ldots + \theta_1^{n-1} = F'(\theta_1), \tag{322}$$

so ist dasselbe offenbar eine Function, welche die Eigenschaft hat der Nulle gleich zu werden, wenn man $\theta_1$ entweder durch $\theta_2$, oder durch $\theta_3$ u. s. w. oder durch $\theta_n$ ersetzt, so, dass also identisch:

$$\left.\begin{array}{l} B_0 + B_1 \theta_2 + B_2 \theta_2^2 + \ldots\ldots\ldots + \theta_2^{n-1} = 0 \\ B_0 + B_1 \theta_3 + B_2 \theta_3^2 + \ldots\ldots\ldots + \theta_3^{n-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_0 + B_1 \theta_n + B_2 \theta_n^2 + \ldots\ldots\ldots + \theta_n^{n-1} = 0 \end{array}\right\} \tag{323}$$

ist. Diess vorausgesetzt multiplizirt man die Gleichungen (320) der Reihe nach mit $B_0$, $B_1$, .... $B_{n-2}$, 1 und addirt sie, so erhält man, mit gehöriger Rücksicht auf die Gleichungen (323):

$$C_1' \, e^{\theta_1 x} = \frac{f(x)}{(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3) \ldots (\theta_1 - \theta_n)} = \frac{f(x)}{F'(\theta_1)} \tag{324}$$

und eben so für die übrigen:

$$\left.\begin{array}{l} C_2' \, e^{\theta_2 x} = \dfrac{f(x)}{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_2 - \theta_3) \ldots (\theta_2 - \theta_n)} = \dfrac{f(x)}{F'(\theta_2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n' \, e^{\theta_n x} = \dfrac{f(x)}{(\theta_n - \theta_1)(\theta_n - \theta_2) \ldots (\theta_n - \theta_{n-1})} = \dfrac{f(x)}{F'(\theta_n)}; \end{array}\right\} \tag{325}$$

durch Multiplication dieser Gleichungen mit:

$$e^{-\theta_1 x} \, dx, \quad e^{-\theta_2 x} \, dx, \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^{-\theta_n x} \, dx,$$

Integration, und Substitution der so erhaltenen Werthe der variabel gemachten Constanten in die Formel (319) für die reduzirte Gleichung, erhält man endlich folgendes allgemeine Integral der completen:

$$y = C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{\theta_2 x} + C_3 e^{\theta_3 x} + \dots\dots\dots + C_n e^{\theta_n x}$$

(326)

$$+ \frac{e^{\theta_1 x}}{F'(\theta_1)} \int e^{-\theta_1 x} f(x)\, dx + \frac{e^{\theta_2 x}}{F'(\theta_2)} \int e^{-\theta_2 x} f(x)\, dx + \dots + \frac{e^{\theta_n x}}{F'(\theta_n)} \int e^{-\theta_n x} f(x)\, dx.$$

Zu demselben Resultate hätten wir aber auch gelangen können auf einem anderen Wege, der den Vortheil darbiethet, hier wenigstens eben so schnell, bei Gleichungen aber mit complizirten Coefficientenformen noch schneller zum Ziele zu führen, nämlich nach Cauchy von der im vierten Paragraph bewiesenen Fourier'schen Formel Gebrauch machend. Man erhält nämlich offenbar das allgemeine Integral der Gleichung (317), wenn man zu dem in (319) gegebenen Ausdrucke noch eine Function von $x$, die gar keine willkürliche Constante in sich zu schliessen braucht, hinzufügt, die der (317) Genüge leistet, und die man auf folgende Weise finden kann: Man setze:

(327)
$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\, \varphi\, d\alpha\, d\lambda,$$

wo $\varphi$ eine noch zu bestimmende Function von $\alpha$ und $\lambda$ bedeutet; man substituire diesen Werth von $y$ in (317), wodurch:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} F(\alpha\sqrt{-1})\, e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\, \varphi\, d\alpha\, d\lambda = f(x),$$

erhalten wird, und in eine identische Gleichung übergeht, wenn:

(328)
$$\varphi = \frac{f(\lambda)}{F(\alpha\sqrt{-1})}$$

ist. Das gesuchte allgemeine Integral sieht daher so aus:

(329)
$$y = C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{\theta_2 x} + \dots\dots + C_n e^{\theta_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\, \frac{f(\lambda)}{F(\alpha\sqrt{-1})}\, d\alpha\, d\lambda,$$

und es lässt sich die Identität desselben mit dem durch die Methode der Variation der willkürlichen Constanten gelieferten ohne Schwierigkeit dadurch nachweisen, dass man in dem hier enthaltenen Doppelintegrale die Integration nach $\alpha$ wirklich vollbringt. Es muss zu diesem Behufe der Bruch $\frac{1}{F(\alpha\sqrt{-1})}$ in Partialbrüche zerlegt werden, deren Einen wir mit:

(330)
$$\frac{A}{\alpha\sqrt{-1} - \theta}$$

bezeichnen wollen, und dem als Bestandtheil von $y$ ein Doppelintegral:

$$\frac{(\theta-\theta_1)^m}{F(\theta)},\ \frac{d}{d\theta}\left[\frac{(\theta-\theta_1)^m}{F(\theta)}\right],\ \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{(\theta-\theta_1)^m}{F(\theta)}\right],\ \ldots\ldots\ \frac{1}{2.3\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}}{d\theta^{m-1}}\left[\frac{(\theta-\theta_1)^m}{F(\theta)}\right]$$

für $\theta=\theta_1$ annehmen; zugleich wird aber das Integral der reduzirten Gleichung in folgender anderer Form erscheinen:

$$(336)\quad y = e^{\theta_1 x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots\ldots + C_m x^{m-1}) + C_{m+1} e^{\theta_{m+1} x} + \ldots\ldots + C_n e^{\theta_n x}.$$

Einem jeden der obenangeführten Partialbrüche (335) entspricht nun als Bestandtheil von $y$ ein Doppelintegral, welches z. B. für den ersten derselben folgende Gestalt trägt:

$$\xi = \frac{A_m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\frac{f(\lambda)}{(\alpha\sqrt{-1}-\theta_1)^m}\,d\alpha\,.\,d\lambda$$

und an dem wir diejenige Reihe von Rechnungsoperationen anbringen, die durch das Symbol: $\left(\frac{d}{dx}-\theta_1\right)^m$ angedeutet ist, um zu gelangen zur Gleichung:

$$(337)\quad \left(\frac{d}{dx}-\theta_1\right)^m \xi = A_m f(x),$$

deren integrirender Factor $e^{-\theta_1 x}$ ist, mit welchem multiplizirt, diese sich zunächst so schreiben lässt:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[e^{-\theta_1 x}\xi\right] = A_m e^{-\theta_1 x} f(x),$$

und sodann eine $m$-malige Integration zulässt, welche:

$$(338)\quad \xi = A_m e^{\theta_1 x}\int^m e^{-\theta_1 x} f(x)\,dx^m + e^{\theta_1 x}(D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + \ldots\ldots + D_m x^{m-1})$$

liefert, unter $D_1, D_2, \ldots D_m$ willkürliche Constanten verstanden. Erwägt man nun, dass auch die anderen mit den Zählern: $A_{m-1}, \ldots A_1$ versehenen Partialbrüche zu $y$ ähnliche Bestandtheile liefern, so erhält man ohne Mühe, durch Substitution derselben in die Gleichung (336), folgende Form des allgemeinen Integrales der completen Gleichung für den Fall gleicher Wurzeln:

$$(339)\quad \begin{aligned} y = {} & e^{\theta_1 x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots\ldots + C_m x^{m-1}) + C_{m+1} e^{\theta_{m+1} x} + \ldots\ldots + C_n e^{\theta_n x} \\ & + A_m e^{\theta_1 x}\int^m e^{-\theta_1 x} f(x)\,dx^m + A_{m-1} e^{\theta_1 x}\int^{m-1} e^{-\theta_1 x} f(x)\,dx^{m-1} + \ldots\ldots + A_1 e^{\theta_1 x}\int e^{-\theta_1 x} f(x)\,dx \\ & + A_{m+1} e^{\theta_{m+1} x}\int e^{-\theta_{m+1} x} f(x)\,dx + A_{m+2} e^{\theta_{m+2} x}\int e^{-\theta_{m+2} x} f(x)\,dx + \ldots\ldots + A_n e^{\theta_n x}\int e^{-\theta_n x} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Wir wenden uns jetzt zur Differenzengleichung (315), deren allgemeines Integral wir mit Hülfe der Fourier'schen Formel entwickeln wollen. Wir setzen zu dem Ende:

$$(346)\quad y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda\left[\frac{A_1}{e^{\alpha h\sqrt{-1}}-1-v_1}+\frac{A_2}{e^{\alpha h\sqrt{-1}}-1-v_2}+\ldots+\frac{A_n}{e^{\alpha h\sqrt{-1}}-1-v_n}\right]$$

und es erübrigt nur noch den Werth dieses $n$ theiligen Doppelintegrales durch wirkliche Integration zu ermitteln. Wir verfahren zu diesem Ende auf eine, dem Vorgange im früher behandelten Falle ganz analoge Weise und setzen:

$$\xi=\frac{A_r}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\,\frac{f(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda}{e^{\alpha h\sqrt{-1}}-1-v_r}$$

und erhalten offenbar, indem wir den zweiten Theil dieser Gleichung den, durch das Symbol $(\Delta-v_r)\,\xi$ angedeuteten Operationen unterwerfen:

$$(347)\qquad (\Delta - v_r)\,\xi = A_r\, f(x).$$

Es ist diess aber eine complete Differenzengleichung von der ersten Ordnung, wie wir sie bereits in §. 2 des I. Abschnittes zu integriren gelernt haben, und wir brauchen nur, in der ebendaselbst unter (17) stehenden Formel, statt:

$$y,\qquad X,\qquad F(x)$$

beziehungsweise die Grössen:

$$\xi,\qquad -v_r,\qquad A_r\, f(x)$$

zu setzen, um zu erhalten:

$$(348)\qquad \xi=\psi_r\,.\,e^{\Sigma[\log(1+v_r)]}+e^{\Sigma[\log(1+v_r)]}\,\Sigma\left[\frac{A_r\, f(x)}{1+v_r}\,e^{-\Sigma[\log(1+v_r)]}\right].$$

Wir können diese Formel durch wirkliche Bildung von $\Sigma\,[\log(1+v_r)]$ noch ein wenig umgestalten, denn es ist, wegen $\Delta x = h$:

$$(349)\qquad \Sigma\,[h]=x,\qquad \Sigma\left[\frac{h}{k}\right]=\frac{x}{k}$$

und somit, wenn wir:

$$\frac{h}{k}=\log(1+v_r),\qquad \text{also:}\qquad k=\frac{h}{\log(1+v_r)}$$

setzen, und diesen Werth in (349) substituiren:

$$\Sigma\,[\log(1+v_r)]=\frac{x\log(1+v_r)}{h},$$

sonach:

$$(350)\qquad e^{\Sigma[\log(1+v_r)]}=(1+v_r)^{\frac{x}{h}}.$$

Wir bekommen auf diese Weise aus der (348):

$$\xi = \psi_r\,(1 + v_r)^{\frac{x}{h}} + (1 + v_r)^{\frac{x}{h}}\,\Sigma\left[\frac{A_r\,f(x)}{(1 + v_r)^{\frac{x}{h}+1}}\right]. \tag{351}$$

Es erhält aber durch eine ähnliche Behandlung jedes der $n$ Glieder im zweiten Theile der Gleichung (346) eine solche Gestalt und wir gewinnen sonach endlich, für das allgemeine Integral der completen Gleichung (315), indem wir gleichzeitig auf die Werthe der Constanten:

$$A_1 = \frac{1}{F'(v_1)}, \quad A_2 = \frac{1}{F'(v_2)}, \quad \ldots\ldots \quad A_n = \frac{1}{F'(v_n)}$$

Rücksicht nehmen, einen Ausdruck von folgender Form:

$$\begin{aligned} y &= \psi_1\,(1 + v_1)^{\frac{x}{h}} + \psi_2\,(1 + v_2)^{\frac{x}{h}} + \;\ldots\ldots\; + \psi_n\,(1 + v_n)^{\frac{x}{h}} \\ &+ \frac{(1+v_1)^{\frac{x}{h}}}{F'(v_1)}\Sigma\left[\frac{f(x)}{(1+v_1)^{\frac{x}{h}+1}}\right] + \frac{(1+v_2)^{\frac{x}{h}}}{F'(v_2)}\Sigma\left[\frac{f(x)}{(1+v_2)^{\frac{x}{h}+1}}\right] + \ldots + \frac{(1+v_n)^{\frac{x}{h}}}{F'(v_n)}\Sigma\left[\frac{f(x)}{(1+v_n)^{\frac{x}{h}+1}}\right]. \end{aligned} \tag{352}$$

Die erste Zeile dieses Ausdruckes enthält das Integral der reduzirten Gleichung und es bedeuten in demselben $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots\ \psi_n$ eben so viele willkürliche periodische Functionen von $x$, welche die Eigenschaft besitzen, sich nicht zu ändern, wenn $x$ in $x+h$ übergeht; die zweite Zeile aber enthält die besondere Auflösung, die der completen Gleichung genügt. — Der bisher noch nicht beachtete Fall gleicher Wurzeln der Gleichung (344) gestattet eine ähnliche Behandlung und die hierbei durchzuführenden Rechnungen unterscheiden sich von den eben gemachten im Wesentlichen nur dadurch, dass nicht bloss complete Differenzengleichungen der ersten Ordnung wie (347) zu integriren vorkommen, sondern auch solche wie:

$$(\Delta - v)^s\,\xi = A\,f(x). \tag{353}$$

Die Integration dieser Gleichung aber bietet keine Schwierigkeiten dar, wenn man bedenkt, dass von derselben:

$$(1 + v)^{-\frac{x}{h}}$$

der integrirende Factor sei, mit dem der erste Theil der (353) multiplizirt, sich in die, mit dem constanten Factor $(1+v)^s$ multiplizirte, vollständige $s^{\text{te}}$ Differenz des Productes $(1+v)^{-\frac{x}{h}}\,.\,\xi$, also in:

$$(1+v)^s\,\Delta^s\left\{(1 + v)^{-\frac{x}{h}}.\xi\right\}$$

verwandelt, wie die Formel (302) des vorhergehenden Paragraphes lehrt.

Wir wenden uns jetzt zu den Gleichungen (314) und (316) mit veränderlichen Coefficienten, deren allgemeines Integral offenbar auch aus zwei Theilen zusammengesetzt werden kann, nämlich dem

allgemeinen, $n$ willkürliche Constanten oder periodische Functionen von $x$ in sich schliessenden, Integrale der reduzirten Gleichung, und einer besonderen Auflösung der completen. Wie ersteres gefunden werde, ist im Laufe dieses Abschnittes gezeigt worden, letztere aber kann mit Hilfe mehrerer Formeln von der Natur der Fourier'schen, ja durch die Fourier'sche selbst, ermittelt werden auf folgende Weise: Man setze:

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{u'}^{u''} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda}^{\lambda''} e^{ux} V \, du \, d\alpha \, d\lambda, \tag{354}$$

unter $V$ eine Function von $u$, $\alpha$ und $\lambda$ verstanden, unter $u'$ und $u''$ aber schicklich gewählte Integrationsgrenzen, so, dass der Gleichung (314) durch diesen Werth von $y$ Genüge geleistet wird; es wird aber diese, durch Substitution des eben hingeschriebenen Werthes gebracht auf:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{u'}^{u''} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (U_0 + U_1 x) \, e^{ux} V \, du \, d\alpha \, d\lambda = f(x), \tag{355}$$

und, durch Scheiden des hier vorkommenden bestimmten Integrales in zwei Theile, dem ohne und dem mit dem Factor $x$, und theilweises Integriren des letzteren, auf:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} U_1 V \, e^{ux} d\alpha \, d\lambda \right\}_{u'}^{u''} + \frac{1}{2\pi} \int_{u'}^{u''} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \left[ U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) \right] e^{ux} \, du \, d\alpha \, d\lambda = f(x). \tag{356}$$

Nun nehme man $V$ so an, dass:

$$U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) = 0, \tag{357}$$

also:

$$V = \frac{\varphi}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du} \tag{358}$$

ist, wo $\varphi$ eine nach $u$ constante Grösse bedeutet, die aber noch immer $\alpha$ und $\lambda$ in sich enthalten kann. Die Gleichung (356) geht hiedurch über in:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \varphi \, e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \, d\alpha \, d\lambda \right\}_{u'}^{u''} = f(x), \tag{359}$$

und es wird ihr Genüge geleistet, wenn man $u'$ gleich einer beliebigen Wurzel der Gleichung:

$$e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} = 0, \tag{360}$$

ferner $u'' = \alpha \sqrt{-1}$, endlich $\varphi$ gleich einer solchen Function von $\alpha$ und $\lambda$ nimmt, dass:

$$\varphi\left\{e^{\int\frac{U_0}{U_1}du}\right\}_{\alpha\sqrt{-1}} = e^{-\alpha\lambda\sqrt{-1}}\, f(\lambda) \tag{361}$$

also:

$$\varphi = e^{-\alpha\lambda\sqrt{-1}}\left\{e^{-\int\frac{U_0}{U_1}du}\right\}_{\alpha\sqrt{-1}} f(\lambda) \tag{362}$$

wird. Die gesuchte besondere Auflösung ist somit:

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{u'}^{\alpha\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{ux-\alpha\lambda\sqrt{-1}+\left\{\int\frac{U_0}{U_1}du\right\}_{\alpha\sqrt{-1}}^{u}} \frac{f(\lambda)}{U_1}\, du\cdot d\alpha\; d\lambda, \tag{363}$$

und es wird hier offenbar vorausgesetzt, dass die erste der drei hier vorzunehmenden Integrationen, die nach $u$ sey. Da man für $u'$ eine beliebige der Wurzeln der Gleichung (360) nehmen kann, und es sich sehr oft trifft, dass $u' = \pm\,\infty\,\sqrt{-1}$ eine solche ist, so wird man diese, falls sie vorhanden ist, allen anderen vorziehen, ist sie aber nicht vorhanden, so wird man besser thun, um complizirten Erörterungen über den Sinn eines bestimmten Integrales mit gemischt reellen und imaginären Grenzen auszuweichen, die gesuchte besondere Auflösung hinzustellen als Differenz zweier bestimmter Integrale, nämlich:

$$\begin{aligned} y = \;& \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\alpha\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{ux-\alpha\lambda\sqrt{-1}+\left\{\int\frac{U_0}{U_1}du\right\}_{\alpha\sqrt{-1}}^{u}} \frac{f(\lambda)}{U_1}\, du\; d\alpha\; d\lambda\; - \\ & - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{u'}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{ux-\alpha\lambda\sqrt{-1}+\left\{\int\frac{U_0}{U_1}du\right\}_{\alpha\sqrt{-1}}^{u}} \frac{f(\lambda)}{U_1}\, du\; d\alpha\; d\lambda, \end{aligned} \tag{364}$$

eine Formel, die im Grunde mit der früheren übereinstimmt, und im Wesentlichen nur den Zweck erreicht, den etwa zweifelhaften Sinn eines solchen bestimmten Integrales mit imaginären Grenzen näher anzugeben. Und dieser eben gewonnene Ausdruck, zu dem allgemeinen Integrale der reduzirten Gleichung hinzugefügt, liefert das allgemeine der completen.

Es kann hier noch bemerkt werden, dass es nicht immer nöthig sei, von der Fourier'schen Formel Gebrauch zu machen; sehr oft und namentlich dann, wenn $f(x)$ sich auf eine Constante reduzirt, erhält man das allgemeine Integral der completen Gleichung aus jenem der reduzirten durch eine entsprechende Veränderung der zwischen den Constanten der Integration stattfindenden Beziehungsgleichungen; so wird man z. B. das Integral der completen Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} \pm a\,x\,y = b$$

genau in derselben Form wie das der reduzirten, nämlich durch die Formel (86) §. 3. wiedergeben, nur wird zwischen den $(n+1)$ Constanten nicht mehr die Beziehungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots + C_{n+1} = 0,$$

sondern folgende andere stattfinden:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots + C_{n+1} = b.$$

Aber auch in dem Falle, wenn $f(x)$ sich auf eine Exponentialgrösse wie $e^{\theta x}$, oder auf eine Summe von solchen reduzirt, wird man die Fourier'sche Formel entbehren können und die besondere Auflösung, welche, ohne eine Constante in sich zu enthalten, den ersten Theil der Gleichung auf die obige Exponentielle reduzirt, hinstellen in Form eines bestimmten Integrales mit derselben Differentialfunction unter dem Integralzeichen, welche auch die particulären, der reduzirten Gleichung Genüge leistenden Integrale enthalten und mit Grenzen, von denen die eine $\theta$, die andere aber eine beliebige der Wurzeln der Gleichung (360) ist, mit hinzugefügtem bestimmten constanten Factor $C$, der so gewählt ist, dass für $u = \theta$:

$$C\, e^{\int \frac{U_0}{U_1} du} = \pm 1$$

ist, je nachdem man dieses $\theta$ entweder zu einer oberen oder unteren Integrationsgrenze erkiesen hat. Besteht die Function $f(x)$ aus mehreren solchen Exponentiellen, oder, was auf dasselbe hinausgeht, aus trigonometrischen Functionen *sin* und *cos*, so wird man auch die in Rede stehende besondere Auflösung aus eben so vielen Theilen zusammensetzen und selbst in dem Falle, dass $f(x)$ eine algebraische, ganze oder gebrochene Function von $x$ ist, wird man, wenn man diess für gut findet, den Gebrauch der, hier als allgemein wirksames Mittel vorgeschlagenen, Fourier'schen Formel vermeiden können, wenn man bedenkt, dass es der Arten mehrere gibt, auch ein algebraisches $f(x)$ in eine Summe von Exponentiellen, oder ein dem analoges Gebilde umzuwandeln. Es ist zum Exempel, für unendlich kleine Werthe von $\beta$:

$$x = \frac{1}{2\beta}\left[e^{\beta x} - e^{-\beta x}\right]$$

und somit auch:

$$x^m = \frac{1}{2^m \beta^m}\left[e^{\beta x} - e^{-\beta x}\right]^m,$$

eine Formel, auf welche Liouville im *Journal de l' école polytechnique* aufmerksam gemacht hat und die man zur Verwandlung einer algebraischen, ganzen Function $f(x)$ in eine Summe von Exponentiellen verwenden kann, wenn man daraus erspriessliche Ausdrücke zu erhalten hofft. Ebenso wird man die Gamma-Function, von der wir §. 4, S. 83, Gebrauch gemacht haben, benützen können zur Umwandlung einer gebrochenen Function in eine Summe von bestimmten Integralen, die das $x$ nur im Exponenten der Exponentielle enthalten, kurz, es gibt der Mittel zu diesem Zwecke sehr viele und ihre Anzahl wird durch die Fortschritte der Wissenschaft noch fortwährend grösser.

Dieselbe Behandlung mittelst der Fourier'schen Formel, die wir hier den Differentialgleichungen mit variablen Coefficienten angedeihen liessen, gestatten auch die ähnlich gebauten Differenzengleichungen (316) und zwar treten hier genau dieselben Formeln (354) bis (363) auf, nur mit dem einzigen Unterschiede, dass die Polynome $U_0$ und $U_1$ andere Werthe. die nämlich durch die Gleichungen (284) und (285) gegebenen, erhalten.

## §. 8.

## Methode die Allgemeinheit des erhaltenen Integrales zu erweisen.

Wenn auch die von uns betretenen Wege, bei nur einiger Achtsamkeit des Rechners, sicher zu dem allgemeinen, mit der gehörigen Anzahl willkürlicher Constanten versehenen Integrale führen, so muss doch zugegeben werden, dass $n$ aufgestellte, verschieden aussehende, mit willkürlichen Constanten multiplizirte Ausdrücke, die einer Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung einzeln Genüge leisten, zusammengenommen doch nicht immer nothwendig das allgemeine Integral bilden, und dass diess namentlich dann nicht der Fall ist, wenn Einer oder mehrere von ihnen aus den anderen, durch Multiplication mit constanten Factoren und Addition, hervorgehen; ja, wenn man bedenkt, dass sich beinahe jedesmal mehr als $n$ particuläre Werthe hinschreiben lassen, die man, theils durch verschiedene Combination der Integrationsgränzen bei den bestimmten Integralen, theils durch Hinstellen in Form eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl und ähnliche Transformationen erzeugt, die also offenbar nicht alle von einander verschieden sein können, so sieht man auch die Möglichkeit ein, dass gelegentlich ein minder achtsamer Rechner einen Ausdruck, in welchem $n$ willkürliche Constanten sichtbar sind, für ein allgemeines Integral halten kann, der es doch nicht ist. Diess wird sich nun freilich bei Problemen der Mechanik oder Physik, die in der Regel zu partiellen Differentialgleichungen führen, selten ereignen, weil mittelst des unvollständigen Integrales gewisse Grenzbedingungen nicht erfüllt werden können; gleichwohl wird ein strenger Mathematiker das Recht haben zu fordern. dass die Allgemeinheit des erhaltenen Integrales bewiesen werde — ein Beweis, der nicht immer ohne Schwierigkeiten ist, insofern, als dazu oft nicht unbedeutende analytische Entwicklungen gefordert werden. Uns liegt es ob, eine, zu solcher Beweisführung dienliche Methode auseinanderzusetzen.

Eine solche, in ihren Grundzügen höchst einfache Methode lässt sich nun aber auf die Natur der linearen Differentialgleichungen gründen. Wir wissen nämlich. dass, wenn man particuläre Integrale einer solchen hat, nicht nur diese, mit beliebigen Constanten multiplizirt, sondern auch unzählige andere, durch Multiplication mit Constanten und Addition aus denselben entstandene Ausdrücke, die Eigenschaft Genüge zu leisten besitzen. Hieraus folgt, dass das Integral einer höheren Differentialgleichung stets auf unendlich viele verschiedene Arten geschrieben werden kann; in welcher Art aber man es auch immer hinschreiben mag, stets wird man, die Integralgleichung einer entsprechenden Anzahl

von Differentiationen unterwerfend und aus ihr und den durch Differenziren erhaltenen die Constanten eliminirend, zu einer und derselben vorgelegten Differentialgleichung zurückkehren müssen, wenn das Integral wirklich ein allgemeines ist; im entgegengesetzten Falle jedoch verhält es sich offenbar wie ein solches, in dem gleiche particuläre Integrale vorkommen. Solche verträgt aber, wie wir wissen, eine lineare Differentialgleichung nicht, denn sie verwandeln alle Coefficienten derselben jeden einzeln, entweder in 0 oder in $\frac{0}{0}$, ersteres, wenn diese in ihrer ursprünglichen Form als zweiwerthige Functionen dastehen, wie sie durch die Kramer'sche Eliminationsmethode erzeugt wurden, letzteres, wenn bereits eine Division durch eine entsprechende Function von $x$ stattgefunden hat (siehe I. Abschnitt §. 4).

Aus dieser kurzen Auseinandersetzung geht nun aber folgende allgemeine Methode hervor zu beweisen, dass gewisse vorgelegte Functionen von $x$ wesentlich von einander verschieden seien, in dem Sinne, dass keine von ihnen, durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition, aus den übrigen hervorzugehen vermag: Man bilde, nach dem (I. Abschnitt, Einleitung, §. 4) auseinandergesetzten Verfahren, die lineare Differentialgleichung, welche eben diese Functionen als particuläre Integrale hat, so wird dieselbe, im Falle, wo sie wesentlich von einander verschieden sind, mindestens einige Coefficienten bekommen, die nicht identisch Null sind, und namentlich wird der erste derselben stets von der Nulle verschieden sein müssen. Ist jedoch unter diesen Functionen auch nur Eine vorfindig, die aus den übrigen auf die angedeutete Art hervorzugehen vermag, so verschwinden alle Coefficienten identisch und namentlich auch der erste derselben. Die Verschiedenheit dieser Functionen wird daher nachgewiesen sein, wenn es uns gelingt darzuthuen, dass dieser erste Coefficient nicht identisch gleich Null sei und hiezu wieder ist nur nothwendig zu zeigen, dass er nur für irgend einen Werth von $x$, etwa für $x = 0$, von der Nulle verschieden ausfalle. Um wo möglich alle Erleichterungen einer solchen oft nicht ganz unbedeutenden Rechnung anzudeuten, ist es erspriesslich zu bemerken, dass man auf diese Art, die auf ihre Verschiedenheit zu untersuchenden Ausdrücke auch parthienweise, etwa die ähnlich gebauten zusammennehmend, oder allmälig einen nach dem anderen hinzusetzend, vorzunehmen berechtigt sei.

In dem speziellen Falle, wo die Verschiedenheit von nur zweien Functionen, die wir mit $y_1$ und $y_2$ bezeichnen wollen, nachzuweisen ist, thut man dar, dass:

$$y_1 y'_2 - y'_1 y_2 \tag{365}$$

für irgend einen Werth von $x$ von der Nulle verschieden sei.

Sind der Functionen drei an der Zahl: $y_1$, $y_2$ und $y_3$, so ist zu beweisen das Nichtverschwinden des folgenden Ausdruckes für irgend ein $x$:

$$y_1 y'_2 y''_3 - y_1 y''_2 y'_3 - y'_1 y_2 y''_3 + y'_1 y''_2 y_3 + y''_1 y_2 y'_3 - y''_1 y'_2 y_3. \tag{366}$$

Ist die Anzahl der Functionen vier: $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, so muss folgendes Polynom für irgend einen Werth von $x$ von der Nulle verschieden ausfallen:

$$\begin{array}{lllll}
+ & y_1 & y'_2 & y''_3 & y'''_4 \\
- & y_1 & y'_2 & y'''_3 & y''_4 \\
- & y_1 & y''_2 & y'_3 & y'''_4 \\
+ & y_1 & y''_2 & y'''_3 & y'_4 \\
+ & y_1 & y'''_2 & y'_3 & y''_4 \\
- & y_1 & y'''_2 & y''_3 & y'_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
- & y'_1 & y_2 & y''_3 & y'''_4 \\
+ & y'_1 & y_2 & y'''_3 & y''_4 \\
+ & y'_1 & y''_2 & y_3 & y'''_4 \\
- & y'_1 & y''_2 & y'''_3 & y_4 \\
- & y'_1 & y'''_2 & y_3 & y''_4 \\
+ & y'_1 & y'''_2 & y''_3 & y_4
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
+ & y''_1 & y_2 & y'_3 & y'''_4 \\
- & y''_1 & y_2 & y'''_3 & y'_4 \\
- & y''_1 & y'_2 & y_3 & y'''_4 \\
+ & y''_1 & y'_2 & y'''_3 & y_4 \\
+ & y''_1 & y'''_1 & y_3 & y'_4 \\
- & y''_1 & y'''_2 & y'_3 & y_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
- & y'''_1 & y_2 & y'_3 & y''_4 \\
+ & y'''_1 & y_2 & y''_3 & y'_4 \\
+ & y'''_1 & y'_2 & y_3 & y''_4 \\
- & y'''_1 & y'_2 & y''_3 & y_4 \\
- & y'''_1 & y''_2 & y_3 & y'_4 \\
+ & y'''_1 & y''_2 & y'_3 & y_4
\end{array} \tag{367}$$

u. s. f. bei fünf, sechs ...... auf ihre Verschiedenheit von einander zu prüfenden Functionen.

Um zu dieser Methode ein einziges, einfaches, erläuterndes Beispiel zu haben, wählen wir die Gleichung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - xy = 0, \tag{368}$$

von der wir wissen, dass sie ein allgemeines Integral:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} du \left[C_1 \, e^{ux} + C_2 \, r_1 \, e^{r_1 ux} + C_3 \, r_2 \, e^{r_2 ux}\right] \tag{369}$$

habe (siehe §. 2 dieses Abschnittes, Gleichung (82)); zwischen den Constanten $C_1$, $C_2$ und $C_3$ besteh die Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0; \tag{370}$$

$r_1$, $r_2$ endlich sind die zwei imaginären Wurzeln der Gleichung:

$$u^3 = 1 \tag{371}$$

und man hat somit:

$$r_2^2 = r_1, \quad r_1^2 = r_2, \quad 1 + r_1 + r_2 = 0. \tag{372}$$

Wollte nun Jemand die Allgemeinheit dieses Integrales (369) nachweisen, so hätte er bloss die Verschiedenheit der drei Functionen:

$$(373)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^3}{3}+\alpha x}\, d\alpha, \\ y_2 &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta^3}{3}+r_1\beta x}\, d\beta, \\ y_3 &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma^3}{3}+r_2\gamma x}\, d\gamma \end{aligned}$$

darzuthuen, oder mit anderen Worten: er hätte zu erweisen, dass für diese Werthe von $y_1$, $y_2$, $y_3$ das Polynom (366) für irgend ein $x$, z. B. für $x=0$, von der Nulle verschieden ausfalle, d. h. es ist zu erweisen, dass folgendes dreifache Integral, welches man, durch Substitution der betreffenden Werthe in das Polynom (366) und Benützung der Relationen (372), endlich der Gleichungen:

$$(374)\qquad r_1 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \qquad r_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

gewinnt, nicht identisch Null sei:

$$(375)\qquad \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+x(\alpha+r_1\beta+r_2\gamma)} \left[\beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha\beta^2 - \beta^2\gamma - \gamma^2\alpha - \alpha^2\beta + \right.$$
$$\left. + \sqrt{-3}\,(\beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta)\right] d\alpha\,.\,d\beta\,.\,d\gamma.$$

Nun überzeugt man sich aber sehr leicht, dass für $x=0$ mindestens der imaginäre Theil dieses dreifachen Integrales d. h. der Ausdruck:

$$\sqrt{-3}\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)} (\beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta)\, d\alpha\,.\,d\beta\,.\,d\gamma$$

nicht Null sein könne, weil die Variablen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ zwischen den Integrationsgrenzen nur positive Werthe annehmen und weil demnach die Function unter dem Integralzeichen zwischen eben diesen Grenzen fortwährend positiv ist, sohin das Integral eine Summe darstellt von lauter positiven nicht verschwindenden Gliedern, die also auch selbst nicht der Nulle gleich sein kann.

Sind nun aber die der Betrachtung unterworfenen drei Functionen von einander verschieden, so bleiben sie es auch, wenn man sie mit willkürlichen Constanten multiplizirt, und setzt man zwischen diesen eine Relation fest, so wird sich mittelst derselben Eine der Constanten durch die zwei übrigen ausdrücken lassen; man wird namentlich in gegenwärtigem Falle haben:

$$C_1 = -C_2 - C_3.$$

Führt man diesen Werth in den Ausdruck des Integrales der der zweiten Ordnung angehörigen Differentialgleichung, d. h. in die Formel (369) ein, so erhält man:

$$y = C_1\left[r_1\int_0^\infty e^{r_1ux-\frac{u^2}{2}}\,du - \int_0^\infty e^{ux-\frac{u^2}{2}}\,du\right] + C_2\left[r_2\int_0^\infty e^{r_2ux-\frac{u^2}{2}}\,du - \int_0^\infty e^{ux-\frac{u^2}{2}}\,du\right]. \quad (376)$$

Die drei bestimmten Integrale, aus denen dieser Ausdruck zusammengesetzt ist, sind, dem geführten Beweise zufolge, insofern von einander verschieden, als keines derselben aus den anderen durch Multiplication mit irgendwie gewählten Constanten und Addition hervorgehen kann; somit wird auch die Differenz oder die Summe aus zweien von ihnen, etwa dem ersten und zweiten, sich auf diese Weise nicht ausdrücken lassen durch das zweite und dritte, weil sonst das erste auch durch das zweite und dritte ausdrückbar wäre, was dem geführten Beweise widerstrebte. Wir sehen also, dass die, mit den willkürlichen und von einander ganz unabhängigen Constanten $C_1$ und $C_2$ multiplizirten Functionen in (376) von einander verschieden seien, dass also diese Formel, oder was dasselbe ist die (369), das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung (368) enthalte.

Das hier gewählte einfache Beispiel enthält bereits eine gewisse Anzahl derjenigen Erleichterungen der Rechnung, die man sich gestatten kann; wir beweisen nämlich nicht, dass sämmtliche Coefficienten der aus den particulären Integralen construirten Gleichung von der Nulle verschieden seien, wir thuen bloss dar, dass nur ein Theil und zwar der imaginäre Theil Eines von ihnen nicht der Nulle gleiche und das zwar nicht für beliebige $x$, sondern nur für irgend einen passend gewählten Werth dieser Variablen; in anderen Fällen wird man sich sogar gestatten können, gewisse constante, in der Differentialgleichung erscheinende Parameter, mit speciellen Werthen zu versehen, für solche die Verschiedenheit der particulären Werthe zu beweisen und endlich aus dieser speciellen Verschiedenheit auf die Verschiedenheit im Allgemeinen einen Schluss zu machen, wenn man sich von einem solchen Verfahren, in Bezug auf die Einfachheit der Rechnungen, einen günstigen Erfolg versprechen kann. Endlich wird in vielen Fällen der ganze Beweis überflüssig, was jedesmal geschieht, wenn entweder die Einfachheit der vorliegenden Formen die Verschiedenheit der particulären Integrale über allen Zweifel erhebt, oder, wenn in dem Gange der Rechnungen, welche mit dem gewonnenen allgemeinen Integrale vorgenommen werden, der Allgemeinheitsbeweis schon enthalten ist. Diess ist aber bei den physikalisch-mechanischen Problemen, die zu partiellen Differentialgleichungen führen, jedesmal der Fall, weil man hier, mittelst der Integrationsconstanten und eines willkürlich in die Rechnung eingeführten Parameters, eben so viele Bedingungen an den Grenzen des Systemes zu erfüllen hat, als der zu diesem Zwecke verwendbaren Grössen vorhanden sind. Hat man nun nicht das allgemeine Integral gewonnen, so besitzt man auch nicht die nöthige Anzahl dieser Constanten und ist folglich nicht im Stande den obenangedeuteten Bedingungen Genüge zu leisten. Der sechste Abschnitt, dem die Integration der partiellen Differentialgleichungen zugewiesen ist, enthält daher an und für sich einen hierher gehörigen Allgemeinheitsbeweis, der jedoch im Grunde von dem eben hier vorgetragenen nicht verschieden ist.

Und nun finden wir für gut, diesen zweiten Abschnitt, welcher seiner Überschrift nach von den Differentialgleichungen mit particulären Integralen von einerlei geschlossener Form handelt, zu beendigen. Wir sehen hiermit den Gegenstand nicht als erschöpft an: es ist vielmehr an und für sich klar,

dass es der Differentialgleichungen, die diesen Character tragen, noch sehr viele geben kann, schon aus dem Grunde, weil sich offenbar noch sehr mannigfaltige Formen werden denken lassen, die eine Zurückführung auf die hier betrachteten, schon durch den einfachen Kunstgriff des Einführens einer neuen dependenten Veränderlichen gestatten und im Allgemeinen wird diese Eigenschaft allen Differentialgleichungen zukommen, die eine gewisse Stetigkeit im Coefficientenbaue darbiethen, von welcher im nächsten Abschnitte die Rede sein wird. Wir haben aber, in Bezug auf die Formen, in welchen die particulären Integrale der Differentialgleichungen erscheinen können, genügende analytische Erfahrungen gewonnen, um die sofort in Angriff zu nehmende Formenlehre darauf zu basiren.

# INTEGRATION

DER

# LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

**Zweite Lieferung.**

# Vorerinnerung zur Formenlehre.

Ich übergebe hier der mathematischen Lesewelt die zweite Lieferung meines Werkes über die Integration der linearen Differentialgleichungen, die die Formenlehre dieser analytischen Gebilde enthält, — einen Abschnitt, der einerseits an Wichtigkeit alle anderen Theile dieses Wissenszweiges überragt, und schon aus diesem Grunde einer erhöhten Aufmerksamkeit würdig ist, andererseits aber so viel Ungewohntes und Befremdendes in sich enthalten dürfte, dass es nicht unerspriesslich erscheint, zur Erleichterung des Studiums und vorläufigen Orientirung des Lesers, einige Bemerkungen vorangehen zu lassen. Dieselben haben, wenn einmal beherzigt, auch ihren Zweck erreicht, daher denn diese Vorerinnerung nicht als ein Theil des Werkes, sondern eben nur als Vorerinnerung zum dritten Abschnitte desselben anzusehen ist, die ihrem Inhalte nach mit dem Vortrage, den ich in der kais. Akademie der Wissenschaften über diesen neuen Wissenszweig gehalten habe, übereinstimmt, die sohin in dem grösseren Kreise des mathematischen Publikums dasselbe leisten soll, was jener Vortrag in dem engeren Schoosse der Akademie, nämlich bloss über Inhalt und Darstellung Rechenschaft legen, die aber um so nothwendiger wird, als sich eine in der Vorrede des Werkes vorfindige Äusserung, in Bezug auf die erste Lieferung zum Theil schon bestätigt hat, nämlich: dass, der Erfahrung aller Zeiten zufolge, umfangreichere und einen einzigen Gegenstand im Zusammenhange verfolgende mathematische Werke sich äusserst langsam, und oft erst nach mehreren Decennien Eingang verschaffen, inzwischen aber mit mancherlei schiefen Urtheilen zu kämpfen haben. — Ich hege in keiner Weise die Absicht, mich über Vernachlässigung meiner Bestrebungen zu beklagen (in einem gewissen Kreise haben sie nicht nur Anerkennung gefunden, sondern auch bereits tiefe Wurzeln geschlagen); ich sehe vielmehr sehr gut ein, dass, wenn Jemand nahe durch zwei Decennien einen fruchtbaren Gegenstand verfolgt hat und zu Aufschlüssen gekommen ist, von denen man nicht bloss sagen kann, dass sie das Gebiet des Wissens erweitern, sondern vielmehr, dass sie sich zu einer neuen Wissenschaft abrunden mit mehr oder weniger fremden und ungewohnten Anschauungsweisen, — er weder von den Jüngern noch von den Meistern der Wissenschaft zu verlangen das Recht habe, dass sie seine Bemühungen unverzüglich zu würdigen im Stande seien; denn was lange Jahre tiefen Nachdenkens gebracht haben, kann auch dem grössten Geiste, in der Regel wenigstens, in acht Tagen nicht vollkommen verständlich sein. Zudem kömmt ja gerade den

grossen Meistern der Wissenschaft das unbestrittene Recht zu gar nichts zu lesen, weil sie sich weit nützlicher mit der Entwicklung der eigenen Ideen beschäftigen — ein Recht, das ich um so lieber anerkenne, als ich es selbst, wiewohl aus einer andern Ursache, in Anspruch zu nehmen genöthigt bin, nämlich des dermassen angehäuften eigenen Materiales wegen, dass ich, der geringen mir zu Gebote stehenden Hilfsmittel wegen, selbst an der Möglichkeit der Veröffentlichung zweifle. Und wenn die Jünger der Wissenschaft den Verfasser einer solchen Arbeit zumeist missverstehen, und wenn selbst Männer, die keine Jünger mehr sind, sein Werk eher begutachten und dann erst nicht lesen, während sie besser gethan hätten, das Verfahren umzukehren, nämlich zuerst nicht zu lesen, und dann aber auch nicht zu begutachten, so ist diess häufig die natürliche Folge jedermänniglich bekannter natürlicher Ursachen, und oft sogar die Schuld des Verfassers selbst, der es vielleicht versäumt hat, eine der folgenden zwei Obliegenheiten, oder sogar beide zu erfüllen; nämlich **Erstens**: mit Ruhe, Nachsicht und Geduld den falschen Begriffen, die man von seiner Arbeit hat, belehrend entgegen zu treten, und **Zweitens**: die grossen Meister der Wissenschaft, die Erspriesslicheres zu thun haben, als sich auf das Studium fremder Werke einzulassen, soweit diess möglich ist (und es ist immer möglich, wenn man sich nur Mühe gibt) auf seinen Standpunkt zu stellen, von dem aus das Ganze mit leichter Mühe zu übersehen ist. Und der Erfüllung dieser doppelten Verbindlichkeit ist die gegenwärtige Vorerinnerung im Wesentlichen gewidmet.

Um dem ersten Punkte zu genügen, sei es mir erlaubt der Einwendungen, die man gegen die einzelnen Theile der ersten Lieferung des vorliegenden Werkes gemacht hat, kurz Erwähnung zu thun und die berichtigenden Bemerkungen beizufügen. Diejenigen unter ihnen, die mir kund geworden und die einer solchen belehrenden Berichtigung fähig sind, denn andere lasse ich ausser Acht, sind folgende:

*A)* **Der Beweis der Existenz des allgemeinen Integrales einer linearen Differentialgleichung der** $n^{\text{ten}}$ Ordnung, der in §. 3 enthalten ist, sei überflüssig, denn er beweist nur, dass sich das Integral mittelst der **Mac-Laurin**'schen Formel in eine convergirende Reihe entwickeln lasse. Nun lässt sich aber eine jede stetige Function vermittelst dieser Formel in Form einer solchen Reihe wiedergeben. Der Beweis dient also nur dazu, Etwas, was man ohnehin schon gewusst hat, mit bedeutendem Aufwande schwerfälliger Gelehrsamkeit zu erhärten und ist noch überflüssiger, als der Beweis der Möglichkeit der Ebene in der Geometrie, als einer Fläche, in der jede gerade Linie ganz liegt, die zwei Punkte mit ihr gemeinschaftlich hat, und der offenbar nur für Leute ist, die so grimmig gelehrt sind, dass sie die Möglichkeit eines Tischlerhobels bezweifeln können.

Ich halte nicht für gut an diesem Orte einzugehen in eine weitläufigere Erörterung über den Grad der logischen Vorsicht im Definiren, Eintheilen und Beweisen, der in einem wissenschaftlichen Werke beobachtet werden soll, und begnüge mich damit, jenem Einwande die Bemerkung entgegenzuhalten, dass, wenn mein Beweis der Existenz des allgemeinen Integrals überflüssig ist, aus eben demselben Grunde auch der Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen unnöthig wird, des Satzes nämlich, dass jede höhere Gleichung mindestens Eine Wurzel habe, die in der Form $p+q\sqrt{-1}$ enthalten ist; denn es ist ja die Form $p+q\sqrt{-1}$ die allerallgemeinste, auf die

sich jede Zahl bringen lässt, folglich auch die Wurzel einer Gleichung. — Es wird dem Leser nicht schwer fallen, den gemeinsamen logischen Missgriff, der in dieser gemeinsamen Einwendung gegen die Beweise der Fundamentalsätze zweier Wissenschaften liegt, zu entziffern. Ich halte jenen Beweis um so weniger für überflüssig, als ich bereits Gelegenheit gefunden habe, in der Undulationslehre davon Gebrauch zu machen, und namentlich den Beweis des Prinzipes der Erhaltung der Schwingungsdauer darauf zu stützen, bin aber geneigt zu glauben, dass er etwas ausführlicher hätte vorgetragen werden sollen, als diess im §. 3 des ersten Abschnittes wirklich geschehen ist, und finde mich desshalb veranlasst hier nachträglich einige Bemerkungen beizufügen, aus denen hervorgehen soll, auf welchen besondern analytischen Umständen seine Nothwendigkeit und bindende Kraft beruhe:

Jeder Differentialquotient einer convergirenden Reihe ist auch selbst im Allgemeinen eine convergirende Reihe — eine Ausnahme hievon findet nur für specielle Werthe der Veränderlichen statt, und in Fällen, wo die Reihe selbst an den Gränzen der Convergenz steht; folglich ist auch das Polynom einer Differentialgleichung, die mit ganzen und algebraischen Coefficienten versehen ist, eine convergirende Reihe, wenn die abhängige Veränderliche $y$ eine solche ist. Eine jede convergirende Reihe repräsentirt, wenigstens innerhalb der Gränzen, zwischen welchen sie convergirt, für jedes bestimmte $x$ einen bestimmten Zahlenwerth, und somit für veränderliche $x$ eine bestimmte Function. Wenn es daher gelungen ist, zu beweisen, dass eine convergirende Reihe irgend eine analytische Rolle irgendwo spiele, z. B. einer Gleichung Genüge leiste, so ist auch die Existenz einer diese Rolle spielenden Function erwiesen. Dieser Satz lässt sich auf dem von mir betretenen Felde, wie ich meine, auch umkehren. Hätte nämlich die Entwicklung mittelst der Mac-Laurin'schen Formel, nach Potenzen von $x-\alpha$, in gewissen Fällen nur lauter für jeden Werth von $x$ und $\alpha$ divergirende Reihen geliefert, wie etwa die folgende: $1+(x-\alpha)+1.2\,(x-\alpha)^2+1.2.3\,(x-\alpha)^3+\ldots\ldots$, so hätte ich daraus geschlossen, dass in diesen Fällen das Integral nicht existire, weil, wenn es existirte, es, wie jede stetige Function, wenigstens zwischen gewissen Gränzen, durch eine convergirende Reihe ausdrückbar sein müsste.

Was kann das nun aber heissen, wenn man sagt, diese oder jene unendliche und convergirende Reihe leiste, anstatt $y$ gesetzt, der Differentialgleichung Genüge? — doch offenbar nur, dass das ebenfalls convergirende Gleichungspolynom, durch Aufhebung von immer mehr und mehr Anfangsgliedern, näher stets und näher der Nulle gleich werde, bei je einem späteren Gliede die Reihe für $y$ abgebrochen wird, und diess ist es, was der §. 3 des I. Abschnittes zu beweisen hat, und nach meinem Bedünken auch wirklich beweist. Und namentlich sind es die folgenden zwei analytischen Umstände, deren Vorhandensein die Beweisführung ermöglicht, nämlich erstens: dass die successiven Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen $y$, die als Factoren in den Gliedern der Mac-Laurin'schen Reihe vorkommen, höchstens im Verhältnisse einer endlichen Zahl zum ins Unendliche wachsenden Stellenzeiger des Reihengliedes zunehmen können — wäre in speciellen Fällen ein rascheres Wachsthum vorhanden, etwa im Verhältnisse einer endlichen Zahl zum Quadrate des Stellenzeigers, so würde ich in solchen speciellen Fällen, aus der Divergenz der Reihe für jedes $x-\alpha$, auf die Nichtexistenz des Integrals geschlossen haben — zweitens: die besondere Beschaffenheit der Coefficienten der Mac-Laurin'schen

Reihe, in Folge deren die mit denselben Coefficienten versehene Reihe für die Exponentielle $e^x$ für jeden Werth von $x$ convergirt. Besässe daher die Mac-Laurin'sche Formel, anstatt der ihr eigenthümlichen, etwa Binomial-Coefficienten, so wäre der Existenzbeweis wieder nicht allgemein durchzuführen und hätte nur Geltung, wo die Werthe der sämmtlichen obgenannten Differentialquotienten eine gewisse Gränze nicht überschreiten. Wenn nun die Existenz eines analytischen Gebildes, ich meine des allgemeinen Integrals, das man eben, weil man's zu suchen genöthigt ist, voraussetzen muss, solchen speciellen Vorkommnissen, oder, besser gesagt, analytischen Grundbeziehungen verdankt wird, so ist doch offenbar die Darlegung dieser Vorkommnisse oder Grundbeziehungen keineswegs eine unnütze, sondern vielmehr eine nothwendige Sache zu nennen. Nun enthält aber der in Rede stehende Existenzbeweis nichts anderes als eben diese Darlegung, und sohin hat man das Recht ihn für nothwendig zu halten.

*B)* Im übrigen enthalte die erste Lieferung nichts Neues, nachdem namentlich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} \pm a^s x . y = 0$$

bereits vor mir von Lobatto integrirt worden ist, und zwar in derselben Form, durch bestimmte Integrale, wovon man sich im Lehrbuche von Moigno überzeugen könne; ein Gleiches sei mit der wohlbekannten Riccati'schen Gleichung der Fall.

Ob meine Arbeit etwas Neues enthalte, und in welchen Punkten, darüber mag die Zukunft entscheiden; ich meinestheils fürchte eher, ausser meinen Schülern, zu wenige Leser zu finden, weil ich zu viel Neues bringe. Ich habe die hier angeführte Differentialgleichung als ein Eigenthum von Kummer angesehen und nicht von Lobatto, und sie auch jenem Gelehrten, im §. 3 des II. Abschnittes, zugeschrieben, weil ich mich erinnere, vor vielen Jahren einmal denjenigen Band von Crelle's Journal zu Gesichte bekommen zu haben, der Kummer's Aufsatz enthält, und der mich darum interessirte, weil ich selbst schon auf meinem Wege zum Integrale derselben Gleichung gelangt war. Ich gestehe aber gerne ein, dass mir die nothwendigen bibliographischen Kenntnisse nicht zu Gebote stehen, um zu entscheiden, ob die Priorität Kummer oder Lobatto gebühre, oder ob nicht vielleicht gar noch ein älterer Competent darauf Ansprüche machen könne; ich meinestheils mache keinen darauf, und habe im II. Abschnitte meines Werkes eine Auswahl der vornehmsten bisher zur Integration gebrachten und von Kummer, Riccati, Liouville u. s. w. behandelten Gleichungen nur desshalb getroffen und nach meiner Methode behandelt, um zu zeigen, dass diese von Allen wohl die bequemste sei, und dass sie in vielen Fällen ein unmittelbares Niederschreiben des allgemeinen Integrals beinahe ohne Rechnung gestatte. Ich wünsche aber nicht desshalb Jemanden, auch nur im Entferntesten, in seinem Eigenthumsrechte zu beeinträchtigen, und hege darum auch gar kein Verlangen, etwa derjenigen Gleichung, in der die Kummer'sche als specieller Fall enthalten ist und deren Integral unter (92) S. 57 beigebracht wird, oder der (250) S. 105, von der wieder die Riccati'sche ein sehr specieller Fall ist, und die ich integriren lehre, oder irgend Einer Differentialgleichung, meinen Namen beizufügen; denn, weil ich alle linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten und

einige andere integriren lehre, so müsste offenbar eine solche Bezeichnung mit meinem Namen hier ihren Zweck verfehlen. Nicht einmal Einer Integrationsmethode kann ich meinen Namen vorsetzen, aus derselben Ursache, nämlich: weil ich nicht Eine bringe, sondern mehrere, wenn ich nicht etwa sagen will: Petzval'sche Methode Nr. 1, Nr. 2, Nr. 3 u. s. w., was offenbar nicht gut angeht. Mit einem Worte, ich wünsche überhaupt nicht, Jemanden Unrecht zu thun, weder dadurch, dass ich sein Eigenthum mir, noch dadurch, dass ich es einem Andern zuschreibe, erkläre daher gern und Ein für alle Mal, dass ich, wegen meiner mangelhaften bibliographischen Kenntnisse, die ich zu ergänzen gar keine Lust habe, in dieser Beziehung das Privilegium grosser Geister gar nichts zu lesen, wie schon oben gesagt, für mich in Anspruch nehmend, nichts weniger zu sein glaube als eine Infallibilität, und finde mich daher veranlasst, um jedem Streite über Mein, Dein und Sein schon von ferne auszuweichen, im Vorhinein schon zuzugeben, dass es eine Menge Gelehrte gegeben haben mag, und noch gebe, welche alles dasjenige, was ich gefunden habe, beinahe auch hätten finden können, wenn sie darüber nachgedacht hätten. — Jüngeren Talenten jedoch rathe ich zu solchen Untersuchungen über imaginäre Prioritäten nicht; diese mögen sich lieber die bessere Aufgabe stellen, in den Geist einzudringen desjenigen Zweiges der Wissenschaftsforschung, den ich lange mit besonderer Vorliebe gepflegt habe. Es haben schon Andere vor mir bestimmte Integrale in eine Differentialgleichung substituirt, das Verfahren des theilweisen Integrirens angewendet, Gleichungen aufgelöst, vielleicht auch unendliche Wurzeln berücksichtigt; darin besteht es aber nicht, denn diess sind nur geringfügige Parzellen, einer langen Reihe von Bemühungen entnommen, und die im §. 2 des II. Abschnittes vorgetragene Integrationsweise von Gleichungen mit Coefficienten wie $a+bx$, ist zwar das erste und insoferne nothwendigste, aber lange nicht das würdigste Glied des Ganzen. Höhere Wichtigkeit schreibe ich dem Inhalte des vierten Paragraphes zu, welcher von der Vervollständigung der erhaltenen unvollständigen Integrale handelt und dem wir die ersten Keime der Formenlehre entnehmen, die ihrerseits die ganze wissenschaftliche Gestalt dieses Werkes bedingt.

C) Der Werth der Integrationsmethoden ist an ihre praktische Brauchbarkeit geknüpft. Was hab' ich davon, wenn ich sechs Stunden rechnen muss, um Ein particuläres Integral in drei Decimalstellen zu erhalten.

Das particuläre Integral ist kein Zahlenwerth, sondern eine Function einer Veränderlichen $x$, bei der der numerische Werth nie in Anschlag kömmt, weil er sich in der Integrationsconstante verliert, und bei der sich's weit mehr um die Form handelt, als um den Betrag in Zahlen. Ist die Differentialgleichung die Auflösung eines mechanischen oder physikalischen Problems, so begreift die Form eines jeden particulären Integrals ein Naturgesetz in sich und Jeder weiss, dass wir oft zur Ermittlung eines solchen nicht nur gerne sechs Stunden, ja ein Jahr lang rechnen, sondern uns sogar zu langwierigen, kostspieligen und selbst gefährlichen Experimenten entschliessen. Wenn daher der Vorwurf des langwierigen nothwendigen Rechnens auch ein gegründeter wäre, so wäre er von keinem Belange; ich hoffe aber, man wird finden, dass meinen Integrationsmethoden, wenigstens in solchen Fällen wie sie die wirkliche Wissenschaftsforschung bietet, wo

entialgleichungen mit einer beschränkten Anz

das Lob der Einfachheit gebühre — und diess wären

einseitigen, über meine Arbeit in Umlauf gesetzten Urtheilen entgegen

Hat nun die erste Lieferung des Werkes zu solchen, durchaus sehr unerwarteten

ung gegeben, so ist doppelt zu fürchten, dass die zweite, die Formenlehre nämlich, mit
sondern Ansichten, fremdartigen Begriffen und Eintheilungen, missverstanden und in Folge dessen
beurtheilt werde. Nachdem mir nun aber diess nichts weniger als gleichgiltig ist, so will ich, dem
gen zu kommen, nunmehr versuchen, der zweiten der früher erwähnten Obliegenheiten zu genügen
dem Leser zum Studium dieses etwas umfangreichen Abschnittes die nöthige
ientirung zu verschaffen. Da man aber vor allem Andern wissen muss, was man will, oder
elmehr was man vernünftigerweise wollen kann, so sei es mir erlaubt, den Zweck, den die
Formenlehre erreichen soll, mit wenigen Worten zu bezeichnen; denn es ist sehr wichtig, dass
Verfasser und Leser vom Beginne an Hand in Hand schreiten, indem sie nur so einerlei Standpunkt ein-
nehmen können.

Bekanntlich lässt sich aus einer mathematischen Rechnung nichts ziehen, was man nicht
selbst hineingelegt hat und unser Rechnen ist im Grunde nichts weiter, als ein Variiren
desselben Satzes oder derselben Sätze, bis sie die Form erlangt haben, die dem
menschlichen Vorstellungsvermögen am besten zusagt. Wenn wir daher eine gewisse
Grösse oder Functionsform suchen, von der wir nur solche Eigenschaften analytisch auszudrücken im
Stande sind, die mehreren solchen Grössen oder Functionen gemeinschaftlich sind, so führt die Rechnung
nothwendigerweise zu Allen. Wenn ich z. B. von einer Zahl nichts Anderes anzugeben weiss, als dass
sie die Wurzel einer höheren Gleichung sei, so werde ich durch die Rechnung nothwendigerweise zu
allen Wurzeln dieser Gleichung, d. h. zur Gleichung selbst zurückgeführt, und komme gleichsam im
Kreise wieder auf den Punkt zurück, von dem die Untersuchung ausging. Diesem Übelstande lässt sich
nur dadurch entgehen, dass man das gesuchte Zahlenindividuum näher bezeichnet. Man sagt z. B. ic
will die Wurzel haben, welche zwischen zwei Zahlen $a$ und $b$ fällt, oder: ich wünsche von allen reell
oder imaginären Wurzeln diejenige, welche den grössten oder kleinsten Modulus hat. Ist nun eine
solchen Eigenschaften begabte Wurzel wirklich vorhanden, und gelingt es diese Eigenschaft analy
ausgedrückt wirklich in Rechnung zu setzen, so gelangt man auch zur gesuchten Wurzel.

Auf ähnliche Weise verhält es sich mit den Differentialgleichungen. So lange ich
Anderes zu sagen weiss, als dass ich die Gleichung integriren will, d. h. den allgemeinen ihr
leistenden Werth auffinden, bietet sie immer alle solche Werthe auf einmal, d. h. ich komm
Gleichung nicht weg, und tappe immer im tiefen Dunkel. Wie es mir aber gelingt ei
Eigenschaft, welche nur Einem oder einigen der particulären Integrale in dieser Gleichun
chen und analytisch auszudrücken, so führt mich die Rechnung in der Regel au
iculären Integrales, oder der Gruppe von einigen solchen. Frägt ma
en Integrale seien, die man der Auffindung eines ein

zu Grunde legen kann, so ergibt sich sehr bald, dass es nicht Eigenschaften des numerischen Werthes sein können, man also namentlich nicht sagen könne: ich will das particuläre Integral, welches zwischen die Zahlen $a$ und $b$ fällt, oder welches den grössten oder kleinsten Modulus hat, eben weil die Integrale nicht Zahlenwerthe sind, sondern Functionsformen; man ist daher genöthigt, Eigenschaften der Form in's Auge zu fassen. Deren gibt es aber bekanntlich eine Unzahl und es handelt sich wesentlich darum, diejenigen von ihnen heraus zu heben, welche zur Bestimmung des Einen gesuchten particulären Integrales gerade zureichen, nicht mehr und auch nicht weniger, denn weniger würde nicht genügen, und mehr würde der Formenlehre nicht angehören, sondern vielmehr einen Theil der wirklichen Berechnung in sich enthalten. Diess ist aber noch nicht hinreichend. Die Eigenschaften, von welchen die Rede ist, müssen sich aus der Differentialgleichung entnehmen lassen, und zwar wo möglich mit Leichtigkeit, aus dem einfachen Grunde, weil ja eben sonst nichts vorliegt, als die Differentialgleichung. Diese ist aber aus Differentialquotienten und Coefficienten gebaut, und drückt daher offenbar ein Verhalten der successiven Differentialquotienten der Genüge leistenden Functionen aus. Es können daher jene Eigenschaften nichts Anderes zum Gegenstande haben, als eben das Verhalten der Differentialquotienten der Functionen zu einander und es wird voraussichtlich ein ähnliches Verhalten auch ähnliche den Gleichungscoefficienten aufgeprägte Merkmale zur Folge haben. Hieraus spriesst die Nothwendigkeit einer ganz neuen Eintheilung der Functionen, verschieden von der in algebraische und transcendente; denn, wenn man bedenkt, dass von den zwei Functionen $\log x$ und $\frac{1}{x}$ die eine transcendent heisst und die andere algebraisch, während sie doch beide einerlei Verhalten der Differentialquotienten offenbaren, welches darin besteht, dass jeder folgende derselben um die Einheit in der Gradzahl niedriger ist als der nächst vorangehende, so sieht man, dass sie, als particuläre Integrale gedacht, den Gleichungscoefficienten nur ähnliche oder gar dieselben Merkmale aufdrücken können. Ähnliches lässt sich von den Functionen sagen $\operatorname{arc\,tang} x$ und $\frac{1}{1+x^2}$, ingleichen von den Functionen $\operatorname{arc\,sin} x$ und $\sqrt{1-x^2}$ u. s. w. Wir sind daher zu einer neuen Eintheilung der Functionen in Klassen genöthigt, und wenn auch der Leser dieselbe auf den ersten Anblick für überflüssig, ja für unlogisch zu halten sich veranlasst finden sollte, weil gelegentlich Ein Eintheilungsglied als specieller Fall in dem andern enthalten ist, so möge er bedenken, dass sich dasselbe auch von andern mathematischen Eintheilungen der Functionen, z. B. in algebraische und transcendente, rationale und irrationale u. s. w. sagen lässt, und möge vorderhand die Versicherung hinnehmen, dass die von mir aufgestellte Eintheilung der Functionen in Klassen sehr viel dazu beigetragen habe, den Weg der Forschung zu erhellen.

Ich rechne nämlich zur ersten Klasse diejenigen Functionen der Veränderlichen $x$, welche die Eigenschaft haben, beim fortwährenden Wachsen von $x$ sich einer Potenz $x^p$ fortwährend zu nähern, unter $p$ eine endliche, übrigens aber nach Belieben positive oder negative, ganze oder gebrochene, reelle oder imaginäre Zahl verstanden, und folglich Differentialquotienten zu bieten, die je um die Einheit niedriger sind in der Ordnungszahl.

Zur zweiten Klasse rechne ich diejenigen Functionen, die, in Bezug auf das Verhalten ihrer Differentialquotienten, die Eigenschaften der Exponentialgrösse $e^{\int \varphi dx}$ theilen, wo $\varphi$ eine der ersten Klasse angehörige Function ist. Weiter in der Eintheilung der Functionen zu gehen, war zur Erreichung des vorgesteckten Zieles nicht nöthig, da höheren Klassen angehörige Gebilde als Integrale von Gleichungen mit algebraischen Coefficienten nicht vorkommen können; sollte es jedoch jemals dahin kommen, dass eine allgemeine, auf Differentialgleichungen mit nicht bloss algebraischen, sondern beliebigen Coefficienten ausgedehnte Formenlehre Bedürfniss würde; so wird man sich genöthigt sehen, diese Eintheilung der Functionen in Klassen fortzusetzen, wenigstens nach oben, wenn auch nicht nach unten. Von der Erspriesslichkeit der Eintheilung sich zu überzeugen kostet wenig Mühe. Es genügt hiezu schon der folgende einfache und elegante Satz einer allgemeinen Formenlehre, der im §. 15, S. 286 berührt wird und so lautet: »Eine Differentialgleichung, deren Coefficienten sich »höchstens zur $m^{ten}$ Klasse erheben, kann höchstens der $(m+1)^{ten}$ Klasse angehörige particuläre Inte- »grale besitzen.«

Noch wichtiger wird die neue Eintheilung der Functionen in Klassen dadurch, dass sie die grosse Schwierigkeit, die sich dem Wissenschaftsforscher gleich beim Eingange in die Formenlehre unübersteiglich aufzuthürmen scheint, auf die einfachste Weise weghebt. In der That: was verlangen wir von diesem Theile der Theorie der Differentialgleichungen? — offenbar nur die Darlegung des Zusammenhanges, der zwischen der Form des particulären Integrales und jener der Differentialgleichungs-Coefficienten besteht. Nun lässt sich aber ein solcher zwischen zwei verschiedenen Dingen vorhandener Zusammenhang in der Regel nur erörtern, wenn man die Dinge selbst kennt; also wenn man entweder, von der vorausgesetzten Differentialgleichung ausgehend, das allgemeine Integral derselben vollständig ermittelt, oder wenn man, von den particulären Integralen ausgehend, die ihnen entsprechende Differentialgleichung gebaut hat. Ersteres ist hier nicht statthaft, weil es die wirkliche Integration voraussetzt, die wir nicht bewerkstelligen können, ohne einer bereits aufgestellten Formenlehre und könnten wir's, so wäre ja die Formenlehre überflüssig. Wir sind daher genöthigt den zweiterwähnten Weg zu gehen, d. h. nach bekannt vorausgesetzten particulären Integralen, die Verwandtschaft zwischen ihren Eigenschaften und jenen der Differentialgleichung, welcher sie Genüge leisten, zu untersuchen. Da nun aber ein collectives, die complizirten Wirkungen mehrerer auf einmal wirkender Ursachen ins Auge fassendes Verfahren, dem überall nothwendigen, und in der Wissenschaftsforschung besonders wichtigen Erfordernisse der Einfachheit kaum zusagen dürfte, so wird man ganz natürlich auf die Einführung eines einzigen, neuen, particulären Integrales in eine Differentialgleichung von beliebig hoher Ordnung, mit noch unbestimmt gelassenen Coefficienten hingewiesen. Es ist nun wohl an und für sich klar, dass, weil das particuläre Integral aus der Gleichung irgendwie wieder zu haben sein muss, auch alle Eigenschaften des ersteren durch gewisse Merkmale der letzteren sich nothwendigerweise verrathen müssen; desswegen aber können doch nicht alle diese Eigenschaften Gegenstand der Formenlehre sein, sondern nur diejenigen, welche die folgenden zwei Bedingungen erfüllen: erstens der Differentialgleichung unverwischbare Merkmale aufzuprägen,

unmittelbar folgt, dass alle diejenigen Kennzeichen, die ein neu eingeführtes particuläres Integral einer sowohl in Bezug auf Ordnungszahl als auch auf Coefficientenbau annoch unbestimmten Differentialgleichung aufdrückt, auch immer unverwischbare Kennzeichen sein werden. Sodann untersuche ich vorsichtig weiter, ob dieses in Rede stehende, unverwischbare Merkmal wirklich Folge sei der **algebraischen Beschaffenheit** der Function $\varphi$ und finde, dass diess der Fall nicht sei, sondern dass dasselbe wesentlich hervorgehe aus denjenigen Eigenschaften, welche die algebraischen Functionen mit allen jenen anderen gemeinschaftlich besitzen, die wir zur **ersten Klasse** zählten; gleichgiltig ob sie ihrem Baue nach bekannt sind oder unbekannt, und die dieselbe Gradzahl $m$ tragen, d. h. bei dem fortwährenden Wachsen von $x$ sich einer Gränze $ax^m$ ohne Ende nähern. Ich überzeuge mich endlich noch, dass die geringste Änderung in den Eigenschaften dieser Function $\varphi$, in Folge deren sie entweder zu einer andern Klasse übertritt oder auch nur die Gradzahl $m$ wechselt, auch zu andern Merkmalen in den Coefficienten Veranlassung gebe und sage jetzt, rückschliessend: »Wenn die Differentialgleichung dieses gewisse »Merkmal ausweist, so existirt ein particuläres Integral in der Gestalt $e^{\int \varphi dx}$, wo $\varphi$ nicht nothwendig »algebraisch, wohl aber jedes Mal der ersten Functionenklasse angehörig und von $m$ Dimensionen ist.« Auf diese Weise gehe ich bei meinen Untersuchungen jedes Mal so zu sagen von einem Individuo aus und kehre, rückschliessend, zu einer ganzen Familie zurück, und, — da ich nichts zu thun habe mit unbestimmten Begriffen, wie algebraisch und transcendent, sondern nur mit solchen, die sich mit Präcision und Leichtigkeit analytisch ausdrücken lassen und die Function jedesmal ohne Zweideutigkeit dermassen bestimmen, dass die Bestimmungsstücke nur ihr und keiner andern zukommen — so sind meine Bedürfnisse befriedigt, in so ferne wenigstens, als man diess von einer Formenlehre zu verlangen berechtigt ist d. h. **ich besitze die analytischen Mittel mich zu erklären, welches der particulären Integrale, $n$ an der Zahl, die der Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung Genüge leisten, ich kennen zu lernen wünsche.**

Nun ist es auch nicht mehr nöthig die speciellen Untersuchungen, ausgehend von einem Individuo und zurückkehrend zu einer Familie, durch alle möglichen Functionsformen fortzusetzen ins Unendliche; es genügt vielmehr hierin nur so weit zu gehen, bis alle Formen derjenigen Differentialgleichungen, die man zum Gegenstande der Untersuchung gewählt hat — hier derer mit **algebraischen rationalen und ganzen Coefficienten**, — erschöpft sind in dem Sinne, dass man einem jeden denkbaren Coefficientenbaue eine Gruppe von Functionen entgegenstellen kann, begabt mit vollständig bestimmten Eigenschaften, so zwar, dass, bei Vereinigung dieser Functionen in eine einzige Gleichung, nothwendig derselbe Coefficientenbau zum Vorscheine kommt. Jene Eigenschaften werden einerseits allgemein sein und einer Unzahl von Functionen zukommen können, ja sogar zukommen müssen; andererseits aber von der Art, dass sie zum Erzielen der angedeuteten Wirkung nothwendig und genügend zugleich erscheinen. Mit andern Worten: allen mit diesen Eigenschaften versehenen Functionengruppen entspricht derselbe Coefficientenbau in bestimmter Beziehung, z. B. in Bezug auf die Gradzahlen, und die geringste Änderung dieser Eigenschaften, an eine oder mehrere der Functionen angebracht, veranlasst auch alsogleich einen anderen Coefficientenbau. Mag also auch die wirkliche Integration, auf

gleichungen vorkommen können, bei welchen eine ähnliche Repartition, von der dem Leser ein geometrisches Bild in Gestalt einer den Coefficientenbau umspannenden Polygonallinie auf S. 169 vorgeführt wird, mitunter auch zu gebrochenen Gradzahlen der verschiedenen, mit $\varphi$ bezeichneten Functionen leiten muss, so erschliesse ich hieraus die Möglichkeit des Vorkommens irrationaler particulärer Integrale (ich nenne sie irrational, wenn sie, in der Form $e^{\int \varphi dx}$ gedacht, ein irrationales $\varphi$ besitzen) in einer rationalen Gleichung und stelle in §. 9 die Bedingungen ihres Vorhandenseins auf. Ihr Vorkommen ist ein gruppenweises, so zwar, dass zwei Genüge leistende Werthe vorhanden sein können mit Irrationalgrössen, die Wurzeln sind einer algebraischen Gleichung des zweiten Grades mit nach $x$ rationalen Coefficienten, ebenso drei Genüge leistende Werthe mit Wurzeln einer ähnlichen Gleichung des dritten Grades u. s. w., allgemein $s$ particuläre Integrale, mit Wurzeln einer algebraischen rationalen Gleichung des $s^{ten}$ Grades und es stellt sich so heraus, dass Gruppen Genüge leistender Werthe von der angedeuteten Form und mit ganzen oder gebrochenen Gradzahlen von $\varphi$ jeden denkbaren Coefficientenbau in Bezug auf die Gradzahlen derselben zur Folge haben können — ein Umstand, der diesen Theil meiner Untersuchungen zu einem geschlossenen Ganzen abrundet.

Der zweite Gesichtspunkt, unter welchem die Form $e^{\int \varphi dx}$ der Discussion unterworfen wird, nimmt Bezug auf diejenigen endlichen Werthe von $x$, die das $\varphi$ unendlich oder unstetig machen. Hier stellt sich heraus, dass jeder Nenner von $\varphi$ wie $(x-\alpha)^m$ als Factor im allerersten Coefficienten der von Brüchen befreiten Differentialgleichung vorhanden sein müsse; dass sich derselbe von dem ersten auf die folgenden Coefficienten sogar fortpflanze, wenn es dergleichen particuläre Integrale mehrere gibt; dass man, in Beziehung auf die Zusammensetzung der Coefficienten aus einfachen Factoren, einer ähnlichen Etiquette wie bei den Gradzahlen der Coefficienten begegne, von der ebenfalls ein geometrisches Bild in Gestalt einer Polygonallinie auf S. 187 geliefert wird, die sich von der früheren wesentlich darin unterscheidet, dass sie gegen die Abscissenaxe konvex ist, während jene konkav war. Auch hier ergeben sich mitunter gebrochene Repartitionszahlen als Werthe des mit $m$ bezeichneten Exponenten, also irrationale Formen von $\varphi$, die, genau auf dieselbe Art wie im frühern Falle, gruppenweise vorkommen und es zeigt sich auch hier wieder, dass Formen wie $y = e^{\int \varphi dx}$ mit rational oder irrational gebrochenem $\varphi$, in eine Differentialgleichung vereinigt, jede beliebige Zusammensetzung der Coefficienten aus einfachen Factoren zur Folge haben können, wodurch sich auch dieser Theil der Untersuchung zu einem geschlossenen Ganzen abgränzt.

Da sich aber Fälle häufig ergeben werden, wo unter den Gradzahlen der verschiedenen $\varphi$'s oder unter den $m$ genannten Exponenten einander gleiche vorkommen, man sogar viele Gleichungen finden wird, wo sie alle gleich sind, so ist ihre Kenntniss der Formenlehre zwar nothwendig, aber nicht in allen Fällen genügend und es wird unerlässlich noch andere Merkmale der Functionen $\varphi$ aufzusuchen, durch die sich die particulären Integrale von einander unterscheiden. Gleichwie man nun bei der Discussion der Curven höherer Ordnungen zweckmässig nach ihrem Verhalten in sehr grossen Entfernungen vom Anfangspuncte der Coordinaten, nach ihren ins Unendliche gehenden Ästen, nach den

nicht füglich Gegenstand der Formenlehre sein können, indem dieselbe ihrer Natur nach die ersten, vorherrschenden Bestandtheile der Integrale ins Auge zu fassen hat, während die geschlossene Form auf das Verschwinden der späteren und spätesten Bestandtheile beruht. Allein das Integriren einer Differentialgleichung ist wie gesagt ein Discutiren der Integrale; diese verändern aber ihre Form oft wesentlich bei der geringsten Veränderung der in der ersteren vorkommenden constanten Parameter und bieten, wie die Bilder eines Kaleidoscops, die mannigfaltigsten Gestalten dar. Unter solchen Umständen ist zu einer vollständig durchzuführenden Discussion eine einzige Form nicht immer zureichend und man ist genöthigt, deren mehrere zu Hilfe zu nehmen. Jede wird dann einem andern Zwecke vorzugsweise zusagen: die eine die geometrische Anschauung begünstigen, die andere der numerischen Berechnung Vorschub leisten, die dritte den Zusammenhang zwischen allen übrigen Formen vermitteln, die vierte nur das Ergänzungsglied liefern u. s. w., und es ist daher unerlässlich, alle diejenigen Formen in den Kreis der Untersuchung zu ziehen, die, nach den Ergebnissen unserer analytischen Erfahrung, Einen der erwähnten Vortheile geboten haben. Diess sind aber, ausser der bereits zur Sprache gebrachten Form $y=e^{\int \varphi dx}$, die Formen des bestimmten Integrals, des Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl und, damit auch etwas gethan sei, um das Integriren in geschlossener Form vorzubereiten, die Form des unbestimmten Integrales. Ich finde hier zunächst, dass man die Integration einer Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung mit Coefficienten vom $m^{ten}$ Grade abhängig machen könne von der Integration einer Differentialgleichung der $m^{ten}$ Ordnung mit Coefficienten vom $n^{ten}$ Grade und nenne die letztere die Hilfsgleichung der ersteren. Diese Hilfsgleichung unterwerfe ich der Untersuchung unter denselben drei Gesichtspunkten wie oben, nämlich: in Bezug auf das, was aus den Gradzahlen der Coefficienten folgt, was die Zusammensetzung derselben aus einfachen Factoren lehrt und was sich aus der Beschaffenheit eines Exponenten wie $k$ ergibt. Ich gewahre zuvörderst, dass die Ansteigungen in ihr die reciproken Werthe der Ansteigungen in der vorgelegten Gleichung seien, nur wie natürlich entgegengesetzt, nämlich dem oben angegebenen Etiquette-Gesetze entsprechend, angeordnet. Ich erschliesse ferner, dass die particulären Integrale der Vorgelegten gruppenweise aus jenen der Hilfsgleichung hervorgehen können, in Gestalt von bestimmten Integralen, zwischen Gränzen 0 und $\infty$, deren in der Regel so viele an der Zahl vorhanden sind, als die Ansteigungen der Hilfsgleichung insgesammt Einheiten betragen und mit gewissen Beziehungsgleichungen zwischen den Integrationsconstanten. Eben so leite ich, in der Regel wenigstens und mit bestimmten Ausnahmen, aus jedem Factor des ersten Coefficienten der Hilfsgleichung Ein Integral der Vorgelegten ab, in Gestalt eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl. Endlich suche ich den Zusammenhang, der zwischen allen den zur Sprache gebrachten Formen und dem unbestimmten Integrale besteht, und die Rolle darzulegen, die letzteres, hauptsächlich beim Integriren in geschlossener Form, spielt — und diess wäre denn, seinen äussersten Umrissen nach, der Inhalt des Abschnittes, den ich gegenwärtig der Lesewelt vorlege.

Damit jedoch der Leser in der Vielheit der Betrachtungen, aus denen gleichwohl am Ende nur eine einfache practische Regel des Verfahrens als Resultat hervorgehen muss, wenn die Formenlehre ihren Zweck erreichen soll, nicht ermüde, damit er, Hand in Hand mit dem Verfasser, im steten

von welchen mithin die Wurzeln Functionen sind. Für solche Gleichungen nun hatte die bisherige algebraische Analysis, so weit mir noch bis vor Kurzem bekannt war, weder Formenlehre noch Auflösungsmethoden. Es war daher unumgänglich nothwendig solche zu bilden. Ich habe diess auch insoferne gethan, als es zu dem von mir verfolgten Zwecke unerlässlich war, und auch meinen Fund vor zwei Jahren zum Gegenstande meiner Vorträge an der hiesigen Universität gemacht, in einer Weise, deren Grundzüge in §. 14, S. 272 u s. f. angedeutet sind. Erst zu Anfange dieses Jahres ist mir aus dem nachgelassenen Werke Fourier's: *Analyse des équations déterminées*, und zwar aus dem am Eingange desselben stehenden *Exposé synoptique* die Überzeugung geworden, dass dieser grosse Mathematiker sich mit demselben Gegenstande nicht nur angelegentlich beschäftigt habe, und zu denselben Resultaten gelangt war, wenn er ihnen gleich einen anderen Ausdruck gibt, und muthmasslich zu ihrer Auffindung einen ganz anderen uns nicht bekannt gewordenen Weg gegangen ist, sondern dass noch überdiess mit seinem Tode noch andere werthvolle wissenschaftliche Schätze, namentlich eine Theorie der Ungleichungen — *analyse des inégalités* — verloren gegangen seien, und es scheint, dass die Andeutungen Fourier's, bei seiner bekanntlich ganz eigenthümlichen Geistesrichtung, seinen Nachkommen unverständlich waren, daher auch zur Wiederauffindung der verlorenen Spuren niemand leiteten und auch uns nicht geleitet hätten, wenn wir nicht zufällig, bereits in dem ähnlichen Gedankengange befangen, und mit der Kenntniss eines Theiles ausgerüstet gewesen wären. Ich habe nun die doppelte Freude meinen Lesern eröffnen zu können, dass fürs Erste die in dem *Exposé synoptique* angemeldeten durch Fourier's Tod verloren gegangenen Resultate vollständig und muthmasslich in einem höheren Grade der Entwicklung wiederaufgefunden seien, und Zweitens dass die Wiederauffindung gerade einem meiner talentvollsten Schüler: Herrn Dr. Ignaz Heger gelungen sei. Mir ist hierdurch, vielleicht ausnahmsweise, die Befriedigung, die höchste für einen Lehrer, zu Theil geworden. zu sehen, wie das von mir auf einem mit Schwierigkeiten übersäten Felde Aufgefundene, zeitiger und bereitwilliger als gewöhnlich, von der jüngeren Generation mit regem Eifer erfasst, und zum ferneren Gedeihen der Wissenschaft wirksam ausgebeutet wird.

**Wien**, im Juli 1853.

**Der Verfasser.**

# III. Abschnitt.

# Formenlehre.

## §. 1.

### Grundbegriffe der Formenlehre, Eintheilung der Functionen.

Die im zweiten Abschnitte dieses Werkes vorgetragene und auch in allen Fällen, die sich darbieten können, vollkommen ausreichende Methode, lineare Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung und mit Coefficienten von der Form $a+bx$, nebst einigen anderen die sich darauf zurückführen lassen, zu integriren, muss wohl ganz natürlicherweise die Hoffnung und mit ihr den Wunsch rege machen, dasselbe für andere Differentialgleichungen von linearer Form zu leisten, deren Coefficienten algebraische, rationale und ganze Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind. Nachdem uns aber die in eben diesem zweiten Abschnitte gewonnene analytische Erfahrung gelehrt hat, dass die particulären Integrale, aus welchen sich das allgemeine zusammensetzt, unter gar mannigfaltigen und sehr wesentlich von einander verschiedenen Formen vorkommen können: unter der einer algebraischen, exponentiellen Function, eines bestimmten oder unbestimmten Integrales, eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, Formen die sich gegenseitig ausschliessen in dem Sinne, dass, wenn die eine unbrauchbar wird dadurch, dass sie Analogie gewinnt mit einer divergirenden Reihe, zumeist allsogleich die andere, als einem solchen Übelstande nicht unterworfen, sohin brauchbar auftritt: so lässt sich denn erwarten, dass Gleichungen mit complizirter geformten Coefficienten noch viel mannigfaltiger geformte particuläre Integrale besitzen werden, wahrscheinlich sogar in Gestalt von Functionen, die von den eben erwähnten wesentlich verschieden sind und von denen wir vorderhand noch gar keine Anschauung besitzen. Bemerken wir zudem noch, dass es nothwendig war, um zur Integration der im zweiten Abschnitte behandelten einfachen Gleichungsform zu gelangen, eine glückliche Voraussetzung zu machen hinsichtlich der Form der Genüge leistenden particulären Integrale, so drängt sich uns die Vermuthung auf, dass auch bei anderen Differentialgleichungen nur eine vorläufige Kenntniss der Form zum Ziele führen könne und hierdurch tritt uns auf einmal die Nothwendigkeit und zugleich die Schwierigkeit einer Formenlehre vor Augen, d. h. eines Inbegriffs von Lehrsätzen, welche den Zusammenhang zwischen der Form der Gleichung und jener der Genüge leistenden particulären

18

Integrale erörtern und die wenigstens auf den ersten Anblick etwas Unmögliches scheint, aus der einfachen Ursache, weil diess ein Zusammenhang ist, zwischen etwas vollkommen Bekanntem und etwas ganz und gar Unbekanntem, so zwar, dass möglicherweise und gelegentlich das Letztere nicht einmal in den Bereich der in der Analysis üblichen Formen fällt.

Keinem Abschnitte dieses Buches ist eine Einleitung wichtiger als dem gegenwärtigen, eine Einleitung, die den Leser wo möglich mit Einem Male auf den Standpunkt des Verfassers stellen, ihm die eigentlichen Bedürfnisse der Analysis in Bezug auf Differentialgleichungen ins Gedächtniss rufen und auf Grundlage derselben darthun soll, was er sich unter einer Formenlehre allenfalls vorstellen und was er von einer solchen erwarten könne, damit ein jeder der folgenden Paragraphe als die Befriedigung einer Erwartung enthaltend erscheine und das Dunkel, welches derzeit noch über den Differentialgleichungen lagert, sich allmählig aufhelle. Hiebei ist es aber von Wichtigkeit, im Allgemeinen auf diejenigen Fälle hinzuweisen, in welchen man auf lineare Differentialgleichungen stösst und auf den practischen Zweck, den man durch die Integration derselben zu erreichen wünscht.

Gewöhnlich sind es Aufgaben der Mechanik oder mathematischen Physik, welche zu linearen Differentialgleichungen führen. Die lineare Form rührt daher, dass die abhängige Veränderliche entweder die Bedeutung einer Störung, d. h. sehr kleinen Correction des Elementes einer bereits annäherungsweise bestimmten Bahn, oder die einer ebenfalls sehr kleinen Entfernung aus der Ruhelage bei schwingenden Bewegungen von kleinen Amplituden hat, dass sohin diese Veränderliche sowohl, als auch ihre sämmtlichen Differentialquotienten, wo nicht alle, doch mindestens die welche in der Gleichung erscheinen, als sehr kleine Grössen der ersten Ordnung angesehen und demzufolge alle Glieder von mehr als Einer Dimension nach denselben in erster Annäherung weggelassen werden. Diese Form ist daher keine ganz und gar in der Natur der Sache liegende, sondern theilweise auch eine durch unsere subjectiven Bedürfnisse bedingte, oder, so zu sagen, durch unser eigenes Unvermögen: complizirtere Wirkungen einer zusammengesetzten Ursache mit Einem Blicke zu überschauen, wesentlich hervorgerufene. Dieses Unvermögen ist es, welches uns diese Ursachen sowohl, als auch jene Wirkungen zu classifiziren nöthigt und es hängt wesentlich von dem bei dieser Classification zu Grunde gelegten Eintheilungsprinzipe ab, ob wir damit unsern Zweck erreichen oder verfehlen. Diese Differentialgleichungen sind ferner grösstentheils partielle, die Coordinaten und die Zeit als unabhängige Veränderliche enthaltend; der einfachste Fall ist der, wenn eine einzige Coordinate $x$ und die Zeit $t$ als unabhängige und noch etwa eine Verschiebung aus der Ruhelage $y$, die als Function von $x$ und $t$ angesehen wird, nebst ihren Differentialquotienten, als abhängige Veränderliche in der Gleichung erscheinen. Meist lassen sich die complizirteren Fälle von mehreren partiellen Gleichungen, mit mehreren abhängigen und unabhängigen Veränderlichen, auf diesen einfachsten zurückführen und dieser einfachste gestattet ferner noch eine weitere Vereinfachung durch die Verwandlung in eine gewöhnliche Differentialgleichung mit nur zwei Veränderlichen: eine abhängige und eine unabhängige, welche dadurch bewerkstelligt wird, dass man das Integral in Form eines Produktes voraussetzt aus einer reinen aber bestimmten Function von $t$, in eine reine aber noch unbestimmt gelassene von $x$. Jeden-

falls aber liegt der beiweitem grösseren Mehrzahl von linearen Differentialgleichungen die Voraussetzung zu Grunde, dass alle in derselben enthaltenen Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen, den $0^{ten}$ nicht ausgenommen, sehr kleine Functionen von $x$ seien. Es drängt sich uns daher hier eine, sowohl allgemein als auch speciell, in Bezug auf die Anforderungen, die man an die Formenlehre stellen kann, wichtige Bemerkung auf, nämlich: Die Integration einer linearen Differentialgleichung kann nur die Gesetze der kleinen Bewegungen liefern und diejenigen der sich etwa darbiethenden particulären Integrale, welche die Eigenschaft besitzen, für gewisse endliche oder unendliche Werthe von $x$ sehr grosse oder gar unendliche Werthe anzunehmen, sind entweder ganz oder mindestens zum Theile, als mit den in die Rechnung niedergelegten Voraussetzungen im Widerspruche stehend, zurückzuweisen. Hat daher das fragliche particuläre Integral die Eigenschaft, für mässige Werthe von $x$ und in der Nähe der Erregungsstelle einen unendlichen Werth zu bekommen, so wird man daraus nicht auf Excursionen schliessen von unendlichen Amplituden, sondern nur darauf, dass man an dieser Stelle zur Annahme der linearen Form noch gar nicht berechtigt war. Hat dasselbe particuläre Integral hiebei noch die Eigenschaft, für grössere Werthe von $x$, respective für grössere Entfernungen von der Erregungsstelle, stets sehr klein zu bleiben, so wird man es jederzeit als brauchbar, d. h. als den analytischen Ausdruck der Bewegungsgesetze in solchen grösseren Entfernungen enthaltend, ansehen können; particuläre Integrale hingegen, welche mit $x$ ins Unendliche wachsen, wird man wohl als Auflösungen der Differentialgleichung, oder auch als Auflösungen irgend eines anderen Problemes, das zu derselben Differentialgleichung führt, ansehen können, aus der Reihe der Auflösungen des vorliegenden Schwingungsproblemes hingegen streichen müssen. Hieraus ergibt sich unmittelbar die nicht unwichtige Folgerung, dass diejenigen Formen der Integrale, die ihrer Natur nach geeigneter sind, den Vorgang in grösseren Entfernungen von der Erregungsstelle darzustellen, vor anderen, hiezu minder oder gar nicht geeigneten, den Vorzug verdienen. So gebührt z. B. der nach absteigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen geordneten unendlichen Reihe, unter übrigens gleichen Umständen, unbezweifelt der Vorrang vor einer anderen, deren Glieder nach aufsteigenden Potenzen geordnet sind.

Gegenüber den Bedürfnissen der Mechanik und Physik lässt sich hieran noch eine zweite Bemerkung anschliessen, nämlich: Die Integration der Differentialgleichungen ist nicht Zweck, sondern nur Mittel zum Zwecke, der eigentliche Zweck aber ist Auslegung jener gewaltigen Geistersprache, die in den Differentialgleichungen liegt und Zerlegung des vielumfassenden Naturgesetzes, das in einer solchen enthalten ist, in ihre einfachsten, dem menschlichen Auffassungsvermögen am leichtesten zugänglichen Bestandsatzungen. Könnte dieser Zweck erreicht werden ohne Integration vermittelst der Differentialgleichung selber, so wäre das Integriren der letzteren nutzlos, so wie es wenig nutzbringend ist in allen denjenigen Fällen, wo das gewonnene Integral eine Form hat, kraft deren ihm keine grössere Durchsichtigkeit inwohnt, als der Differentialgleichung, z. B. die Form einer Reihe, geordnet nach aufsteigenden Potenzen der Veränderlichen. — Es wird nicht unnütz sein, wenn wir uns an dieser Stelle über den Werth der letzterwähnten Reihenform ausführlicher aussprechen:

Nach den Ergebnissen des ersten Abschnittes dieses Werkes, §. 3, in dem der Beweis der Existenz des allgemeinen Integrals enthalten ist, kann jeder Differentialgleichung von der Form:

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + X_1 y' + X_0 y = 0 \tag{1}$$

Genüge geleistet werden durch einen Ausdruck von der Form:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots\ldots\ldots + C_n y_n, \tag{2}$$

wo $C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$ willkürliche Constanten, $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ hingegen Functionen von $x$ bedeuten, deren jede für sich die Eigenschaft besitzt, die Differentialgleichung zu erfüllen. Diese letzteren sind keineswegs Functionen von ganz bestimmtem unveränderlichem Werthe, sie können vielmehr auf unendlich viele verschiedene Arten durch andere und andere ersetzt werden, die man aus einer Hauptgruppe derselben sämmtlich erhalten kann durch Multiplication mit beliebigen constanten Factoren und Addition. Nun ist es der Differentialgleichung zwar gleichgiltig, welche der unendlich vielen verschiedenen Combinationen man als allgemeines Integral ansehen will, dem menschlichen Auffassungsvermögen hingegen ist so etwas ganz und gar nicht gleichgiltig; dieses wird sich vielmehr aus allen den unzähligen Combinationen gerade diejenige heraussuchen, in welcher die Bestandtheile $y_1, y_2, \ldots y_n$ mit dem allerhöchsten Grade der Durchsichtigkeit begabt sind, es wird das Heterogene zu sondern, das Homogene zusammenzustellen streben und unter den möglichen Formen der particulären Integrale diejenigen bevorzugen, die, so sie vorhanden sind, bei der unmittelbaren Ansicht allsogleich geometrisch construirt vor das Auge des Geistes treten. Wenn daher Eines der particulären Integrale sich präsentirte als die Summe von zweien oder mehreren wesentlich von einander verschiedenen Ausdrücken und sich eine Zerlegung machen lässt in die einzelnen Bestandtheile, jedoch so, dass ein jeder derselben für sich der Differentialgleichung Genüge leistet, so wird eine Integrationsmethode, in deren Natur eine solche Zerlegung liegt, jedesmal den Vorzug verdienen. Dagegen wird jede andere Methode, die ihrer Beschaffenheit nach Ungleichförmiges zusammenwürfelt und die Mischung mit dem dunklen Schleier einer gemeinschaftlichen, Alles umfassenden Form bedeckt, keinen grösseren Nutzen gewähren, als die ebenfalls Alles auf einmal sagende Differentialgleichung selbst und hierin liegt die erste grosse Unvollkommenheit der Integrationsmethode durch Reihen, die nach aufsteigenden Potenzen der Veränderlichen geordnet sind. Hievon überzeugt man sich am besten, wenn man bedenkt, dass in der Gleichung (2), so wie sie durch den Vorgang der Reihenentwicklung, nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$, erhalten wird, die Constanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ mit den Differentialquotienten des allgemeinen Integrales: $y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n-1)}$ für $x=\alpha$, d. h. nach den Bezeichnungen in §. 3 des I. Abschnittes, S. 6, mit den Grössen $\mathrm{y}, \mathrm{y}', \mathrm{y}'', \ldots\ldots \mathrm{y}^{(n-1)}$ zusammenfallen, woraus unmittelbar folgt, dass die, gleichfalls in Reihenform erscheinenden $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ in (2), in der Regel, den sämmtlichen einfachsten Auflösungen der Differentialgleichung (die man particuläre Integrale im engeren Sinne des Wortes nennen könnte) Zugehöriges enthalten werden. Denn, gesetzt den Fall:

$$y = B_1 z_1 + B_2 z_2 + \ldots\ldots + B_n z_n \tag{3}$$

sei die durchsichtigste Form des allgemeinen Integrales; die Bestandtheile desselben: $z_1, z_2, \ldots . z_n$ seien darin nach ihren Haupteigenschaften sortirt, so dass jeder von ihnen unmittelbar, bei der ersten Ansicht, das lichtvolle Bild einer anderen und anderen elementaren Bewegungsweise hervorruft, so finden sich offenbar, in der Regel, in der Form (2) alle diese lichtvollen Bilder bis zur völligen Unkenntlichkeit untereinandergemischt vor, denn es wird:

$$\begin{aligned}
y &= C_1 = B_1 z_1 + B_2 z_2 + \ldots\ldots + B_n z_n \\
y' &= C_2 = B_1 z'_1 + B_2 z'_2 + \ldots\ldots + B_n z'_n \\
y'' &= C_3 = B_1 z''_1 + B_2 z''_2 + \ldots\ldots + B_n z''_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n-1)} &= C_n = B_1 z_1^{(n-1)} + B_2 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + B_n z_n^{(n-1)}
\end{aligned} \tag{4}$$

sein, unter $z, z', z'', \ldots z^{(n-1)}$ dasjenige verstanden, was aus $z, z', z'', \ldots z^{(n-1)}$ wird, wenn man $\alpha$ anstatt $x$ substituirt. Denkt man sich nämlich auch $z_1, z_2, \ldots . z_n$ nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ in Reihen entwickelt, so werden die Glieder dieser Reihen sich unter die $y_1, y_2, \ldots . y_n$ genannten particulären Integrale in der Art vertheilen, dass alle ersten von $x-\alpha$ freien Glieder dem $y_1$, alle mit der ersten Potenz von $x-\alpha$ verknüpften dem $y_2$, alle mit $(x-\alpha)^2$ dem $y_3$, u. s. w. zufallen, eine Vertheilungsweise, die offenbar in den meisten Fällen die Klarheit der Anschauung sehr beeinträchtigen muss.

Hiezu tritt noch der Umstand, dass die in Rede stehenden, nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ geordneten Reihen für $y_1, y_2, \ldots . y_n$, in der Regel nur convergiren für solche Werthe von $x$, die sehr nahe an $\alpha$ liegen, dass man also im Grunde nur das Bild von einem sehr kleinen Stück derjenigen Curve erhält, welcher die Gleichung $y = y_1$ oder $y = y_2$ u. s. w. angehört. Es ist nun freilich wahr, dass man dem $\alpha$ der Reihe nach alle aus der arithmetischen Reihe: $0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots .$ genommenen Werthe ertheilen kann, und so mit Hilfe successiver Constantenbestimmungen ein Stück nach dem anderen und sohin endlich die ganze Curve zu gewinnen vermöge; diess ist aber nur eine theoretische Möglichkeit, ein praktisches Verfahren kann es um so weniger sein, als man, zur Durchführung solcher Rechnungen, selbst die constanten Parameter, die in der Differentialgleichung vorkommen, mit bestimmten numerischen Werthen zu versehen genöthigt wird. Hätte endlich demungeachtet ein Rechner sich über alle diese Schwierigkeiten hinausgesetzt, so wäre in den meisten Fällen eine scheinbar ganz regellose Curve die ganze Frucht seiner Bemühungen.

Es war nothwendig hier das völlig Nutzlose der Integration der linearen Differentialgleichungen durch solche Reihen, in Bezug auf den Zweck: Erkenntniss der in denselben liegenden Naturgesetze, umständlich zu erörtern, weil wir jetzt nur mehr die geraden Gegentheile der aufgezählten Unzukömmlichkeiten in Einem Begriffe zu vereinigen brauchen, um das Musterbild einer vollkommneren und zweckmässigeren Integrationsmethode vor Augen zu haben.

Nützen nun aber solche Reihen bei der Integration der Differentialgleichungen Nichts, eben weil sie alle möglichen Functionen darzustellen geeignet sind und sohin die möglichen Eigenschaften aller in ihnen zusammenfliessen, so sind wir offenbar genöthigt, uns an andere mit specielleren Eigenschaften versehene Functionen zu wenden, die, eben ihrer specielleren Eigenschaften wegen, unserem Anschauungsvermögen zugängiger sind. Die verschiedenen Gattungen dieser letzteren in der Differentialgleichung selbst von einander zu sondern, ihre Anwesenheit zu erkennen, sie zu sortiren und zur wirklichen Berechnung zurechtzulegen, ist nun die Aufgabe der Formenlehre. Eine Eintheilung der Functionen in Classen und Ordnungen ist hiebei eine sehr wichtige Sache und es hängt die ganze Gestaltung der Formenlehre zu einem lichtvollen Ganzen sehr wesentlich von dem Prinzipe dieser Eintheilung ab.

Bekanntlich theilt die Analysis ihre Functionen zuerst ein in algebraische und transcendente, die algebraischen in rationale und irrationale, ganze und gebrochene; diese Eintheilungsweise in aller Strenge beizubehalten, würde aber auf dem gegenwärtig von uns betretenen Felde nicht zweckmässig sein. Nach dem hier adoptirten Eintheilungsgrunde nämlich, sind alle Functionen als mit zweierlei Eigenschaften begabt anzusehen, die wir von einander zu sondern und auch in gegenseitiger Verbindung zu betrachten genöthigt werden:

*A)* Eigenschaften Bezug nehmend auf unser subjectives Auffassungsvermögen und kraft deren die Functionen ein mehr oder minder lichtvolles geometrisches Bild bei uns erwecken. Hier werden wir veranlasst, diejenigen obenan zu stellen, bei denen ein solches Bild schon durch die unmittelbare Ansicht gewonnen wird, die anderen aber, bei welchen zu diesem Zwecke minder oder mehr weitläufige Rechnungsentwicklungen benöthigt werden, nach Massgabe dieser letzteren, tiefer in den Hintergrund zu stellen. Man könnte den Zweig der Formenlehre, der sich mit diesen Eigenschaften befasst, die subjective Formenlehre nennen. Diese hier erschöpfend zu behandeln, ist der Ort nicht, nachdem die gesammte analytische Geometrie und grössere Parthien in mehreren anderen mathematischen Wissenschaften nur ein Theil davon sind; wir sind vielmehr genöthigt sie als grösstentheils schon gegeben vorauszusetzen und lediglich ihre Verbindung mit der dem vorliegenden Gegenstande specifischen Formenlehre zur Discussion zu bringen.

*B)* Eigenschaften der Functionen, die sich in der Differentialgleichung abbilden, in deren Integralen sie zu erscheinen vermögen. Von diesen Eigenschaften stehen diejenigen in erster Reihe, welche den Gleichungscoefficienten am leichtesten erkennbare und wo möglich auf den ersten Blick in die Augen fallende Merkmale aufprägen. Die anderen, zu deren Erkenntniss wir durch Rechnung gelangen, treten hier wieder, nach Massgabe der Weitläufigkeit derselben, mehr und mehr in den Hintergrund. Weil nun aber in der Differentialgleichung die Differentialquotienten der Genüge leistenden Functionen vorkommen, so ist schon im Voraus zu erwarten, dass zwar die ganze Genüge leistende Function mit allen ihren Eigenschaften in der Gleichung abgebildet erscheinen werde, dass aber vorzugsweise diejenigen von ihnen, welche das unmittelbare gegenseitige Verhalten der Differentialquotienten zu einander zum Gegenstande haben, am allerleichtesten aus dem Coefficientenbaue erkenn-

bar sein werden, und dass alle Functionen, bei denen das Verhalten der Differentialquotienten zu einander ein ähnliches ist, den Coefficienten ähnliche oder dieselben Merkmale aufdrücken werden. Wir rechnen demgemäss alle algebraischen Functionen, den Logarithmus und die Kreisbögen, deren irgend eine trigonometrische Linie gegeben ist, wegen des ähnlichen gegenseitigen Verhaltens der Differentialquotienten, zu einer und derselben Familie. Auch ist es klar, dass wir unter allen Functionseigenschaften denjenigen den Vorzug zuerkennen müssen, deren Abdruck in der Differentialgleichung durch ähnliche oder entgegengesetzte Eigenschaften anderer Functionen nicht verdunkelt, oder verwischt werden kann. Schreiten wir nach diesen Auseinandersetzungen zur wirklichen Classification der Functionen:

Erstens. Die algebraische Ganze Function von $x$, oder das, nach absteigenden Potenzen von $x$, mit ganzen, positiven Exponenten geordnete Polynom. Seine Haupteigenschaften in Bezug auf die subjective Formenlehre sind folgende:

1. für jeden endlichen Werth der Veränderlichen $x$, erhält es ebenfalls einen endlichen Werth;
2. wenn $x$ eine gewisse, endliche, leicht angebbare Zahl numerisch überschreitet, so geräth die Function in den Zustand des unendlichen Wachsens und ändert dann ihr Zeichen nicht mehr — ein Wachsen, welches nach der positiven oder negativen Seite hin stattfinden und sich demjenigen der höchsten Potenz von $x$ fortwährend nähern wird.

In Bezug auf die objective Formenlehre heben wir folgende Haupteigenschaft hervor: Ist die Anzahl der Dimensionen der Function $m$, so ist die ihrer successiven Differentialquotienten der Reihe nach:

$$m, \quad m-1, \quad m-2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1, \quad 0.$$

Ertheilt man daher der Veränderlichen $x$ einen unendlichen Werth $u$, so werden die ersten $(m-1)$ Differentialquotienten ebenfalls unendlich und diese angenommenen unendlichen Werthe gehören beziehungsweise den Ordnungen folgender Grössen an:

$$u^m, \quad u^{m-1}, \quad u^{m-2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad u.$$

Das ganze Polynom ist aber nicht die einzige Function, welche diese Eigenschaften besitzt; diese kommen vielmehr noch vielen anderen Functionen zu, welche sich gar nicht durch ein ganzes Polynom ausdrücken lassen, ja nicht einmal durch eine nach absteigenden Potenzen von $x$ geordnete convergirende Reihe, sondern nur etwa durch ein bestimmtes Integral, oder eine andere vielleicht nicht einmal bekannte Form — wir rechnen sie alle zu einer und derselben Gattung. Sie erwecken sämmtlich bei ihrer unmittelbaren Ansicht in uns dasselbe geometrische Bild aus der einfachen Ursache, weil es eben die genannten Eigenschaften sind, die dem Bilde zu Grunde liegen; sie prägen den Gleichungscoefficienten dieselben Merkmale auf, wegen des ähnlichen Verhaltens ihrer Differentialquotienten, sie unterscheiden sich vielleicht durch andere weiter in den Hintergrund tretende Merkmale sehr wesent-

lich, diese bedingen aber nur etwa eine mehr oder minder erschwerte wirkliche Berechnung, die kein eigentlicher Gegenstand der objectiven Formenlehre ist.

Wir bemerken hier gleich ein für allemal, dass durch den einfachen hier gemachten Schritt: die Erhebung nämlich derjenigen Eigenschaften, die einer speciellen Function zukommen, zu allgemeinen Unterscheidungsmerkmalen einer ganzen, grossen Familie, die gleich Eingangs erwähnte Schwierigkeit der Formenlehre, als eines Inbegriffs von Lehrsätzen, die das vollkommen Bekannte mit dem völlig Unbekannten verbinden, wegfalle.

Zweitens. Der algebraische, rationale Bruch, enthaltend ein ganzes Polynom im Zähler und ein eben solches im Nenner. Diese Functionsform hat mit der früheren die Eigenschaft gemeinschaftlich, von einem genügend gross gewählten Werthe von $x$ angefangen, das Zeichen beizubehalten; bei dem unendlichen Wachsen der Veränderlichen geräth sie entweder in den Zustand des unendlichen Zu- oder Abnehmens und nähert sich in ihrem Verhalten einer Potenz von $x$ die man bekömmt, wenn man das erste Glied des nach absteigenden Potenzen geordneten Zählers, durch das erste Glied des ebenso geschriebenen Nenners dividirt. Sie unterscheidet sich von der früheren dadurch, dass sie unendliche Werthe annehmen kann für endliche Werthe der Veränderlichen $x$, welche den Nenner auf Null bringen. Die sie darstellende Curve besitzt, im endlichen Abstande vom Anfangspuncte der Coordinaten, eine gewisse Anzahl verticaler Assymptoten und verläuft zu beiden Seiten in stetige Äste. In Bezug auf das Verhalten ihrer Differentialquotienten, hat sie mit der früherer wähnten Gattung insofern eine Ähnlichkeit, als jede Differentiation ihre Ordnungszahl um die Einheit herabsetzt. Ihre successiven Differentialquotienten verhalten sich daher ebenfalls, für sehr grosse Werthe der Veränderlichen und in Bezug auf die Grössenordnung zu einander, wie die Glieder einer absteigend geordneten geometrischen Progression; für endliche Werthe von $x$ jedoch, welche den Nenner auf Null bringen, und so der Function einen unendlichen Werth verleihen, den wir mit $A$ bezeichnen, hat es gerade die entgegengesetzte Bewandtniss: jede Differentiation nämlich führt Einen Null werdenden Factor in den Nenner mehr ein; die Function also und ihre Differentialquotienten bilden, für solche Werthe der Veränderlichen, eine Reihe von unendlichen Grössen, die beziehlich denselben Ordnungen angehören mit:

$$A, \quad Au, \quad Au^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad Au^n,$$

unter $u$ wieder eine unendliche Grösse verstanden. Wir erheben nun abermals diese Eigenschaften zu allgemeinen Merkmalen einer ganzen Familie von Functionen, gleichgiltig, ob sich diese durch einen algebraischen Bruch wiedergeben lassen oder nicht.

Drittens. Die algebraische, irrationale, ganze oder gebrochene Function. Ihre Haupteigenschaft ist Vieldeutigkeit; sie steht in Bezug auf Durchsichtigkeit in der Regel gegen die beiden früheren weit zurück. In Bezug auf das gegenseitige Verhalten ihrer Differentialquotienten vereinigt sie die Eigenschaften der ganzen und gebrochenen rationalen Functionen in sich und unterscheidet sich von ihnen durch gewisse Eigenthümlichkeiten, die erst später am geeigneten Orte zur Sprache kommen können. Auch die Eigenschaften dieser Function erheben wir zu allgemeinen

Merkmalen einer ganzen Gruppe und rechnen z. E. den Bogen, dessen Sinus oder Cosinus gegeben ist, seines ähnlichen Verhaltens wegen dazu, gerade so, wie wir zur nächstvorangehenden Gattung den Logarithmus und den Bogen, dessen rationale Tangente gegeben ist, zählen, indem wir die in der Analysis übliche Eintheilung in algebraisch und transcendent ganz aufgeben. — Alle die aufgezählten drei Gruppen von Functionen aber vereinigen wir in eine einzige erste Classe.

Zur zweiten Classe zählen wir die allgemeine Exponentialgrösse, die wir uns in der Form:

$$e^{\int \varphi(x) dx}$$

hingestellt denken und mit ihr auch alle anderen, ähnliche Eigenschaften besitzenden Functionen. Sie zerfallen in drei Gattungen, nämlich die, mit den Eigenschaften der erwähnten Exponentielle versehenen, wenn $\varphi(x)$: erstens eine algebraische ganze, zweitens eine rationale gebrochene und drittens eine irrationale Function von $x$ ist. Es ist nicht schwer sich von einer solchen Exponentialgrösse ein geometrisches Bild zu entwerfen, wenn man eine Uebersicht der Curve hat, welcher die Gleichung:

$$z = \int \varphi(x) \, dx$$

angehört. In Bezug auf das Verhalten der Differentialquotienten zu einander sind die Functionen dieser Classe von jenen der ersten sehr wesentlich verschieden und wir bemerken zuerst als allgemeines charakteristisches Merkmal derselben, dass sämmtliche Differentialquotienten dieselbe Exponentielle als Factor besitzen werden — ihr näheres Verhalten aber wollen wir erst an demjenigen Orte, wo sie als particuläre Integrale betrachtet und in Bezug auf ihren Einfluss auf die Differentialgleichung zur Sprache kommen werden, ausführlicher untersuchen, vorläufig aber nur obenhin andeuten:

Erstens: wenn $\varphi(x)$ eine algebraische ganze Function von der Ordnung $m$ ist, so werden sämmtliche successive Differentialquotienten als Produkte dastehen von zwei Factoren, deren erster die Exponentielle ist, der andere aber eine ganze Function von $x$, angehörend beziehlich den Ordnungen:

$$0, \quad m, \quad 2m, \quad 3m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man für $x$ einen unendlichen Werth $u$, so kann die Exponentielle, je nach der Beschaffenheit der in $\varphi(x)$ enthaltenen Coefficienten, unendlich gross, oder unendlich klein, oder dem Werthe nach unbestimmt erscheinen. Nennen wir diesen Werth $A$, so sind die successiven Differentialquotienten beziehlich von der Ordnung der Grössen:

$$A, \quad Au^{m}, \quad Au^{2m}, \quad Au^{3m}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hiebei ist es gleichgiltig, ob der Exponent reell ist oder imaginär — ein Umstand, der in Bezug auf die subjective Auffassung ganz und gar nicht gleichgiltig ist, da der reellen Exponentiellen ein ganz anderes geometrisches Bild entspricht als der imaginären, indem die erstere in ihrer einfachsten Form eine rasch abnehmende Grösse bezeichnet, während die andere eine periodische trigonometrische Function darstellt.

Zweitens. Wenn $\varphi(x)$ rational und gebrochen ist. Seine Ordnungszahl ist dann eine ganze Zahl, die positiv, Null und negativ sein kann, und das Verhalten der Differentialquotienten stimmt mit dem der früher erwähnten Exponentialgrösse in den ersten zwei Fällen einigermassen überein, und ist im dritten Falle, d. h. für negative Ordnungszahlen, ein ganz eigenthümliches, theilweise der Exponentiellen und theilweise der algebraischen gebrochenen Function angehöriges, das am geeigneten Orte ausführlich zur Sprache kommen muss; der Haupt-Unterschied aber liegt im Wesentlichen im Unendlich- oder Null-werden für endliche Werthe der Variablen.

Drittens. Wenn $\varphi(x)$ irrational ist. Auch hieher passt noch das früher erwähnte Verhalten der Differentialquotienten zu einander, so oft der numerische Werth der Ordnungszahl $m$ positiv oder Null ist; ist hingegen $m$ gelegen zwischen 0 und $-1$, so tritt ein anderes Verhalten auf und zwischen $-1$ und $-\infty$ abermals ein anderes. Auch hievon werden wir am passenden Orte ausführlich sprechen; hier aber mag es genügen, die irrationale Exponentielle als eine Function anzusehen, der der Character der Vieldeutigkeit zukömmt und bei welcher gelegentlich, durch das Überschreiten der darin enthaltenen irrationalen Ausdrücke von einem reellen zu einem imaginären Werthe, eine Formänderung eintritt: die Exponentielle erwirbt nämlich dann die Eigenschaft der Periodicität.

In der Eintheilung der Functionen weiter zu gehen und deren mehrere als die eben aufgezählten zwei Classen zu statuiren, wäre an diesem Orte nicht passend; denn Einmal würde es sehr wenig frommen auf willkürliche Weise gewisse Eigenschaften in einem Functionsbegriffe zu vereinigen, weil uns daraus die zweifache Obliegenheit erwachsen würde: Erstens: Die Möglichkeit des aufgestellten Begriffes zu erweisen und Zweitens: die wesentliche Verschiedenheit, in Bezug auf die der Differentialgleichung aufgedrückten Merkmale, von den Formen darzuthun, die in die erwähnten zwei Classen fallen. Ja, wiewohl wir, zufolge der im zweiten Abschnitte gewonnenen Erfahrungen, sehr gut wissen, dass die particulären Integrale in Form von Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, von bestimmten oder unbestimmten Integralen, erscheinen können, so halten wir uns darum doch nicht für berechtigt, aus diesen Formen neue Classen von Functionen zu bilden; wir sind vielmehr consequenterweise zur Untersuchung verpflichtet, ob sich nicht diese Functionsformen, als blosse Unterabtheilungen ihren Eigenschaften nach, entweder in die eine oder andere Hauptclasse reihen. oder auch als analytische Verbindungen, z. B. Producte darstellen lassen von Functionen, die zum Theil der ersten, zum Theil der anderen Classe angehörig sind.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich der Weg, den wir bei der Aufstellung der Formenlehre zu verfolgen haben, von selbst. Wir werden nämlich damit anfangen müssen, nach denjenigen Spuren zu forschen, welche in den Coefficienten der linearen Differentialgleichung vorhanden sind und das Dasein eines oder mehrerer particulärer Integrale erster oder zweiter Classe verrathen. Sodann werden wir uns zu denjenigen Formen wenden, von welchen die Rechnungen des zweiten Abschnittes Kunde gegeben haben: Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, bestimmte oder unbestimmte Integrale, um sie entweder in eine der beiden Hauptclassen einzureihen, oder, wenn es nothwendig ist, eine eigene Classe aus ihnen zu bilden. Aus diesen sorgfältig durchgeführten Untersuchungen end-

lich muss es sich ergeben, ob die unter allen diesen verschiedenen Formen vorausgesetzten particulären Integrale den linearen Differentialgleichungen mit algebraischen und rationalen Coefficienten, welche auch immer diese letzteren sein mögen, angehören können, oder ob sich Coefficientenformen denken lassen, welche durch keine der erwähnten Functionsformen erzeugt zu werden vermögen; würden wir diese letztere Entdeckung machen, so ginge daraus unmittelbar die Nothwendigkeit hervor, noch andere wesentlich verschiedene Functionsformen zu ersinnen, die als mögliche Integrale einer linearen Differentialgleichung dastünden.

Auch die Theorie der algebraischen Gleichungen besitzt einen Inbegriff von Lehrsätzen, welche aus der Form der Gleichung die Beschaffenheit der Wurzeln zu erschliessen lehren. Solche Sätze sind der Descartes'sche, der von Harriot, Fourier, Sturm u. s. w.; da jedoch die ins Auge gefasste Beschaffenheit nicht eine Beschaffenheit der Form sondern des Zahlenwerthes ist (ob positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, numerisch grösser oder kleiner, zwischen gegebenen Gränzen enthalten oder nicht u. s. w.), nachdem algebraische Gleichungen mit unbestimmt gelassenen Buchstabenparametern selten oder nie Gegenstand der Untersuchung sind, so besteht zwischen der Formenlehre der algebraischen Gleichungen und jener der linearen Differentialgleichungen ein sehr wesentlicher Unterschied, sowohl der weit grösseren Ausdehnung, als auch dem Inhalte nach. Denn, während z. B. die Formenlehre der algebraischen Gleichungen von einer Wurzel mit Bestimmtheit behaupten kann, sie falle zwischen gewisse Zahlen $a$ und $b$, und somit beinahe stets ein bestimmtes Zahlenindividuum bezeichnet. ist das Urtheil der Formenlehre der Differentialgleichungen über die Functionsform, zu der ein particuläres Integral zu zählen ist, beinahe stets ein disjunctives, aus der einfachen Ursache, weil eine jede Function mehrere Formen anzunehmen fähig ist. Sie wird daher unter mehreren solchen die Wahl lassen müssen und nur gewisse allgemeine unterscheidende Merkmale hervorheben können, von der Art der schon in diesem Paragraphe theilweise zur Sprache gebrachten. Es wird also sehr oft geschehen, dass sie von einem particulären Integrale sagt, es sei sowohl in der Form eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, als auch in der eines bestimmten Integrales, ja noch überdiess als Produkt aus einer Exponentialgrösse in ein algebraisches Polynom vorhanden, ja es lässt sich keineswegs die Möglichkeit läugnen, es wäre vielmehr etwas sehr Wünschenswerthes, dass man in der Folge für gewisse Classen von Differentialgleichungen ganz neue Functionsformen erdenken möge, von welchen die jetzige Analysis noch keine Ahnung hat, von denen aber doch die Formenlehre gewisse, ihnen und den bis jetzt bekannten Functionen gemeinschaftliche Eigenschaften im Voraus verkündet. Diese unsere Formenlehre wird daher, der Natur der Sache nach, grössere Schwierigkeiten bieten und für die Formenauswahl einen grösseren Spielraum zulassen müssen. Gleichwohl würde man irren, wenn man sich das Aufsuchen der Formen der particulären Integrale als eine in allen Fällen äusserst mühsame und die Kenntniss sehr vieler, nicht leicht im Gedächtnisse zu behaltender. Einzelnheiten erheischende Arbeit vorstellen würde; denn die Regeln der Formenlehre sind grösstentheils so einfach, dass sie, Einmal begriffen, dem Gedächtnisse nicht leicht wieder entschwinden, und für den mit ihnen vollständig Vertrauten gewinnen die Differentialgleichungen

eine Durchsichtigkeit, welche die Erwartungen derjenigen Wissenschaftsforscher, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigten und in der tiefen Nacht nach einigem Lichte rangen, wo nicht überbieten, doch wenigstens vollkommen befriedigen wird.

## §. 2.

## Einführung Eines oder mehrerer particulärer Integrale in die Differentialgleichung.

Um zur Kenntniss des Zusammenhanges zwischen der Form der Coefficienten und jener der particulären Integrale, welche die Gleichung erfüllen, zu gelangen, wird sich wohl schwerlich ein einfacherer und natürlicherer Weg denken lassen, als der darin bestehende, dass man in eine mit ganz beliebigen, algebraischen und rationalen Coefficienten versehene, daher auch möglicherweise die verschiedenartigsten Formen particulärer Integrale bereits enthaltende Differentialgleichung, ein neues particuläres Integral einführt und untersucht, welche Spur dieses eben eingeführten und von bestimmter Form vorauszusetzenden particulären Integrals, in der neuen Differentialgleichung jedesmal erkennbar sei, wie auch immer diejenige Differentialgleichung aussehen mag, in welche man diese Einführung veranstaltet hat. Von solchen Spuren wird man nämlich mit Grund erwarten können, dass sie durch andere eingeführte particuläre Integrale, von ähnlichen oder entgegengesetzten Eigenschaften, nicht mehr verwischbar seien, da ja eben ein solches Verwischen bei der vorgenommenen Einführung in eine Gleichung mit ganz unbestimmt gelassenen Coefficienten bereits stattgefunden haben müsste, aus der einfachen Ursache, weil dieselbe alle möglichen particulären Integrale und folglich auch das mit solchen ähnlichen oder entgegengesetzten Eigenschaften begabte besitzen kann.

Es werden hiebei alle Formen, deren im ersten Paragraphen Erwähnung geschah, gehörig zur ersten oder zweiten Klasse, oder hervorgegangen aus der Combination von beiderlei Formen, mit allfälligem Hinzutreten der Rechnungsoperationen des Differenzirens nach allgemeiner Ordnungszahl und des Integrirens zwischen bestimmten oder unbestimmten Grenzen, aufzuzählen sein; das übereinstimmende oder verschiedene Verhalten derselben in der ausgesprochenen Beziehung wird sich sodann erörtern lassen und es ist aus dem Gesagten ersichtlich, dass die Formenlehre jedenfalls mit der Methode der Einführung Eines oder mehrerer particulärer Integrale in eine gegebene Differentialgleichung zu beginnen habe, zu deren Auseinandersetzung wir auch unverzüglich schreiten wollen. — Es sei also:

$$X_n\, y^{(n)} + X_{n-1}\, y^{(n-1)} + X_{n-2}\, y^{(n-2)} + \ldots\ldots + X_2\, y'' + X_1\, y' + X_0\, y = 0 \tag{5}$$

eine reduzirte lineare Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung, deren Coefficienten $X_n$, $X_{n-1}$, .... $X_0$ beliebig gestaltete, ganze, algebraische und rationale Functionen von $x$ bedeuten mögen, und es heisse $y$ ihr allgemeines, mit $n$ willkürlichen Constanten begabtes Integral. — Setzen wir ein neues, mit der

willkürlichen Constante $C$ verknüpftes particuläres Integral $Cy_1$ den bereits vorhandenen hinzu, und nennen wir das allgemeine Integral der zu erhaltenden neuen Gleichung $z$, so ist offenbar:

$$z = y + Cy_1 \tag{6}$$

und daher:

$$\begin{aligned} y &= z - Cy_1 \\ y' &= z' - Cy'_1 \\ y'' &= z'' - Cy''_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= z^{(n)} - Cy_1^{(n)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit:

$$X_n z^{(n)} + X_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots\ldots + X_1 z' + X_0 z = C[X_n y_1^{(n)} + X_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + X_1 y'_1 + X_0 y_1].$$

Nennen wir:

$$X_n z^{(n)} + X_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ X_1 z' + X_0 z = P \tag{7}$$

$$X_n y_1^{(n)} + X_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ X_1 y'_1 + X_0 y_1 = P_1, \tag{8}$$

welche Benennungen wir für die Folge beibehalten wollen, so ist:

$$P = CP_1. \tag{9}$$

Wir müssen diese Gleichung, zur Wegschaffung der darin noch erscheinenden willkürlichen Constante $C$, differenziren und bekommen:

$$P' = CP'_1$$

und durch Division dieser Gleichung durch die nächstvorhergehende:

$$\frac{d}{dx}[log\ P] = \frac{P'}{P} = \frac{P'_1}{P_1} = \frac{M}{N}, \tag{10}$$

wo $M$ und $N$ von Brüchen befreite algebraische Polynome bedeuten. Es ist demnach:

$$NP' - MP = 0 \tag{11}$$

die gesuchte neue Differentialgleichung nach $z$, von der $(n+1)^{ten}$ Ordnung, in welcher die willkürliche Constante $C$, so wie auch der exponentielle Factor, der im neu eingeführten particulären Integrale $y_1$ allenfalls vorhanden sein mochte, nimmermehr erscheinen können, und deren Coefficienten überhaupt, gleich denen der vorgelegten Gleichung, algebraische, rationale und ganze Functionen sein müssen, da solche Formen des particulären Integrals $y_1$, für welche diess unmöglich wäre, von unserer Betrachtung ausgeschlossen sind. In vollständiger Entwicklung aufgeschrieben ist unsere neue Gleichung folgende:

$$z^{n+1}\,.\,NX_n + z^{(n)}\left\{\begin{matrix}+NX'_n\\+NX_{n-1}\\-MX_n\end{matrix}\right. + z^{(n-1)}\left\{\begin{matrix}+NX'_{n-1}\\+NX_{n-2}\\-MX_{n-1}\end{matrix}\right. + z^{(n-2)}\left\{\begin{matrix}+NX'_{n-2}\\+NX_{n-3}\\-MX_{n-2}\end{matrix}\right.$$

(12)

$$+\ \ldots\ldots + z''\left\{\begin{matrix}+NX'_2\\+NX_1\\-MX_2\end{matrix}\right. + z'\left\{\begin{matrix}+NX'_1\\+NX_0\\-MX_1\end{matrix}\right. + z\left\{\begin{matrix}+NX'_0\\ \\-MX_0\end{matrix}\right. = 0$$

Da wir in der Folge häufig Gelegenheit nehmen werden, mehrere particuläre Integrale auf Einmal in die vorgelegte Gleichung einzuführen, so müssen wir auch die hiezu dienliche allgemeinere Methode unserer Betrachtung unterziehen. Seien also:

$$C_1\,y_1,\quad C_2\,y_2,\quad \ldots\ldots\ldots\quad C_r\,y_r \tag{13}$$

die neu einzuführenden particulären Integrale, und nennen wir auch diessmal wieder das allgemeine Integral der zu ermittelnden neuen Gleichung $z$, so ist evident:

$$z = y + C_1\,y_1 + C_2\,y_2 + C_3\,y_3 + \ldots\ldots\ldots + C_r\,y_r, \tag{14}$$

und wir erhalten, ganz wie im früheren Falle vorgehend:

$$P = C_1\,P_1 + C_2\,P_2 + C_3\,P_3 + \ldots\ldots\ldots + C_r\,P_r, \tag{15}$$

wo uns $C_1\,P_1$, $C_2\,P_2$, ..... $C_r\,P_r$ die Resultate der Substitution der einzelnen Ausdrücke (13) statt $y$ in die vorgelegte Gleichung bedeuten. Um nun die neue Gleichung in $z$ zu ermitteln, die zu particulären Integralen, ausser jenen der vorgelegten Gleichung, noch die unter (13) aufgeführten Werthe besitzt, ist weiter nichts nöthig, als die Gleichung (15) $r$-mal der Differentiation zu unterwerfen, und aus ihr und den gewonnenen neuen Gleichungen die Constanten $C_1$, $C_2$, .... $C_r$ zu eliminiren, d. h. wir behandeln die (15) ganz und gar wie einen aus $r$ particulären Integralen zusammengesetzten Ausdruck, aus welchem, nach der in §. 4 des I. Abschnittes exponirten Methode, die zugehörige Differentialgleichung von der $r^{\text{ten}}$ Ordnung abgeleitet werden soll. So erhalten wir, indem wir in den dort geführten Entwicklungen statt:

$$y,\quad y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad \ldots\ldots\ldots$$

hier beziehungsweise die an die Stelle derselben tretenden Grössen:

$$P,\quad P_1,\quad P_2,\quad P_3,\quad \ldots\ldots\ldots$$

setzen, unter anderen, für den Fall, wo nur zwei neue particuläre Integrale:

$$C_1\,y_1,\quad C_2\,y_2$$

in die vorgelegte Gleichung einzuführen sind, folgende neue Gleichung als Resultat dieser Einführung:

## §. 3.

## Merkmale der algebraischen, ganzen, und der mit ihr verwandten Functionen.

Die einfachste der zur ersten Classe gehörigen Formen ist die algebraische ganze Function, die wir uns als ein endliches nach absteigenden Potenzen von $x$ geordnetes Polynom vorstellen. Es sei:

$$y_1 = Q \tag{18}$$

eine solche, so ist, behufs ihrer Einführung als particuläres Integral in die Gleichung (5) des vorigen Paragraphes, vor allem nöthig: die $M$ und $N$ benannten Functionen für den angenommenen Fall zu ermitteln. Da sämmtliche Coefficienten $X$ der ursprünglich vorgelegten Gleichung (5) ganze, rationale Polynome nach $x$ sind, oder wenigstens jedesmal dazu gemacht werden können, da ferner, nach den ebengemachten Voraussetzungen, von $y_1$ und dessen Differentialquotienten $y'_1$, $y''_1$, ..... $y_1^{(n)}$ ein Gleiches zu sagen ist, so sind auch $P_1$ und $P'_1$ und daher auch $M$ und $N$ ganze rationale Polynome nach $x$ und zwar ist nothwendig $M$ um die Einheit im Grade niedriger als $N$, weil auch $P'_1$ um die Einheit niedriger ist als $P_1$.

Nehmen wir endlich, um einen ganz speziellen Fall vor Augen zu haben, an, dass sämmtliche Coefficienten $X$ der Gleichung (5) von gleicher, z. B. von der $p^{\text{ten}}$ Ordnung, $N$ aber von der $q^{\text{ten}}$ Ordnung nach $x$ seien, so sind die beiden äusseren Glieder aller eingeklammert erscheinenden Trinome der Gleichung (12) nach $x$ durchgehends vom Grade $p+q-1$, die mittleren Glieder dagegen sämmtlich vom Grade $p+q$. Da nun die höchste Potenz von $x$ in jedem der dreitheiligen Coefficienten nur in Einem Gliede erscheint und daher in keinem Falle zufällig aufgehoben werden kann, da überdiess das entsprechende mittlere Glied im Coefficienten von $z$ der neuen Gleichung mangelt, so ist, unter den gemachten beschränkenden Voraussetzungen, der Effect der Einführung eines derartigen rein algebraischen particulären Integrals in die ursprünglich gegebene Gleichung (5): ein nothwendiges Abfallen in der Ordnungszahl nach $x$ vom vorletzten auf den letzten Coefficienten der neuen Gleichung. — Wäre $Q$ eine gebrochene Function nach $x$, so erschiene $P_1$ unter der Form:

$$P_1 = \frac{R}{S}.$$

Wir bekämen dann:

$$\log P_1 = \log R - \log S, \qquad \frac{P'_1}{P_1} = \frac{R'}{R} - \frac{S'}{S}$$

und daher:

$$\frac{M}{N} = \frac{R'S - RS'}{RS}. \tag{19}$$

Es ist also dann abermals $M$ dem Grade nach um die Einheit niedriger als $N$, und es muss daher das besagte Abfallen vom zweitletzten auf den letzten Coefficienten der neuen Gleichung auch für diesen Fall stattfinden.

Nehmen wir nun an, dass in den beiden letzten Coefficienten $X_1$ und $X_0$ der Gleichung (5) kein **Niveau**, wie wir es fortan nennen wollen, d. h. keine Gleichheit in der Ordnungszahl nach $x$, sondern ein beliebiges Ansteigen von $X_1$ auf $X_0$ vorhanden sei, so können wir uns auch für diesen Fall auf ganz ähnliche Weise von der Giltigkeit der oben ausgesprochenen Regel überzeugen.

Das Bisherige führt uns zur Kenntniss, dass durch Einführung eines rein algebraischen particulären Integrals von beliebiger Form in eine Gleichung mit sonst irgendwie gestalteten Coefficienten, in welcher aber noch kein Abfallen in den zwei oder mehr letzten Gliedern ersichtlich war, ein Abfallen vom vorletzten auf den letzten Coefficienten der neuen Gleichung mit Nothwendigkeit hervorgebracht werde.

Setzen wir also jetzt noch voraus, dass in den beiden letzten Coefficienten $X_0$ und $X_1$ der Gleichung (5) bereits ein Abfallen stattfinde, erzeugt vielleicht durch das Vorhandensein eines eben solchen particulären Integrals von algebraischer Form. Man wird sehr leicht sehen, dass, durch abermalige Einführung eines algebraischen particulären Integrals in die Gleichung (5), ein Abfallen in den drei letzten Coefficienten der neuen Gleichung entstehen muss. Eben so leicht wird man sich überzeugen können, dass: wenn, allgemein, in der ursprünglich vorgelegten Gleichung bereits ein Abfallen in der Ordnungszahl nach $x$ vom $r$ letzten Coefficienten an ersichtlich war, durch Einführung eines neuen particulären Integrals von rein algebraischer Form, in der neuen Gleichung (12) ein Abfallen vom $(r+1)$ letzten Coefficienten an bewirkt werde.

In den aufgezählten Fällen sind alle Voraussetzungen aufgenommen, die man über die Form der Coefficienten $X$ der Gleichung (5), und daher auch über die Form der ihr zukommenden particulären Integrale nur immer machen kann. Da nun die ausgesprochene Gesetzmässigkeit für alle diese Fälle in gleicher Weise besteht, und man sich ausserdem immer die algebraischen particulären Integrale als die letzteingeführten denken kann, so ist es klar, dass ein hierdurch in den letzten Coefficienten einmal hervorgebrachtes Abfallen, der Wirkung anderer später noch einzuführender particulärer Integrale gegenüber, den Character der völligen Unverwischbarkeit bewahren wird, es mögen nun jene particulären Integrale was immer für Formen besitzen, wie sie für die hierbetrachtete Sorte von Differentialgleichungen möglich sind.

Wäre nun auch umgekehrt die ebenbetrachtete Form particulärer Integrale die einzige, die überhaupt ein Abfallen in den zwei oder mehr letzten Coefficienten erzeugen mag, so könnte, aus einem stattfindenden Abfallen in den $(r+1)$ letzten Coefficienten einer vorgelegten Gleichung, mit Sicherheit auf das Vorhandensein von $r$ particulären Integralen von rein algebraischer Form geschlossen werden. Dem ist aber nicht so; denn jede Form eines particulären Integrals wie: $y_1 = e^{\psi(x)} Q$ erzeugt, wie später nachgewiesen werden soll, denselben Effect wie die ebenbetrachtete rein algebraische, wenn $\psi(x)$ eine algebraische gebrochene Function von der $0^{ten}$ oder von beliebig hoher negativer Ordnung nach $x$ vorstellt. Wir besitzen aber glücklicherweise ein vollkommen genügendes Kennzeichen zur näheren Unterscheidung solcher Formen, indem jeder einfache Wurzelfactor, wie $(x-\alpha)^k$, eines in $Q$ oder $\psi(x)$ vorhandenen Nenners mit Sicherheit ermittelt werden kann.

Wir fügen hier nur noch die Eine Bemerkung hinzu: dass das, durch Einführung eines algebraischen particulären Integrals in den beiden letzten Coefficienten hervorgebrachte Abfallen mehr als Eine Einheit in der Gradzahl nach $x$ betragen kann. Denn da die beiden Glieder $NX'_0$ und $-MX_0$ im Coefficienten von $z$ der. neuen Gleichung (12) von gleichem Grade nach $x$ sind, so können sich die Glieder mit der höchsten Potenz von $x$ in speciellen Fällen heben, was dann eben die besagte Wirkung zur Folge hat. Fallen $(r+1)$ letzte Coefficienten ab, so ist in der ganzen Reihe derselben, mit Ausnahme des am oberen Ende des Abfallens stehenden, der erwähnte Umstand in gleicher Weise vorhanden, und es mag daher eine Unregelmässigkeit in der Erscheinung dieses Abfallens einer derartigen zufälligen Ursache zugeschrieben werden. Wird aber die Gesammtheit der Einheiten, um welche der letzte Coefficient (von $z$) gegen den $(r+1)$ letzten (von $z^{(r)}$) in der Gradzahl nach $x$ abfällt, auf die $r$ zwischenliegenden Paare benachbarter Coefficienten repartirt, so wird, unter der Voraussetzung von $r$ solchen particulären Integralen wie die in Rede stehenden, auf jedes Coefficientenpaar wohl mehr, keinesfalls aber weniger als Eine Einheit entfallen können. — Es ist nothwendig, an diese Untersuchungen noch folgende Bemerkungen zu knüpfen:

Erstens. Die hier gewonnenen Resultate gelten nicht für den Fall, wenn $Q$ als eine unendliche nach aufsteigenden Potenzen von $x$ geordnete Reihe dasteht, denn es sind dann $P_1$ und $P'_1$ eben solche Reihen, und es erscheinen sohin auch $M$ und $N$ in solcher Reihenform, was offenbar gar keinen weiteren Schluss gestattet. Diess ist aber ganz natürlich, aus dem einfachen Grunde, weil, wie früher schon bemerkt worden, diese Form alle möglichen Functionen zu umfassen und somit auch alle möglichen Merkmale den Gleichungscoefficienten aufzuprägen vermag.

Zweitens. Das Abfallen in den Gradzahlen der letzten Coefficienten ist nicht eine Folge der algebraischen Beschaffenheit des neu eingeführten particulären Integrales, wie schon früher gesagt worden, sondern erscheint vielmehr als unterscheidendes Merkmal aller derjenigen Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x$, deren successive Differentialquotienten nach eben dieser Veränderlichen je um die Einheit niedriger in der Ordnungszahl sind. In der That: es sei $Q$ eine solche Function, gleichgiltig unter welcher Form sie erscheint, wenn nur ihre successiven Differentialquotienten $Q'$, $Q''$, $Q'''$, ..... dieselbe Anzahl von Dimensionen mit:

$$\frac{Q}{x}, \quad \frac{Q}{x^2}, \quad \frac{Q}{x^3}, \quad \frac{Q}{x^4}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

haben, so lässt sich offenbar dasselbe nicht bloss von jedem Differentialquotienten von $Q$, sondern auch von jedem Produkte aus einem solchen Differentialquotienten in eine beliebige ganze Function von $x$, die wir mit $X$ bezeichnen, sagen; denn es ist offenbar:

$$\frac{d}{dx}(Q^{(r)} X) = Q^{(r+1)} X + Q^{(r)} X'.$$

Jeder der zwei Bestandtheile dieses Differentialquotienten ist, wie der unmittelbare Anblick lehrt, um die Einheit in der Anzahl der Dimensionen niedriger als das Produkt $Q^{(r)} X$, sohin ist es

auch der ganze Differentialquotient, ja, noch mehr: jede Summe von solchen Produkten wie das hier betrachtete, trägt denselben Charakter. $P_1$ ist aber eine solche Summe, sohin ist $P'_1$ um die Einheit in der Ordnungszahl niederer als $P_1$, und demnach auch $M$ um eben so viel niederer als $N$, woraus das Abfallen in den letzten Coefficienten unmittelbar hervorgeht und als bezeichnendes Merkmal dasteht aller derjenigen algebraischen oder transcendenten Functionen, die mit der ersteren einerlei Verhalten der Differentialquotienten bekunden. Inwiefern aber aus einem Abfallen in den letzten Coefficienten der Rückschluss gestattet ist auf ein mit den Eigenschaften der ganzen algebraischen Function versehenes particuläres Integral, soll sich später im Verlaufe dieser Untersuchungen ergeben.

## §. 4.

## Merkmale der Exponentialfunctionen.

Die Eigenschaften dieser Functionsform richten sich einerseits nach der Ordnungszahl des Exponenten, andererseits nach dem Umstande, ob dieser ganz ist oder gebrochen, rational oder irrational. Wir beginnen bei dem einfachsten Falle und nehmen an, dass das neu einzuführende Integral $y_1$ folgende Form besitze:

$$y_1 = e^{\alpha x}\, Q, \tag{20}$$

wo $Q$ ein algebraisches, ganzes Polynom bedeutet, so ist allgemein $y_1^{(r)}$ von der Form:

$$y_1^{(r)} = e^{\alpha x}\, Q_r.$$

Wir erhalten dann $P_1$ unter der Form:

$$P_1 = e^{\alpha x}\, R,$$

wo $R$ abermals ein algebraisches Polynom nach $x$ vorstellt. Wir bekommen weiter:

$$\log P_1 = \alpha x + \log R, \quad \frac{P'_1}{P_1} = \alpha + \frac{R'}{R},$$

und daher:

$$\frac{M}{N} = \frac{\alpha R + R'}{R}. \tag{21}$$

*$M$ und $N$ sind also für den vorliegenden Fall von einerlei Ordnungszahl.*

Man wird sich in Folge dessen, durch blosse Betrachtung der Gleichung (12), sehr leicht von dem Stattfinden der nachfolgenden Erscheinungen überzeugen können:

1. Ist in den Coefficienten $X$ der Gleichung (5) ein Niveau bezüglich der Gradzahl nach $x$ vorhanden, so wird ein solches, nach Einführung eines so vorausgesetzten particulären Integrals im Allgemeinen auch in den Coefficienten der Gleichung (12) bemerkbar sein. In speciellen Fällen kann wohl auch bei mittleren Coefficienten eine Unterbrechung dieses Niveau's — eine Vertiefung — durch Entstehung einer niedrigeren Gradzahl nach $x$ vorkommen, da in denselben überall die höchste Potenz von $x$ in zwei Gliedern des eingeklammerten Trinoms erscheint, und daher, nach vollbrachter Reduction, zufällig den Coefficienten 0 erhalten kann.

2. Findet in der vorgelegten Gleichung (5) bei einer bestimmten Anzahl letzter Coefficienten ein Abfallen, bei den übrigen aber ein Niveau statt, so wird in der neuen Gleichung (12) ein Abfallen bei einer gleich grossen Anzahl letzter Coefficienten vorhanden sein, die Zahl der im Niveau stehenden aber um Eins vermehrt erscheinen.

3. Ist in der vorgelegten Gleichung (5) bei $r$ mittleren Coefficienten ein Niveau zu bemerken, dessen Endpunkte, z. B. durch den $(h+1)^{\text{ten}}$ Coefficienten vom Anfange $X_{n-h}$ und den $(k+1)^{\text{ten}}$ vom Ende $X_k$ bezeichnet sein mögen, so zwar, dass die übrigen, von diesen Grenzpunkten an, gegen beide Enden des Gleichungspolynoms hin abfallen, so wird, nach Einführung eines neuen particulären Integrals von der obenvorausgesetzten Form, in der Gleichung (12), die die wir der Kürze wegen in folgender Weise schreiben:

$$Z_{n+1}\, z^{(n+1)} + Z_n\, z^{(n)} + Z_{n-1}\, z^{(n-1)} + \ldots\ldots + Z_2\, z'' + Z_1\, z' + Z_0\, z = 0 \tag{22}$$

ein Niveau bei $(r+1)$ mittleren Coefficienten vorhanden und dessen Endpunkte durch die ebensovielten Coefficienten bezeichnet sein, nämlich durch:

$$Z_{n+1-h} = NX'_{n-h+1} + NX_{n-h} - MX_{n-h+1} \quad \text{und} \quad Z_k = NX'_k + NX_{k-1} - MX_k.$$

Der so äusserst glückliche Umstand für den im vorigen Paragraphen erörterten Fall: dass im Coefficienten, der die obere Grenze des Abfalls bezeichnet, die höchste Potenz von $x$ nur in Einem Gliede erscheint, deren Coefficient also keiner zufälligen Tilgung unterliegen kann, durch welche eine Trübung der dort betrachteten Erscheinungen veranlasst würde, kommt uns auch hier in gleicher Weise zu statten. Denn, da $X_{n-h}$ und $X_k$, als Endpunkte eines Niveau's zwischen $n+1-h-k$ mittleren Coefficienten der Gleichung (5), von gleichem, die Coefficienten $X_{n-h+1}$ und $X_{k-1}$ aber bereits von niedrigerem Grade nach $x$ sind, so kann in der Gleichung (12) die höchste Potenz von $x$ in den obenangeführten Coefficienten $Z_{n+1-h}$ und $Z_k$ offenbar nur in Einem Gliede enthalten sein.

Wir folgern aus dem Gesagten, dass jede Einführung eines particulären Integrals von der angenommenen Form, zu der Anzahl der bereits früher im Niveau einbegriffenen mittleren Coefficientenpaare ein neues hinzufügt, und zwar so, dass dadurch keinerlei Erscheinung des Abfallens in der ursprünglich vorgelegten Gleichung getrübt erscheint.

Man würde auch hier, aus dem Stattfinden eines Niveau's zwischen $(r+1)$ mittleren Coefficienten einer Gleichung, auf das Vorhandensein von $r$ particulären Integralen der vorausgesetzten Form schliessen können, wenn diese die einzige wäre, die den erörterten Effect zur Folge hat. Allein mehrere anders geformte Functionen und namentlich auch z. B. jedes particuläre Integral von der Form $e^{\psi(x)}\, Q$, wo $\psi\,(x)$ eine algebraische gebrochene Function von der ersten Ordnung vorstellt, bewirken ganz dieselben Erscheinungen, so dass eine nähere Unterscheidung dieser beiden Formen erst durch jene Kennzeichen ermöglicht wird, die uns über das Vorhandensein eines in $\psi\,(x)$ vorkommenden Nenners belehren.

Die Einführung eines neuen particulären Integrals der hier betrachteten Form wird also nachstehende Erscheinungen zur Folge haben:

1. Standen die Coefficienten $X$ im Niveau, so findet jetzt bei den beiden ersten Coefficienten $Z_{n+1}$ und $Z_n$ ein Ansteigen um Eine Einheit in der Ordnungszahl, bei den übrigen aber ein Niveau statt.
2. Bei denselben letzten Coefficienten, bei welchen früher ein Abfallen vorhanden war, ist ein solches auch gegenwärtig ersichtlich — der obenerwähnte Vorgang übt auf sie keine Wirkung aus.
3. War in der vorgelegten Gleichung (5) bereits ein Ansteigen bei $r$ Anfangscoefficienten zu bemerken, so wird nun ein solches bei $(r+1)$ Anfangscoefficienten vorhanden sein. Auch wird im ersten, und in dem an der höchsten Spitze der Ansteigung stehenden Coefficienten die höchste Potenz von $x$ nur in Einem Gliede vorkommen können. Bei den zwischenliegenden hingegen erscheint dieselbe in zwei Gliedern, und es kann daher durch zufälliges Aufheben der letzteren bei dem einen oder anderen dieser mittleren Coefficienten eine niedrigere Gradzahl nach $x$ entstehen.

Beim Vorhandensein von $r$ algebraischen particulären Integralen hat, wie wir schon gesehen haben, eine vorgenommene Repartition des gesammten Höhenunterschiedes bei den $(r+1)$ letzten Coefficienten nicht weniger, wohl aber mehr als Eine Einheit betragen können, weil im letzten Coefficienten eine zufällige Tilgung der mit der höchsten Potenz von $x$ verbundenen Glieder möglich ist; hier aber muss, durch Repartition des ganzen Höhenunterschiedes zwischen dem einen und dem anderen Endpunkte der Ansteigung, bei $(r+1)$ in diese Ansteigung einbegriffenen Anfangscoefficienten, gerade Eine Einheit auf jedes Paar benachbarter Coefficienten entfallen, wenn die neue Gleichung $r$ particuläre Integrale von der oben angenommenen Form besitzen soll.

Auch diese Form particulärer Integrale ist nicht die einzige, welche die angegebenen Erscheinungen hervorruft. Die Form $e^{\psi(x)}Q$, wo $\psi(x)$ eine algebraische gebrochene Function von der zweiten Ordnung bedeutet und jede andere Form, deren successive Differentialquotienten je um die Einheit in der Ordnungszahl höher sind, zeigt ein ganz ähnliches Verhalten, wie aus der im nächsten Paragraphen geführten Untersuchung ersichtlich ist und die Ansteigung bei den ersten Coefficienten um je Eine Einheit in der Ordnungszahl, ist das gemeinsame Merkmal aller derjenigen Functionen, deren successive Differentialquotienten, für sehr grosse Werthe der unabhängigen Veränderlichen, mit den Gliedern irgend einer steigenden geometrischen Progression, deren Exponent eben der dieser unabhängigen Veränderlichen ertheilte grosse Werth ist, einerlei Ordnungszahl besitzen.

## §. 6.

## Merkmale der Exponentialfunctionen.

(Schluss.)

Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall, indem wir $y_1$ von der Form:

$$y_1 = e^{\psi(x)}\, Q, \quad \text{oder} \quad y_1 = e^{\int \varphi(x)\, dx}\, Q \tag{25}$$

$\varphi(x)$ und $Q$ aber algebraisch voraussetzen. $P_1$ erhält die Form:

$$P_1 = e^{\int \varphi(x)\, dx}\, R,$$

wo $R$ gleichfalls algebraisch ist. Wir bekommen in derselben Weise wie früher:

$$\log P_1 = \int \varphi(x)\, dx + \log R, \quad \frac{P'_1}{P_1} = \varphi(x) + \frac{R'}{R}$$

somit:

$$\frac{M}{N} = \frac{\varphi(x)\, R + R'}{R}. \tag{26}$$

Der Grad von $M$ ist also um den Grad von $\varphi(x)$ höher als der von $N$.

Wir haben die bisher betrachteten Formen particulärer Integrale nur in Bezug auf jene Erscheinungen erörtert, die bei ihrer Einführung durch Bestimmung des Grades von $M$ und $N$ hervorgerufen werden. Da der vorliegende Fall die früheren umfasst, und nach der ebengeführten Untersuchung der Grad von $M$ und $N$ lediglich vom Grade der Grössen $\varphi(x)$ oder $\psi'(x)$ abhängt, so sehen wir in der That, dass die bisher angegebenen Kennzeichen eben nur einen Schluss auf letzteren gestatten.

Es ist also in dieser Beziehung einerlei, ob $\psi(x) = 0$ oder nach $x$ eine algebraische gebrochene Function vom Grade 0 (siehe §. 3), ob $\psi(x)$ von der Form: $\alpha x + \beta$, oder ein algebraischer Bruch vom ersten Grade (siehe §. 4), ob $\psi(x)$ eine ganze Function wie: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, oder eine algebraische gebrochene Function vom zweiten Grade ist (siehe §. 5), u. s. w. Der Fall endlich, wo $\psi(x)$ eine gebrochene Function von beliebigem negativen Grade vorstellt, kann nach den bisherigen Criterien nicht von dem erstangeführten unterschieden werden, da der Grad von $M$ zufolge (26) höchstens um die Einheit niedriger sein kann, als der von $N$.

Wir haben in den vorhergehenden Paragraphen nur lauter solche Fälle der Betrachtung unterworfen, in denen das neu einzuführende particuläre Integral einen Exponenten $\psi(x)$ mit ganzer, positiver Ordnungszahl besass. Da aber die Folgerungen, die wir hier aus dem Anblicke der Gleichung (26) gezogen haben, durchaus nicht an eine solche Bedingung geknüpft sind, so erkennen wir unmittelbar, dass sich für gebrochene jedoch positive Werthe der Gradzahl von $\psi(x)$, d. h. für jene Fälle, wo das neu einzuführende particuläre Integral Irrationalfunctionen im Exponenten trägt, ganz ähnliche Gesetzmässigkeiten ergeben werden, wie wir sie für ganze und positive Werthe jener Grösse

aufgefunden haben. Setzen wir also die Gradzahl von $\psi(x)$ als einen positiven Bruch und gleich $\frac{p}{q}$ voraus, so können wir hier zwei Fälle unterscheiden:

*A*) den Fall, wo $\frac{p}{q}$ ein positiver echter Bruch und sonach $p < q$ ist. — Die Ordnungszahl von $\varphi(x)$ ist dann $= \frac{p-q}{q} = -\frac{\delta}{q}$, wo wir unter $\delta$ den positiv genommenen numerischen Werth des Unterschiedes der beiden Zahlen $p$ und $q$ verstehen, also ein negativer echter Bruch, und in Folge dessen ist auch der Grad von $M$ um $\frac{\delta}{q}$ Einheiten niedriger als der Grad von $N$. Es lässt sich nun leicht und ganz auf dieselbe Weise wie im §. 3 einsehen:

1. dass die Einführung eines solchen particulären Integrals, für welches die Ordnungszahl von $\varphi(x)$ den Werth $-\frac{\delta}{q}$ besitzt, in eine vorgelegte Gleichung, in der noch kein Abfallen bei den letzten Coefficienten zu sehen ist, zu einer neuen Gleichung führen werde, in welcher nothwendig ein Abfallen um $\frac{\delta}{q}$ Einheiten von dem vorletzten auf den letzten Coefficienten stattfinden muss,
2. dass, wenn $r$ solche particuläre Integrale von gleicher gebrochener Ordnungszahl nacheinander in eine Gleichung der vorerwähnten Art eingeführt werden, in der neuen Gleichung nunmehr ein Abfallen in den $r$ letzten Coefficientenpaaren und im Gesammtbetrage von $\frac{r\delta}{q}$ Einheiten stattfinden müsse.
3. Eine niedrigere Ordnungszahl, durch Aufhebung der mit den höchsten Potenzen nach $x$ verbundenen Glieder, kann hier, ebenso wie bei dem in §. 3 behandelten Falle, niemals bei demjenigen Coefficienten vorkommen, der an dem oberen Ende des Abfalls steht und es unterscheidet sich in dieser Beziehung der vorliegende von dem dort erörterten Falle, wo dem $\varphi(x)$ die Ordnungszahl $-1$ zukam, nur insofern, als hier auch bei dem letzten, zum $0^{\text{ten}}$ Differentialquotienten gehörigen Coefficienten, keine zufälligen Aufhebungen stattfinden können, so zwar, dass, durch Repartition des gesammten Abfallens auf die $r$ einbegriffenen Coefficientenpaare, für jedes derselben genau $\frac{\delta}{q}$ Einheiten entfallen müssen.

*B*) Ist $\frac{p}{q}$ ein unechter positiver Bruch, so ist die Gradzahl von $\varphi(x)$ nämlich $\frac{p-q}{q} = \frac{\delta}{q}$ ein positiver echter oder unechter Bruch. In Folge dessen wird die Gradzahl von $M$ um $\frac{\delta}{q}$ Einheiten grösser sein als jene von $N$ und es muss sonach die Einführung eines diesen Fall hervorrufenden particulären Integrals in eine vorgelegte Gleichung, in deren Anfangscoefficienten noch kein Ansteigen vorhanden war, zu einer neuen Gleichung führen, in welcher ein solches Ansteigen in den Anfangscoefficienten jedesmal stattfinden wird. Namentlich wird:

1. Die Einführung eines einzigen particulären Integrals, für welches $\varphi(x)$ dem Grade $\frac{\delta}{q}$ angehört, in der neuen Gleichung ein Ansteigen im ersten Coefficientenpaare um $\frac{\delta}{q}$ Einheiten zur Folge haben.
2. Die aufeinanderfolgende Einführung von $r$ solchen particulären Integralen, denen lauter $\varphi(x)$ von demselben Grade $\frac{\delta}{q}$ zukommen, in eine vorgelegte Gleichung, wird eine neue Gleichung erzeugen, in welcher ein Ansteigen bei den $r$ ersten Coefficientenpaaren ersichtlich sein

wird: und die Repartition des gesammten Unterschiedes in der Ordnungszahl zwischen den beiden an den äussersten Enden der Ansteigung stehenden Coefficienten auf die einbegriffenen $r$ Coefficientenpaare, wird für ein jedes derselben gerade $\frac{\delta}{q}$ Einheiten ergeben.

3. Auch hier können die ebenerwähnten beiden, an den zwei Enden stehenden Coefficienten keine Verringerung ihrer Gradzahlen durch zufällige Aufhebungen erfahren, welche aber allerdings bei den mittleren in die ansteigende Reihe einbegriffenen Coefficienten vorkommen können.

Der Fall, wo das neu einzuführende particuläre Integral entweder eine rein algebraische Irrationalfunction $Q$ ist, oder aber, ausser einer übrigens rationalen oder irrationalen Exponentiellen, noch überdiess einen irrationalen algebraischen Bestandtheil enthält, ist offenbar als specieller Fall in dem hier betrachteten allgemeinen enthalten und tritt jedesmal ein, so oft $\varphi(x)$ eine gebrochene Irrationalfunction vorstellt, die beziehungsweise entweder das vollständige Differential des Logarithmus einer irrationalen Function ist, oder aber in Partialbrüche zerlegt einen Bestandtheil dieser Art liefert.

Die bisherigen Untersuchungen berechtigen zu der allgemeinen Folgerung, dass sich aus den erwähnten Erscheinungen des An- und Absteigens in einer vorgelegten Gleichung, nach einer stets gleichbleibenden Regel, ein Schluss auf alle möglichen ganzen oder gebrochenen positiven Ordnungszahlen von $\varphi(x)$ und alle jene negativen ziehen lasse, die zwischen 0 und $-1$ einschliesslich gelegen sind. Wiewohl aber Exponentialfunctionen, mit rationalen oder irrationalen, übrigens ganzen oder gebrochenen $\varphi(x)$ im Exponenten, sich in der erörterten Beziehung ganz auf dieselbe Weise verhalten, so kennzeichnet sich doch ein particuläres Integral von der Form (25) mit irrationalem $\varphi(x)$ oder $Q$ unmittelbar dadurch, dass für dasselbe auch die $P_1$ und $P'_1$, somit auch die $M$ und $N$ genannten Grössen, unter der Voraussetzung rationaler Coefficienten $X$ der vorgelegten Gleichung, nothwendig selbst irrationale Functionen sind, und die neue Gleichung daher ebenso nothwendig auch irrationale Coefficienten besitzen muss. Wir ziehen hieraus unmittelbar die nicht unwichtige Folgerung, dass eine Gleichung mit lauter rationalen Coefficienten unmöglich einzelne particuläre Integrale mit irrationalen algebraischen oder exponentiellen Bestandtheilen besitzen könne — später aber, wo die Möglichkeit und die Bedingungen des Vorhandenseins irrationaler particulärer Integrale in einer Gleichung mit lauter rationalen Coefficienten ausführlich zur Sprache kommen, werden wir sehen, dass allerdings Gruppen von mehren, der hier betrachteten Form angehörigen irrationalen Exponentialfunctionen, die aber auf bestimmte Weise miteinander zusammenhängen, als Gruppen aus eben so vielen particulären Integralen einer Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten erscheinen können.

Wir wollen nun auf einige beachtenswerthe Erscheinungen hinweisen, die bei dem gleichzeitigen Vorhandensein mehrer particulärer Integrale von der Form $e^{\int \varphi(x)\,dx} Q$ auftreten, wenn die Gradzahl von $\varphi(x)$ bei verschiedenen derselben verschieden ist.

Wie bereits nachgewiesen, entspricht $r$ particulären Integralen von dieser Form, in denen allen $\varphi(x)$ vom ersten oder von höherem Grade ist, ein Ansteigen in $(r+1)$ Anfangscoefficienten,

und es wird jede fernere Einführung eines derartigen particulären Integrals, in der neuen Gleichung ein Ansteigen in einem weiteren Coefficientenpaare zur Folge haben. Der Grad von $\varphi(x)$ wird nun allerdings auf die Gesammtansteigung in der neuen Gleichung einen Einfluss üben, allein, da die Erscheinungen in den Formen der Coefficienten bei der letzteren offenbar von der Ordnung unabhängig sind, in welcher man sich die einzelnen particulären Integrale derselben nach und nach eingeführt denken mag, so ist es klar, dass sich darüber ein Zweifel erheben könne, in welchem Coefficientenpaare der neuen Gleichung der Grad von $\varphi(x)$ des letzteingeführten particulären Integrales zu suchen sei.

Denkt man sich nun die Gradzahlen der, den einzelnen particulären Integralen einer vorgelegten Differentialgleichung zugehörigen $\varphi(x)$, nach ihrer Grösse in eine absteigende Reihe geordnet und setzt man, um einen speciellen Fall vor Augen zu haben, diese Reihe als aus lauter ganzen Zahlen bestehend voraus, so wird — falls nicht in einzelnen Coefficienten durch zufällige Aufhebung der höchsten Potenzen von $x$ eine Trübung entsteht, deren Bedingungen und Einfluss wir später untersuchen wollen — eine jede solche Gradzahl mit der Ansteigung in dem ebensovielten Coefficientenpaare des Gleichungspolynoms genau übereinstimmen. In der vorgelegten Gleichung nimmt also jede höhere Ansteigung auch eine frühere Stelle ein.

Wir wollen diese merkwürdige Gesetzmässigkeit vorerst für das Vorhandensein zweier, später, durch Zuhilfenahme der höheren Induction, für das Vorhandensein beliebig vieler particulärer Integrale von dieser Form nachweisen.

Führen wir also in eine Gleichung, die noch kein derlei particuläres Integral besitzt, nacheinander zwei solche particuläre Integrale ein.

Da es sich hier nur um die Gradbestimmung der Coefficienten der neuen Gleichung, und daher um Ermittlung der höchsten Potenz von $x$ in jedem derselben handelt, so haben wir auch nur die Grade der beiden letzten Glieder in den eingeklammerten Trinomen der Gleichung (12) aufzuschreiben, da die höchste Potenz von $x$ offenbar in keinem der ersten Glieder enthalten ist.

Nennen wir also $p$ den Grad der Coefficienten $X_n$, $X_{n-1}$, ....., eben so: $\mu$, $\nu$, $\sigma$ die Gradzahlen der Grössen $M$, $N$ und $\varphi(x)$ für das ebeneingeführte particuläre Integral, so ist:

$$\mu = \nu + \sigma.$$

Schreiben wir ferner unter $A$ und $B$ die, besagten beiden letzten Gliedern der eingeklammerten Trinome zukommenden Grade, unter $B - A$ endlich den Gradunterschied zweier zusammengehöriger Glieder, so erhalten wir:

| $A$ | $B$ | $B - A$ |
|---|---|---|
| $\nu + p$ | ........... | $-(\nu + p)$ |
| $\nu + p$ | $\nu + p + \sigma$ | $\sigma$ |
| $\nu + p$ | $\nu + p + \sigma$ | $\sigma$ |
| ...... | ........... | ......... |

Die Grade der Coefficienten der neuen Gleichung sind also in derselben Ordnung aufgeschrieben:

$$\begin{array}{l} \nu + p \\ \nu + p + \sigma \\ \nu + p + \sigma \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Führen wir jetzt noch ein zweites particuläres Integral ein, für welches $\mu_1$, $\nu_1$, $\sigma_1$ die analoge Bedeutung haben mögen, so erhalten wir eben so:

$$\begin{array}{lll} \overbrace{\qquad A \qquad} & \overbrace{\qquad B \qquad} & \overbrace{\qquad B - A \qquad} \\ \nu_1 + \nu + p & \dots\dots\dots\dots & -(\nu_1 + \nu + p) \\ \nu_1 + \nu + p + \sigma & \nu_1 + \nu + p + \sigma_1 & \sigma_1 - \sigma \\ \nu_1 + \nu + p + \sigma & \nu_1 + \nu + p + \sigma + \sigma_1 & \sigma_1 \\ \nu_1 + \nu + p + \sigma & \nu_1 + \nu + p + \sigma + \sigma_1 & \sigma_1 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \end{array}$$

Offenbar muss nun, je nachdem eine unter $B - A$ aufgenommene Differenz positiv oder negativ ausfällt, entweder der unter $B$ oder der unter $A$ stehende zugehörige, jedesmal nämlich der numerisch grössere Werth, als Grad des betreffenden Coefficienten in der neuen Gleichung angenommen werden. Je nachdem also $\sigma_1 > \sigma$, oder aber $\sigma_1 < \sigma$ vorausgesetzt wird, sind auch:

$$\begin{array}{lcl} \nu_1 + \nu + p & \text{oder aber} & \nu_1 + \nu + p \\ \nu_1 + \nu + p + \sigma_1 & & \nu_1 + \nu + p + \sigma \\ \nu_1 + \nu + p + \sigma + \sigma_1 & & \nu_1 + \nu + p + \sigma + \sigma_1 \\ \nu_1 + \nu + p + \sigma + \sigma_1 & & \nu_1 + \nu + p + \sigma + \sigma_1 \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

die Grade der successiven Coefficienten der neuen Gleichung. Im ersten Falle sind aber:

$\sigma_1 >$, $\sigma >$, $0$, ......, im zweiten dagegen: $\sigma >$, $\sigma_1 > 0$, ......

die einzelnen Ansteigungen in den aufeinanderfolgenden Coefficientenpaaren, wodurch die ausgesprochene Gesetzmässigkeit für das Vorhandensein zweier, bezüglich der Grade von $\varphi(x)$ verschiedener particulärer Integrale von dieser Form in der That erwiesen ist.

Der Satz wird allgemein bewiesen sein, sobald wir, unter Voraussetzung seiner Giltigkeit für eine bestimmte Anzahl, rücksichtlich des Grades von $\varphi(x)$ sämmtlich von einander verschiedener particulärer Integrale, dessen Wahrheit auch für die um 1 grössere Anzahl dargethan haben werden.

Bezeichnen wir also den Grad von $X_n$ in der vorgelegten Gleichung abermals durch $p$, die Ansteigungen in den aufeinanderfolgenden Coefficientenpaaren durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ....., wobei wir $\alpha > \beta > \gamma > \delta >$ ....., d. h. das offenbarte Gesetz als beobachtet annehmen, und führen

wir nun auch in diese Gleichung ein neues particuläres Integral ein, für welches die Grade von $M$, $N$ und $\varphi(x)$ wie früher durch $\mu$, $\nu$, $\sigma$ ausgedrückt sein mögen, so erhalten wir:

| $A$ | $B$ | $B - A$ |
|---|---|---|
| $\nu + p$ | .......... | $-(\nu + p)$ |
| $\nu + p + \alpha$ | $\nu + p + \sigma$ | $\sigma - \alpha$ |
| $\nu + p + \alpha + \beta$ | $\nu + p + \alpha + \sigma$ | $\sigma - \beta$ |
| $\nu + p + \alpha + \beta + \gamma$ | $\nu + p + \alpha + \beta + \sigma$ | $\sigma - \gamma$ |
| $\nu + p + \alpha + \beta + \gamma + \delta$ | $\nu + p + \alpha + \beta + \gamma + \sigma$ | $\sigma - \delta$ |
| $\nu + p + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$ | $\nu + p + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \sigma$ | $\sigma - \varepsilon$ |
| .............................. | .............................. | ...... |

Fiele nun z. B. $\sigma$ zwischen $\gamma$ und $\delta$, also $\gamma > \sigma > \delta$, so wären die Grade der neuen Coefficienten:

$$\begin{array}{l} \nu + p \\ \nu + p + \alpha \\ \nu + p + \alpha + \beta \\ \nu + p + \alpha + \beta + \gamma \\ \nu + p + \alpha + \beta + \gamma + \sigma \\ \nu + p + \alpha + \beta + \gamma + \sigma + \delta \\ \nu + p + \alpha + \beta + \gamma + \sigma + \delta + \varepsilon \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

und demzufolge die Ansteigungen in den aufeinanderfolgenden Coefficientenpaaren:

$$\alpha >, \quad \beta >, \quad \gamma >, \quad \sigma >, \quad \delta >, \quad \varepsilon >, \quad \dots\dots$$

Die Differenz $\sigma$ hat sich also in der That auf solche Weise eingeschoben, dass das ausgesprochene Gesetz neuerdings beobachtet erscheint.

Dieses Gesetz der Etiquette (so zu sagen), bezüglich der Aufeinanderfolge der Unterschiede in den Ordnungszahlen (Ansteigungen), bei dem Übergange von einem Coefficienten zum nächstfolgenden, wird demnach in einer Gleichung immer beobachtet erscheinen, so oft, bei Bildung derselben aus den particulären Integralen, in ihren Coefficienten keine zufälligen Aufhebungen der höchsten Potenzen vorkommen, durch welche in einzelnen Coefficienten eine niedrigere Ordnungszahl nach $x$ entstünde. Wenn es uns nun auch umgekehrt gelänge, zu zeigen, dass, so oft in einer Gleichung jenes Gesetz der Rangstellung ersichtlich ist, auch keine zufälligen Aufhebungen in den einzelnen Coefficienten vorgekommen sein können, so wäre es uns immer erlaubt, in einem solchen Falle aus den numerischen Werthen $\alpha, \beta, \gamma, \dots\dots \sigma$ der successiven Ansteigungen in den aufeinanderfolgenden Coefficientenpaaren, auf eben solche Werthe der Ordnungszahlen zu schliessen, welche den $\varphi(x)$ in den Expo-

nenten der verschiedenen particulären Integrale der Gleichung zukommen, unter der wohl festgehaltenen Voraussetzung jedoch, dass die Form $e^{\int \varphi(x)\,dx} Q$ die einzige sei, welche ein Ansteigen in den Anfangscoefficienten der zugehörigen Gleichung zu bewirken vermag, und dass daher aus dem Vorhandensein eines Ansteigens, das sich auf $(r+1)$ Anfangscoefficienten einer vorgelegten Gleichung erstreckt, auch umgekehrt auf ein nothwendiges Vorhandensein von $r$ zugehörigen particulären Integralen dieser Form geschlossen werden könne.

Eine Störung der erörterten Gesetzmässigkeiten durch zufällige Aufhebung der höchsten Potenzen in einzelnen Coefficienten einer vorgelegten Gleichung, bei Bildung derselben aus ihren particulären Integralen, kann nun evident niemals vorkommen, so oft in letzteren die Ordnungszahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma$ der $\varphi(x)$ genannten Grössen sämmtlich von einander verschieden sind, da, wenn eine unter $B - A$ stehende Differenz von Null verschieden ausfällt, die höchste Potenz nach $x$ nur in Einem Gliede des betreffenden Coefficienten erscheint. Sind aber unter jenen Ordnungszahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \sigma$ gruppenweise einander gleiche vorhanden, so würde jeder solchen etwa $h$gliedrigen Gruppe, eine Reihe von $(h+1)$ aufeinanderfolgenden Coefficienten entsprechen, deren successive Ordnungszahlen, wofern keine zufälligen Aufhebungen stattgefunden hätten, stets um dieselbe constante Differenz von einander verschieden wären, und es lässt sich nun sehr leicht zeigen: dass derlei zufällige Aufhebungen nur bei den $(h-1)$ Mittelgliedern einer solchen Coefficientengruppe, niemals aber beim Anfangs- und Endgliede derselben (die wir kürzehalber Grenzcoefficienten nennen wollen) vorgekommen sein können.

Um diesen Satz für den Fall zu erweisen, wenn eine Gleichung nur zwei particuläre Integrale besitzt, deren Exponenten $\varphi(x)$ von gleicher Ordnungszahl sind, brauchen wir nur in der obengeführten Deduction statt $\sigma$ eine der übrigen, von einander verschiedenen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ also etwa $\sigma = \gamma$ zu setzen und sehen unmittelbar, dass dann der dritte, vierte und fünfte Coefficient eine Gruppe bilden, in deren beiden Gliederpaaren, wofern keine zufälligen Aufhebungen der höchsten Potenzen stattfinden, ein gleich grosses Ansteigen um $\gamma$ Einheiten in der Ordnungszahl ersichtlich ist, ferner: dass eine derartige Aufhebung und sofortige Verkleinerung der Ordnungszahl nur im mittleren (vierten) Coefficienten der erwähnten Gruppe vorkommen kann, da nur für diesen die entsprechende unter $B - A$ erscheinende Differenz: $\sigma - \gamma$ der Nulle gleich ausfällt.

Es folgt hieraus, dass, wenn uns in einer Gleichung, z. B. der dritte und fünfte Coefficient als Grenzcoefficienten einer dreigliedrigen Gruppe bezeichnet würden, wir unmittelbar zu behaupten im Stande wären, dass in eben diesen, bei Bildung der Gleichung aus den particulären Integralen, keine zufälligen Aufhebungen der höchsten Potenzen stattgefunden haben können und wenn wir nun, ohne auf die Ordnungszahl des mittleren (vierten) Coefficienten überhaupt zu achten, den Unterschied in den Ordnungszahlen, etwa $2\gamma$, welcher zwischen den erwähnten Grenzcoefficienten stattfinden mag, auf die beiden in die Gruppe eingehenden Coefficientenpaare gleichmässig repartiren, so ersehen wir auch noch, dass die vorgelegte Gleichung gerade zwei particuläre Integrale besitzen müsse, deren $\varphi(x)$ der Ordnungszahl $\gamma$ angehören werden. Allgemein: wir werden, um die Ordnungs-

zahl $\gamma$ zu ermitteln, welche den Functionen $\varphi(x)$ in $h$ particulären Integralen einer vorgelegten Gleichung zukömmt, nur die zugehörige $(h+1)$ gliedrige Coefficientengruppe zu kennen und die Gewissheit zu besitzen brauchen, dass die Ordnungszahlen ihrer Grenzcoefficienten, bei Construirung der Gleichung, keine Verkleinerung erfahren haben können, indem, durch sofortige gleichmässige Repartition des Unterschiedes $h\gamma$ zwischen eben diesen Ordnungszahlen auf die einbegriffenen $h$ Coefficientenpaare, die Zahl $\gamma$ unmittelbar erhalten wird. Wir erfahren sogar, nach so vollbrachter Repartition, welche von den mittleren Coefficienten zufällige Aufhebungen ihrer höchsten Potenzen erfahren haben mögen und welche nicht, indem die Ordnungszahl der letzteren mit derjenigen übereinstimmen muss, die ihnen nach vorgenommener Repartition zugewiesen würde, während die Ordnungszahlen der ersteren um eben so viele Einheiten unter den durch die Repartition geforderten zurückbleiben werden, als höchste Potenzen in denselben durch Aufhebung verloren gegangen sind — der Fall, dass irgend einer der mittleren Coefficienten eine höhere Ordnungszahl besässe, als diejenige, die für denselben aus der Repartition des zwischen den beiden Grenzcoefficienten stattfindenden Unterschiedes in der Ordnungszahl hervorginge, würde der Voraussetzung, dass besagte Grenzcoefficienten Endglieder derselben Gruppe seien, widersprechen.

Es bleibt uns, um die allgemeine Nachweisung des obenaufgestellten Satzes zu vollenden, nur noch Ein Schritt zu thun übrig. Nehmen wir zu dem Ende eine Gleichung vor, in welcher der Reihe nach die Zahlen:

$$\begin{array}{l} p \\ p+\alpha \\ p+\alpha+\beta \\ [p+\alpha+\beta+\gamma] \\ [p+\alpha+\beta+2\gamma] \\ \dots\dots\dots\dots \\ [p+\alpha+\beta+(h-2)\gamma] \\ p+\alpha+\beta+(h-1)\gamma \\ p+\alpha+\beta+(h-1)\gamma+\delta \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

die Ordnungszahlen der successiven Coefficienten vorstellen sollen, so bemerken wir hier eine Gruppe von $h$ aufeinanderfolgenden Coefficienten, die uns auf das Vorhandensein einer Anzahl von $h-1$ particulären Integralen, deren $\varphi(x)$ sämmtlich der Ordnungszahl $\gamma$ angehören, einen Schluss gestatten mag. Unter dieser Voraussetzung nun und unter der weiteren Annahme, dass in dieser Gleichung dieselben Gesetzmässigkeiten beobachtet erscheinen, deren nothwendiges Stattfinden wir so eben für eine Gleichung dargethan haben, die nur zwei derlei particuläre Integrale besitzt — dass also, bei der Construirung der Gleichung aus ihren particulären Integralen, in keinem der beiden Grenzcoefficienten der erwähnten Gruppe, deren Ordnungszahlen hier beziehungsweise durch $p+\alpha+\beta$

und $p+\alpha+\beta+(h-1)\gamma$ bezeichnet sind, eine Aufhebung der mit der höchsten Potenz nach $x$ verknüpften Glieder stattgefunden haben könne, während die Ordnungszahlen der zwischenliegenden Coefficienten, die hier zu ihrer Unterscheidung eingeklammert wurden, durch derlei zufällige Aufhebungen eine Verringerungerlitten haben und demnach niedrigere, keinesfalls aber höhere Zahlenwerthe als die obenstehenden besitzen mögen — lässt sich unmittelbar darthun, dass die erwähnten Gesetzmässigkeiten sämmtlich auch in jener neuen Gleichung stattfinden müssen, die wir aus der vorgelegten erhalten werden durch Einführung eines neuen exponentiellen particulären Integrales, dessen $\varphi(x)$ gleichfalls der Ordnungszahl $\gamma$ angehört. In der That: haben $\mu$, $\nu$, $\sigma=\gamma$ die bereits früher gebrauchte Bedeutung, so erhalten wir:

| $A$ | $B$ | $B-A$ |
|---|---|---|
| $\nu+p$ | .......... | $-(\nu+p)$ |
| $\nu+p+\alpha$ | $\nu+p+\gamma$ | $\gamma-\alpha$ |
| $\nu+p+\alpha+\beta$ | $\nu+p+\alpha+\gamma$ | $\gamma-\beta$ |
| $\nu+[p+\alpha+\beta+\gamma]$ | $\nu+p+\alpha+\beta+\gamma$ | 0 |
| $\nu+[p+\alpha+\beta+2\gamma]$ | $\nu+[p+\alpha+\beta+\gamma]+\gamma$ | 0 |
| .......................... | .......................... | ...... |
| $\nu+p+\alpha+\beta+(h-1)\gamma$ | $\nu+[p+\alpha+\beta+(h-2)\gamma]+\gamma$ | 0 |
| $\nu+p+\alpha+\beta+(h-1)\gamma+\delta$ | $\nu+p+\alpha+\beta+(h-1)\gamma+\gamma$ | $\gamma-\delta$ |
| $\nu+p+\alpha+\beta+(h-1)\gamma+\delta+\varepsilon$ | $\nu+p+\alpha+\beta+h\gamma+\delta$ | $\gamma-\varepsilon$ |
| .......................... | .......................... | ...... |

Die Coefficienten der neuen Gleichung besitzen demnach der Reihe nach folgende Ordnungszahlen:

$$\nu+p$$
$$\nu+p+\alpha$$
$$\nu+p+\alpha+\beta$$
$$[\nu+p+\alpha+\beta+\gamma]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[\nu+p+\alpha+\beta+(h-1)\gamma]$$
$$\nu+p+\alpha+\beta+h\gamma$$
$$\nu+p+\alpha+\beta+h\gamma+\delta$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wodurch unser obenaufgestellter Satz vollständig erwiesen ist.

Es geht aus diesen Betrachtungen hervor, dass uns in einer vorgelegten Gleichung nur die Kenntniss derjenigen Coefficienten, die wir Grenzcoefficienten genannt haben, nöthig ist, um sowohl die Anzahl particulärer Integrale, denen $\varphi(x)$ von gleicher Ordnungszahl zukommen, als auch den numerischen Werth dieser Ordnungszahl selbst zu erfahren, indem wir dann nur den Unterschied in den

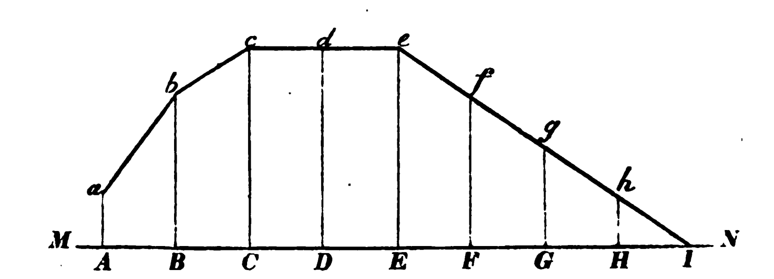
Ordnungszahlen zwischen je zwei nächstaufeinanderfolgenden Grenzcoefficienten zu bestimmen und auf die von denselben einbegriffenen Coefficientenpaare gleichmässig zu repartiren brauchen. Zur practischen Auffindung dieser Grenzcoefficienten dient aber folgendes einfache geometrische Verfahren:

Man construire auf einer geraden Linie und in gleichen Entfernungen von einander Ordinaten, deren Längen den Ordnungszahlen der aufeinanderfolgenden Coefficienten in der vorgelegten Gleichung proportional angenommen sind, verbinde die Endpunkte je zweier nächsten Ordinaten mit einander durch gerade Linien, und schneide von dem so erhaltenen Polygone alle einspringenden Winkel, wofern derlei vorhanden sind, weg, wodurch man ein neues Polygon erhält, dessen Seiten zwar nothwendig in Ordinatenendpunkten zusammentreffen, wohl auch durch andere solche Ordinatenendpunkte hindurchgehen, niemals aber, selbst verlängert nicht, irgend eine der Ordinaten durchschneiden werden — ein Problem, welches offenbar in jedem speciellen Falle nur eine einzige Auflösung zulässt. Die Ordinaten der successiven Durchschnittspunkte der Seiten gehören in derselben Ordnung den aufeinanderfolgenden Grenzcoefficienten an, die Repartition des zwichen diesen stattfindenden Unterschiedes in den Ordnungszahlen auf die zwischenliegenden Coefficientenpaare aber, wird hier graphisch ganz einfach, auf die Weise vollbracht, dass man die zu letztgenannten Coefficienten gehörigen Ordinaten bis zu den über diese hinweggehenden Seiten hinauf verlängert.

Wir wollen nunmehr die Anwendung der gegebenen Regeln an ein Paar Beispielen zeigen. Es seien also nacheinander:

$$1, \quad 3, \quad 4, \quad 4, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0,$$

die Ordnungszahlen der successiven Coefficienten in einer vorgelegten Gleichung (von der achten Ordnung), so construiren wir zuvörderst auf der Geraden $MN$ (siehe die nachstehende Figur):




und in den gleichen Abständen $AB = BC = CD = \ldots\ldots = HI$ von einander die Ordinaten $Aa$, $Bb$, $Cc$, ..... $Ii$, deren Längen den angegebenen Ordnungszahlen proportional angenommen sind. Verbinden wir nun je zwei nächste Endpunkte $a$, $b$, $c$, .... $i$ dieser Ordinaten durch Gerade, so erhalten wir die Polygonallinie $abceI$ und weil dieselbe gegen die $MN$ in ihrem ganzen Verlaufe concav ist, somit keine einspringenden Winkel besitzt, die Ansteigungen in den aufeinanderfolgenden Coefficientenpaaren daher streng nach dem erörterten Etiquettegesetze angereiht sind, so sehen wir unmittelbar, dass, bei Construirung der Gleichung aus ihren particulären Integralen, keinerlei zufällige

Aufhebungen der höchsten Potenzen nach $x$ in ihren Coefficienten stattgefunden haben können und schliessen demzufolge auch aus den numerischen Werthen:

$$2,\quad 1,\quad 0,\quad 0,\, -1,\, -1,\, -1,\, -1$$

dieser Ansteigungen, dass die Ordnungszahlen der $\varphi(x)$ genannten Functionen dieselben, oder — wenn wir vorziehen uns die einzelnen particulären Integrale in der Form $e^{\psi(x)}\,Q$ vorzustellen — die Ordnungszahlen der Exponenten $\psi(x)$ in den verschiedenen particulären Integralen der vorgelegten Gleichung beziehungsweise die Grössen:

$$3,\quad 2,\quad 1,\quad 1,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0$$

besitzen werden. Lassen sich also auch in der That sämmtliche particuläre Integrale der vorgelegten Gleichung auf die Form $e^{\psi(x)}\,Q$ bringen, und sind dann sämmtliche $\psi(x)$ algebraische und ganze Functionen nach $x$, so besitzt die Gleichung Ein particuläres Integral von der Form:

$$e^{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x}\,Q\,,$$

eben so, Ein particuläres Integral von der Form:

$$e^{\alpha x^2+\beta x}\,Q,$$

ferner zwei particuläre Integrale von der Form:

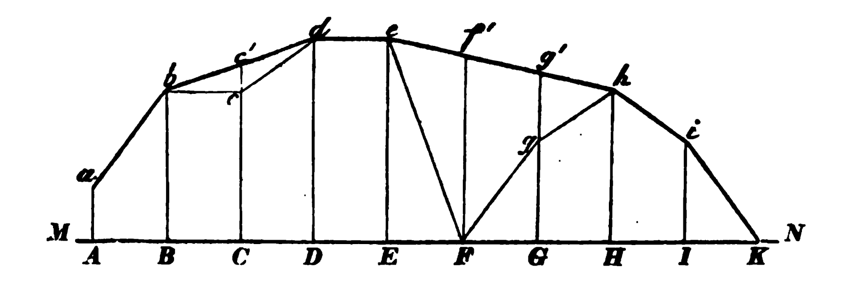
$$e^{\alpha x}\,Q$$

und endlich noch vier rein algebraische particuläre Integrale ohne alle exponentielle Factoren.

Es seien, in einem zweiten Beispiele, die Ordnungszahlen der Coefficienten in einer vorgelegten Gleichung nacheinander:

$$1,\quad 3,\quad 3,\quad 4,\quad 4,\quad 0,\quad 2,\quad 3,\quad 2,\quad 0.$$

Construiren wir auch diessmal auf ähnliche Weise das Polygon ***abcdeFghiK***,




so erhalten wir, indem wir die Linien ***bd*** und ***eh*** ziehen, ein neues Polygon ***abdehiK***, in welchem, wiewohl die Scheitel in lauter Ordinatenendpunkte fallen, doch keine einspringenden Winkel vorhanden sind und demnach keine Seite irgend welche Ordinaten durchschneiden wird. Wir sehen also unmittelbar, dass die Ordinaten: *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee*, *Hh* und (so schiene es für den ersten Anblick) auch *Ii* und $Kk = 0$ zu Grenzcoefficienten gehören und hätten nun die Höhenunterschiede zwischen je zwei

nächstaufeinanderfolgende solche Ordinaten auf die zwischenliegenden gleichmässig zu repartiren, zu welchem Ende die Ordinaten $Cc$, $Ff = 0$, $Gg$ beziehungsweise bis $Cc'$, $Ff'$, $Gg'$ verlängert werden müssen. Weisen wir nun den successiven Coefficienten der vorgelegten Gleichung jene Ordnungszahlen zu, welche durch die Glieder der neu erhaltenen Ordinatenreihe angedeutet sind, so bekommen wir für die Ansteigungen in den aufeinanderfolgenden Coefficientenpaaren die Zahlen:

$$2, \quad {}^1/_2, \quad {}^1/_2, \quad 0, \; -{}^1/_3, \; -{}^1/_3, \; -{}^1/_3, \quad -1, \quad -2,$$

und demzufolge, als Werthe für die Ordnungszahlen der Exponenten $\psi(x)$ in den verschiedenen particulären Integralen der vorgelegten Gleichung, beziehungsweise die Zahlen:

$$3, \quad {}^3/_2, \quad {}^3/_2, \quad 1, \quad {}^2/_3, \quad {}^2/_3, \quad {}^2/_3, \quad 0, \quad -1.$$

Der Werth — 1, den wir, genau nach der Regel vorgehend, als Ordnungszahl des letzten particulären Integrals bekommen würden, vermag demselben, nach den Eingangs dieses Paragraphen angestellten Betrachtungen, nicht mit Sicherheit beigelegt zu werden, und kann, wenn $\psi(x)$ eine ganze Function von $x$ sein soll, offenbar eben so gut durch den Werth 0 ersetzt werden, gegen den, auf Grund des stärkeren Abfallens im letzten Coefficientenpaare, keine Einsprache erhoben werden kann, weil im letzten Coefficienten bekanntlich jedesmal zufällige Aufhebungen der höchsten Potenzen möglich sind, so oft die vorgelegte Gleichung particuläre Integrale besitzt, deren $\psi(x)$ vom $0^{ten}$ oder negativem Grade sind, die also, zufolge (26), bei ihrer Einführung ein gegen $N$ um die Einheit in der Ordnungszahl niedrigeres $M$ hervorrufen.

Wir finden uns hier zu einer nicht unwichtigen Bemerkung veranlasst, bezüglich jener Erscheinungen, die durch solche zufällige Aufhebungen im letzten Coefficienten einer Gleichung hervorgerufen werden. Die, zum Stattfinden solcher Aufhebungen nothwendige, obenerwähnte Bedingung, bringt nämlich auch das nothwendige Erscheinen einer Coefficientengruppe am Ende des Gleichungspolynoms mit sich, in welcher, wofern solche Aufhebungen im letzten Coefficienten noch nicht eingetreten wären, auf jedes einbegriffene Coefficientenpaar ein repartirtes Abfallen im Betrage von Einer Einheit entfallen wird. Hat nun aber einmal das gelegentliche Eintreten zufälliger Aufhebungen im letzten Coefficienten eine Vermehrung der Gesammtzahl dieser Einheiten um weitere $\varepsilon$ Einheiten herbeigeführt, so trägt ein so erzeugtes stärkeres Abfallen denselben Character der Unverwischbarkeit an sich wie jenes, welches in der Gleichung durch das Vorhandensein der betreffenden particulären Integrale schon zufolge ihrer Form mit Nothwendigkeit verursacht wird. Man überzeugt sich hievon sehr einfach auf folgende Weise: Es seien in einer vorgelegten Gleichung $r$ particuläre Integrale vorhanden, die, schon allein vermöge ihrer Form, in den $r$ letzten Coefficientenpaaren ein repartirtes Abfallen je um Eine Einheit erzeugen, so ist $X_r$ der obere (an der Spitze des Abfalls stehende) Grenzcoefficient. Führen wir nun in diese Gleichung ein neues particuläres Integral ein, für welches $M$ und $N$ beziehungsweise die Ordnungszahlen $\mu$ und $\nu$ besitzen mögen, so ist, zufolge (26):

mit lauter rationalen Coefficienten auftreten können. Wiewohl nun die hiezu nöthigen Bedingungen erst später zur Sprache kommen können, so ist es doch möglich, schon an diesem Orte einen hiebei stattfindenden wichtigen Umstand zu erörtern. Es ist nämlich zuvörderst klar, dass, so wie die zu Anfang dieses Paragraphen geführten, so auch die darauffolgenden Untersuchungen für ganze und gebrochene Ordnungszahlen von $\varphi(x)$, also für particuläre Integrale mit rationalen oder irrationalen exponentiellen oder algebraischen Bestandtheilen in gleicher Weise gelten, da nichts im Wege steht, sich unter $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma$ auch gebrochene Zahlen vorzustellen, nur werden im letzteren Falle entweder einigen oder allen Coefficienten der Gleichung ebenfalls gebrochene Ordnungszahlen zufallen, diese Coefficienten selbst also irrational sein müssen. Soll demnach eine Differentialgleichung irrationale particuläre Integrale und nichts desto weniger auch lauter rationale Coefficienten besitzen, so muss in allen jenen Coefficienten, denen, (bei der Construirung des früher erwähnten Polygons aus den bekannten Gradzahlen der Exponenten in den einzelnen particulären Integralen welche der Gleichung zukommen sollen) gebrochene Ordnungszahlen zugewiesen würden, eine Aufhebung der höchsten Glieder, bezüglich eine Aufhebung der irrationalen Bestandtheile stattfinden, und hiezu ist, nebst anderen Bedingungen, deren Erörterung eben den §§. 9 u. s. w. überlassen bleibt, auch nothwendig, dass besagte Coefficienten keine Grenzcoefficienten seien, da in solchen, wie wir gesehen haben, niemals derlei Aufhebungen durch Addition vorkommen können. Wir finden hiedurch die Bemerkung bestätiget, die wir schon zu Anfange dieses Paragraphen ausgesprochen haben, nämlich: dass eine Gleichung mit lauter rationalen Coefficienten keine einzelnen irrationalen particulären Integrale von der Form (25) besitzen könne, aber noch mehr: Sollen nämlich Exponentialfunctionen mit $\psi(x)$ von gebrochener Ordnungszahl in einer Gleichung mit lauter rationalen Coefficienten als particuläre Integrale erscheinen können und ist $q$ der Nenner dieser Ordnungszahl, so muss besagte Gleichung deren $q$, oder $2q$, oder $3q$, .... oder allgemein $hq$ an der Zahl besitzen (unter $h$ eine ganze Zahl verstanden), da nur für eine solche Anzahl derartiger particulärer Integrale der Unterschied zwischen den Ordnungszahlen der Grenzcoefficienten in der entsprechenden Coefficientengruppe, und demnach die Ordnungszahlen beider Grenzcoefficienten selbst ganze Zahlen zu sein vermögen. Wir finden diese Bemerkung auch wirklich bei dem zweiten Beispiele bestätiget, in welchem sämmtliche Coefficienten von vorne herein als rational angenommen wurden, und wo in der That die Anwendung der Regel auf das Vorhandensein zweier particulärer Integrale schliessen lässt, in denen $\psi(x)$ dem Grade $^3/_2$ und dreier anderer, wo diese Grösse dem Grade $^2/_3$ angehört.

Wir bemerken nur noch, dass sich die sämmtlichen vorgetragenen Gesetzmässigkeiten auch in allen jenen Differentialgleichungen bestätigen, welche im vorigen zweiten Abschnitte der Integration unterworfen worden sind und wir heben aus ihnen namentlich die Differentialgleichung (160), Seite 78 heraus, deren allgemeines Integral unter (165) gegeben wurde, ferner die Riccati'sche Gleichung (256), Seite 106, für welche dasselbe unter (263) und (264) zu finden ist. Die particulären Integrale der im genannten Abschnitte behandelten Gleichungen gehören nun allerdings in der bei weitem grösseren Mehrzahl der Fälle einer anderen als der hier betrachteten Form, namentlich jener eines be-

stimmten Integrales, wie $\int_{u'}^{u''} e^{ux}\,V\,du$ an, allein so oft diese Form in speciellen Fällen, wo nämlich die Integration nach $u$ in endlicher Form möglich ist, in die offenbar hierher gehörige $e^{\alpha x} R$ übergeht, werden auch die durch ihr Stattfinden bedingten Erscheinungen in den Ordnungszahlen der Coefficienten der zugehörigen Gleichung in aller Strenge bestehen müssen.

## §. 7.

## Merkmale gebrochener Functionen im particulären Integrale.

Die angegebenen Criterien reichen zur Erkennung jedes positiven Grades von $\psi(x)$ in einem particulären Integrale von der Form $e^{\psi(x)} Q$ vollkommen aus, allein sie geben uns kein Mittel, um die Fälle, wo $\psi(x)$ und $Q$ ganze oder gebrochene Functionen nach $x$ sind, von einander zu unterscheiden. Die Kenntniss dieses Umstandes ist aber zur Erlangung einer genügenden Einsicht in die Natur derartiger particulärer Integrale gerade von besonderer Wichtigkeit, und wir müssen uns daher im Folgenden mit der Aufsuchung von Kennzeichen zur Erkennung eines in $\psi(x)$ oder $Q$ allenfalls vorhandenen Nenners beschäftigen.

Setzen wir also zuvörderst $\psi(x)$ als eine ganze Function, $Q$ aber als gebrochen und in dessen Nenner einen Factor wie $(x-\alpha)^k$ voraus. $y_1$ ist dann von der Form:

$$y_1 = \frac{Q}{(x-\alpha)^k}, \tag{27}$$

wo $Q$ vielleicht abermals eine gebrochene Function vorstellt, in deren Nenner aber kein Factor $x-\alpha$ mehr erscheinen wird. Zum Behufe der Einführung von $y_1$ in die vorgelegte Gleichung wird dasselbe $n$-mal zu differenziren sein, und bei jeder Differentiation einen weiteren Factor $x-\alpha$ im Nenner hinzubekommen. $P_1$ erhält hierdurch die Form:

$$P_1 = \frac{X_n Q_n + X_{n-1} Q_{n-1}(x-\alpha) + X_{n-2} Q_{n-2}(x-\alpha)^2 + \ldots + X_1 Q_1 (x-\alpha)^{n-1} + X_0 Q_0 (x-\alpha)^n}{(x-\alpha)^{k+n}}.$$

Wäre der Factor $(x-\alpha)$ bereits in einigen Anfangscoefficienten $X_n$, $X_{n-1}$, ..... vorhanden, so könnte sich der Factor $(x-\alpha)^r$ im Zähler und Nenner heben, und wir bekämen:

$$P_1 = \frac{R}{(x-\alpha)^q},$$

wo $q < k+n$, in $R$ aber kein Factor $x-\alpha$ mehr enthalten ist. Ganz in früherer Weise vorgehend erhalten wir:

$$\overline{N} = \overline{\phantom{xx}} R (x - \ldots$$

$N$ wird also den Factor $(x - \alpha)$ Einmal, $M$ aber gar nicht enthalten.

War in $X_n$ kein Factor $x - \alpha$ vorhanden, so wird letzterer im ersten Coefficienten der neuen Gleichung (12) Einmal, im nächstfolgenden gar nicht erscheinen. Hat dagegen $X_n$ bereits Einen Factor $x - \alpha$ besessen, so wird in den beiden ersten Coefficienten der neuen Gleichung derselbe nacheinander in der zweiten und ersten, in den folgenden aber in der $0^{ten}$ Potenz enthalten sein. Man erkennt sehr leicht, dass, nach Einführung von $r$ solchen particulären Integralen — in denen sämmtlich der Factor $x - \alpha$ im Nenner von $Q$, wenn auch zu verschiedenen Potenzen erhoben vorkommt — die $r$ ersten Coefficienten der Endgleichung, nach der Reihe, beziehungsweise Factoren:

$$(x - \alpha)^r, \quad (x - \alpha)^{r-1}, \quad (x - \alpha)^{r-2}, \quad \ldots\ldots \quad (x - \alpha)^1,$$

die folgenden aber keinen Factor $(x - \alpha)$ mehr besitzen werden.

Da $N$ auch alle Factoren von $R$ in sich enthält, so kann nicht umgekehrt behauptet werden, dass aus jedem Wurzelfactor wie $x - \alpha$ im höchsten Coefficienten einer vorgelegten Gleichung, auf das Vorhandensein eines Factors $(x - \alpha)^k$ im Nenner von $Q$ eines particulären Integrals geschlossen werden müsse. Glücklicherweise besitzen wir aber ein sehr einfaches Mittel zur Auffindung des Exponenten $k$, wodurch die, aus dem ebenerwähnten Umstande hervorgehende Unsicherheit meistentheils hinwegfällt.

In der That lässt sich der Werth von $k$ in dem einfachsten der vorkommenden Fälle, dem nämlich einer Gleichung der ersten Ordnung, mit Hilfe der wirklichen Integration ohne Müh bestimmen. Es sei nämlich in der Gleichung:

$$X_1 y' + X_0 y = 0 \tag{29}$$

der erste Coefficient $X_1$ mit dem Factor $x - \alpha$ versehen, so haben wir bekanntlich:

$$y = e^{-\int \frac{X_0}{X_1} dx} \tag{30}$$

und es ist zur wirklichen Auffindung des im Exponenten vorhandenen Integrals in der Reg Zerlegung in Partialbrüche nothwendig, deren Einer offenbar von der Form:

$$\frac{k}{x - \alpha}$$

sein wird. Um seinen Zähler $k$ zu ermitteln, multiplicirt man bekanntlich den zu zerlegen $\frac{X_0}{=}$ mit $x - \alpha$ und setzt dann $\alpha$ anstatt $x$ im Resultate der Multiplication. Hierdurch

$$Q_{n-1}\Big\}_\alpha = -(k+n-2)\,Q_{n-2}\Big\}_\alpha \tag{43}$$

und durch Substitution in die darauffolgende letzte:

$$Q_n\Big\}_\alpha = (k+n-1)(k+n-2)\,Q_{n-2}\Big\}_\alpha. \tag{44}$$

Wir erhalten durch Einführung dieser Werthe in die Gleichung (42):

$$\left\{\frac{X_n}{(x-\alpha)^2}(k+n-1)(k+n-2) - \frac{X_{n-1}}{x-\alpha}(k+n-2) + X_{n-2}\right\}_\alpha = 0. \tag{45}$$

Behandeln wir $\frac{X_n}{(x-\alpha)^2}$ und $\frac{X_{n-1}}{x-\alpha}$ nach den Regeln, die zur Ermittlung der unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden Ausdrücke dienen, so lässt sich diese letzte Gleichung auch folgendermassen darstellen:

$$\left\{X''_n(k+n-1)(k+n-2) - 2\,.\,X'_{n-1}(k+n-2) + 2.1\,.\,X_{n-2}\right\}_\alpha = 0. \tag{46}$$

Besässe endlich die gegebene Gleichung $r$ particuläre Integrale mit dem Factor $x-\alpha$ im Nenner, so bekämen wir durch Multiplication der Gleichung (36) mit $(x-\alpha)^{k+n-r}$:

$$\left\{\frac{X_n}{(x-\alpha)^r}Q_n + \frac{X_{n-1}}{(x-\alpha)^{r-1}}Q_{n-1} + \frac{X_{n-2}}{(x-\alpha)^{r-2}}Q_{n-2} + \ldots\ldots + \frac{X_{n-r+1}}{x-\alpha}Q_{n-r+1} + X_{n-r}\,Q_{n-r}\right\}_\alpha = 0 \tag{47}$$

und durch Substitution für $Q_n$, $Q_{n-1}$, $Q_{n-2}$, ..... $Q_{n-r+1}$ endlich:

$$\begin{aligned}\Big\{ & \frac{X_n}{(x-\alpha)^r}(k+n-1)\ldots(k+n-r) - \frac{X_{n-1}}{(x-\alpha)^{r-1}}(k+n-2)\ldots(k+n-r) + \\ & + \frac{X_{n-2}}{(x-\alpha)^{r-2}}(k+n-3)\ldots(k+n-r) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm \frac{X_{n-r+2}}{(x-\alpha)^2}(k+n-r+1)(k+n-r) \mp \frac{X_{n-r+1}}{x-\alpha}(k+n-r) \pm X_{n-r}\Big\}_\alpha = 0,\end{aligned} \tag{48}$$

oder in anderer Form:

$$\begin{aligned}\Big\{ & X_n^{(r)}(k+n-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(k+n-r) - r\,.\,X_{n-1}^{(r-1)}(k+n-2)\ldots(k+n-r) + \\ & + r(r-1)\,X_{n-2}^{(r-2)}(k+n-3)\ldots(k+n-r) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \mp r(r-1)\ldots\ldots\,3\,.\,2\;X'_{n-r+1}(k+n-r) \pm r(r-1)\ldots\ldots\,3\,.\,2\,.\,1\;X_{n-r}\Big\}_\alpha = 0.\end{aligned} \tag{49}$$

Man wird ohne Schwierigkeit erkennen, wie man vorzugehen habe, wenn in der vorgelegten Gleichung, ausser dem einzelnen oder wiederholten Factor $x-\alpha$, noch andere Wurzelfactoren im höchsten, oder in einigen der höchsten Coefficienten erscheinen. Wäre z. B.:

$x=\alpha$ in eine Summe unendlicher Grössen, deren gegenseitige Reduction auf die Nulle eben nur durch das Stattfinden der hierbetrachteten Gesetzmässigkeiten in den Coefficienten ermöglicht wird, in welcher ebenangedeuteten Beziehung wir auf diese und die vorhergehenden Untersuchungen noch an einem späteren Orte ausführlich zurückkommen wollen.

Da wir im nächsten Abschnitte, bei der Transformation der Gleichung zur Befreiung Eines particulären Integrals der hier vorausgesetzten Form von einem im Nenner desselben enthaltenen Factor $(x-\alpha)^k$, ohnedem eine Methode exponiren werden, die uns jeden einfachen Wurzelfactor und den ihm zugehörigen Exponenten $k$ im Nenner oder Zähler desselben finden lehrt, so wollen wir bei dem obenangeführten speciellen Falle nicht länger verweilen, indem wir uns vorerst mit den hier neuerlangten kritischen Hilfsmitteln begnügen.

## §. 8.

## Merkmale gebrochener Functionen im particulären Integrale.

(Fortsetzung und Schluss.)

So wie uns für den Fall, in welchem ein particuläres Integral von der Form $e^{\int\varphi(x)dx}\,Q$ mit einer algebraischen gebrochenen Function als Factor verknüpft ist, die Kenntniss jener Werthe von $x$ wünschenswerth erschien, welche den Nenner jener gebrochenen Function $Q$ auf Null bringen, weil wir so erfahren, für welche endlichen Werthe der unabhängigen Veränderlichen das fragliche particuläre Integral gelegentlich einen unendlichen Werth anzunehmen vermöge, so interessirt uns, wenn $\varphi(x)$ eine algebraische gebrochene Function von $x$ bedeutet, aus ähnlichen Gründen nicht minder die Kenntniss einzelner oder wiederholter Wurzelfactoren im Nenner dieser letzteren. Indem wir nun den Effect der Einführung eines derartigen particulären Integrals in eine vorgelegte Gleichung untersuchen wollen, setzen wir dasselbe von der Form:

$$y_1 = e^{\int\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m}dx} \tag{50}$$

voraus, und fassen somit, wenigstens so lange $m$ als eine positive Zahl gedacht wird, die gleich oder grösser ist als Eins, offenbar auch alle jene Fälle zusammen, in welchen ein particuläres Integral, ausserdem, dass es einen exponentiellen Bestandtheil mit einem Exponenten von gebrochener Beschaffenheit enthält, noch mit einer algebraischen, ganzen oder gebrochenen Function als Factor verknüpft ist, die, im letzteren Falle, selbst den Factor $(x-\alpha)^k$ im Nenner beherbergen mag. Denn es ist offenbar, dass man, die Function $\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m}$ in Partialbrüche zerlegend, gelegentlich auch Partialbrüche erhalten kann, die, mit $dx$ multiplizirt und integrirt, den Logarithmus einer algebraischen, ganzen oder gebrochenen Function ergeben, was dann nothwendig den erwähnten Fall herbeiführen wird. — Wir erhalten aber zur Bildung des bekannten $P_1$:

$$\frac{M}{N} = \frac{T}{x - \alpha} \tag{52}$$

erhalten würde, wenn $m$ zwar positiv aber kleiner als die Einheit wäre. Fassen wir nun zuvörderst den ersteren Fall ins Auge, indem wir uns zunächst überhaupt $m$ als eine ganze, positive Zahl vorstellen wollen, so sehen wir aus (51), dass $N$ den Factor $(x-\alpha)^m$, $M$ dagegen keinen Factor $x-\alpha$ erhalten wird. Wir gewinnen sofort aus dem blossen Anblicke der Gleichung (12) nachstehende Aufschlüsse über den Erfolg der Einführung Eines oder mehrer particulärer Integrale von der Form (50) in eine vorgelegte Gleichung:

1) Die Einführung eines einzigen particulären Integrals wie (50) in eine Gleichung, deren Coefficienten den Factor $x-\alpha$ noch nicht besassen, wird das nothwendige Erscheinen von $m$ Factoren $x-\alpha$ im ersten Coefficienten der neuen Gleichung zur Folge haben, welcher Factor $x-\alpha$ aber im zweiten und in der Regel auch in den nachfolgenden Coefficienten nicht weiter erscheinen wird.

2) Die abermalige Einführung eines zweiten particulären Integrals, von derselben Form und mit dem Factor $(x-\alpha)^p$ im Nenner seines $\varphi(x)$, in die eben erhaltene Gleichung, wird eine neue solche erzeugen, in welcher der Factor $x-\alpha$ und zwar in den zwei ersten Coefficienten auftreten wird. Um die Gleichung (12) zur Bestätigung dieser Behauptung und zur Ermittlung der Anzahl Factoren $x-\alpha$ in jedem einzelnen der beiden ersten Coefficienten zu benützen, müssen wir uns vorstellen, dass der Coefficient $X_n$ in der vorgelegten Gleichung bereits mit einem Factor $(x-\alpha)^m$, $N$ dagegen mit einem Factor $(x-\alpha)^p$ versehen sei und sehen nun unmittelbar dass im ersten Coefficienten $Z_{n+1}$ der neuen Gleichung der Factor $(x-\alpha)^{m+p}$ erscheinen wird. Der zweite Coefficient $Z_n = NX'_n + NX_{n-1} - MX_n$ wird gleichfalls den Factor $x-\alpha$ in jedem seiner Glieder und zwar beziehungsweise: $m+p-1$, $p$ und $m$-mal an der Zahl beherbergen. Da jedoch das ganze $Z_n$ offenbar nur durch so viele Factoren $x-\alpha$ theilbar erscheinen kann, als die kleinste der eben aufgeschriebenen Zahlen anzeigt, so kommt es darauf an, welche der beiden Grössen $m$ und $p$ (die wir uns beide als ganze, positive Zahlen denken) den kleineren numerischen Werth ausweist. Wäre also etwa $m > p$, so würden die Anzahlen der Factoren $x-\alpha$ in den aufeinanderfolgenden Coefficienten:

$$Z_{n+1}, \quad Z_n, \quad Z_{n-1}, \quad \dots\dots\dots\dots$$

der neuen Gleichung beziehungsweise durch die Werthe:

$$m+p, \quad p, \quad 0, \quad \dots\dots\dots\dots$$

auszudrücken sein, wogegen die besagten Coefficienten in derselben Ordnung Factoren $x-\alpha$ und zwar:

$$m+p, \quad m, \quad 0, \quad \dots\dots\dots\dots$$

an der Zahl aufweisen würden, wenn $m < p$ vorausgesetzt wird.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma - 1 \\ \quad \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma - 1 \\ \quad \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma \\ \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma - 1 \\ \quad \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma \\ \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma - 1 \\ \quad \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma \\ \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu \end{array}\right.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und es sind, wenn wir in jedem Coefficienten einzeln die kleinste, allen Gliedern gemei
Anzahl wiederholter Factoren hervorheben, in der That:

$$\begin{array}{r} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma \\ \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma \\ \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu + \sigma \\ \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu \\ \delta + \varepsilon + \cdots\cdots\cdots + \nu \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

die Anzahlen dieser Factoren in den aufeinanderfolgenden Coefficienten der neuen G
auch wirklich:

$$\alpha\,,\ > \beta\,,\ > \sigma\,,\ > \gamma\,,\ > \cdots\cdots\cdots > \nu$$

die Unterschiede dieser Anzahlen in den successiven Coefficientenpaaren.

Construirt man also, auf ähnliche Weise wie im vorletzten Paragra
und in gleichem Abstande von einander, senkrechte Ordinaten, deren Län
holter Factoren $x - \alpha$ in den aufeinanderfolgenden Coefficienten einer vorg
tional angenommen sind, so wird man, die Endpunkte besagter Ordina
gerade Linien verbindend, eine Polygonallinie erhalten, die in ihrem

auch gebrochene Werthe hervorgehen, was au...
der Art der (50) deuten würde, die aber im Exponenten unter dem Integ...
tionen mit irrationalen Nennern beherbergen. Die Möglichkeit des Vorkommens ... irrationaler particulärer Integrale in Differentialgleichungen mit lauter rationalen Coefficienten anlangend, kann auch hier bewiesen werden, dass sie wenigstens nicht einzeln in solchen Gleichungen erscheinen können. Denn denkt man sich alle übrigen rationalen particulären Integrale in eine offenbar gleichfalls rationale Gleichung vereinigt, und in diese letztere nun das noch übriggebliebene irrationale particuläre Integral eingeführt, so bekommen für dasselbe $M$ und $N$ irrationale Werthe, was offenbar eine rationale Beschaffenheit sämmtlicher Coefficienten der neu hervorgehenden Gleichung unmöglich macht. Es lässt sich dann ferner zeigen, dass, wenn eine Gleichung mit lauter rationalen Coefficienten eine Gruppe irrationaler particulärer Integrale dieser Art besitzen soll, in denen allen $m$ denselben gebrochenen Werth mit dem Nenner $q$ ausweist, die Anzahl dieser particulären Integrale ein Vielfaches von $q$ sein müsse, da nur in einem solchen Falle der besagten Gruppe particulärer Integrale eine Gruppe von Coefficienten in der Gleichung entsprechen wird, deren Grenzcoefficienten mit einer ganzen Anzahl von Factoren $x-\alpha$ versehen sind und demnach rational zu sein vermögen, während auch für die mittleren Coefficienten, aus der Aufhebung aller Glieder die mit gebrochenen Potenzen von $x-\alpha$ verknüpft sind, ganze Factorenzahlen und überhaupt eine rationale Beschaffenheit erwachsen kann, wozu aber noch überdiess andere Bedingungen zu erfüllen sind, die erst in den nachfolgenden Paragraphen zur Sprache kommen können.

Es ist noch nöthig den Fall zu erwähnen, wenn eine vorgelegte Gleichung particuläre Integrale der hier betrachteten Form besitzt mit gebrochenen Werthen von $m$ die kleiner sind als Eins. Die Anwesenheit solcher particulärer Integrale lässt sich aber offenbar nach den bisher gegebenen Criterien nicht erkennen, da ihre Einführung, zufolge (52), denselben Effect herbeiführt, wie die Einführung particulärer Integrale von der Art, die wir im vorigen Paragraphen der Betrachtung unterzogen haben, in denen nämlich nur der algebraische Bestandtheil mit einem den Factor $(x-\alpha)^k$ enthaltenden Nenner versehen ist. Es lässt sich indess hier gleich die doppelte Bemerkung anknüpfen, dass einerseits das so gestaltete particuläre Integrale die Eigenschaft nicht habe für $x=\alpha$ unendlich zu werden und dass andererseits, wie später nachgewiesen werden soll, das Vorkommen eines ähnlichen Falles sich durch den Werth des Exponenten $k$ in den meisten Fällen genügend verrathe, der einen sel... einfachen, negativen, gebrochenen, rein numerischen Werth erhält.

Um das Ganze noch schliesslich durch ein Beispiel zu belegen, so mögen die successiven ... fangscoefficienten einer vorgelegten Gleichung Factoren $x-\alpha$ beziehungsweise in folgenden Anza... besitzen:

$$8,\quad 6,\quad 5,\quad 7,\quad 2,\quad 2,\quad 1,\quad 3,\quad 0,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

...e Weise vorgehend, zuvörderst das Polygon $abcdefghI$ (si...

$$Z_{r+1} = NX'_{r+1} + NX_r - MX_{r+1}$$

der neue unterste Grenzcoefficient. Unter den gemachten Voraussetzungen wird nun offenbar in demselben der Factor $x-\alpha$ nur im dritten Gliede $MX_{r+1}$ und zwar Einmal enthalten sein, während er in den beiden anderen Gliedern $NX'_{r+1}$ und $NX_r$ nicht erscheint. Es könnte sonach möglicherweise in diesen beiden Gliedern eine gegenseitige Aufhebung sämmtlicher des Factors $x-\alpha$ ermangelnder Glieder eintreten, was dann eine Theilbarkeit des ganzen Coefficienten $Z_{r+1}$ durch Einen oder mehrere Factoren $x-\alpha$, also ein Auftreten dieses Factors in demselben zur Folge haben wird, welcher aber bei der Einführung fernerer particulärer Integrale wieder verloren gehen kann.

Gleichzeitig mit dem Erscheinen solcher zufälliger Factoren $x-\alpha$ macht sich aber auch in der letzten Coefficientengruppe ein Abfallen bemerkbar, welches weniger als Eine Einheit auf das Coefficientenpaar ergibt, und welches also, wo es auftritt, keinen sicheren Rückschluss auf das Vorhandensein von particulären Integralen mit dem Factor $x-\alpha$ im Nenner von $\varphi(x)$ gestattet. Denn es stellt sich aus den geführten Untersuchungen klar heraus, dass das hier dargelegte Verfahren nur solche Exponenten $m$ zu verrathen vermöge, welche positiv und grösser oder gleich Eins sind, oder mit anderen Worten: für welche $\int \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m}\,dx$, wenn $x=\alpha$ gesetzt wird, einen unendlichen Werth bekömmt; für andere Werthe von $m$, bei denen das genannte Integral nur eine Unterbrechung seiner Stetigkeit erleidet, fällt allerdings auch ein Factor $x-\alpha$ in die Coefficienten der Differentialgleichung, allein nicht auf eine Weise, welche die Unterscheidung derselben im Detail möglich machen würde. Überhaupt ist als allgemeine Regel anzunehmen, dass der Coefficientenbau einer Differentialgleichung, in Bezug auf die allgemeinen bisher betrachteten Kennzeichen des Ansteigens oder Abfallens in der Ordnungszahl und die Reihenfolge der einfachen Factoren von der Form $x-\alpha$, Nichts als das Verhalten der successiven Differentialquotienten der einzelnen particulären Integrale wiedergebe und das zwar für solche endliche oder unendliche Werthe der unabhängigen Veränderlichen, die das betreffende particuläre Integral oder irgend Einen seiner Differentialquotienten unendlich machen. Wenn hiebei wesentlich von einander verschiedene Functionsformen, wie z. B. algebraische und gewisse Exponentiellen, beim successiven Differenziren sich auf einerlei Weise benehmen, wenn nämlich, bei der einen sowohl als bei der anderen, die successiven Differentialquotienten sich als je um die Einheit in der Ordnungszahl höhere, oder je um die Einheit in der Ordnungszahl niederere unendliche Grössen gestalten, so sind die hier in Rede stehenden, von so verschiedenartigen Functionsformen den Coefficienten aufgeprägten Merkmale dieselben und ihre Unterscheidung kann nur mit Hilfe einer tiefer gehenden Analysis, die die versteckteren Merkmale aufdeckt und von der wir einige Fingerzeige bereits gegeben haben, erfolgen.

$$L\psi^r + M\psi^{r-1} + N\psi^{r-2} + \ldots\ldots + W = 0,$$

in der die Coefficienten: $L, M, N, \ldots\ldots W$ lauter algebraische, rationale und ganze Functionen von $x$ sind, und welcher die $r$ Wurzeln $\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots \psi_r$ zukommen mögen, die nun offenbar auch Functionen von $x$, aber irrationale, sind, so wird zwar der Ausdruck (53), als particuläres Integral in eine Gleichung eingeführt, dieselbe irrational machen; setzt man aber anstatt $\psi$ und seiner sämmtlichen Differentialquotienten der Reihe nach alle ihnen zukommenden Werthe, $r$ an der Zahl, und bezeichnet man die $r$ verschiedenen Ausdrücke in $x, \psi, \psi', \psi'', \ldots\ldots$, die auf diese Weise aus der $\varphi$ genannten rationalen Function derselben hervorgehen, der Kürze wegen, mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_r$, so werden die irrationalen Exponentialausdrücke:

$$(55)\qquad y_1 = e^{\int \varphi_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int \varphi_2 dx}, \quad \ldots\ldots \quad y_r = e^{\int \varphi_r dx},$$

sämmtlich und gleichzeitig in die vorliegende rationale Gleichung eingeführt, eine um $r$ Einheiten in der Ordnungszahl höhere aber rationale Differentialgleichung liefern, deren Coefficienten als rationale Functionen der rationalen $L, M, N, \ldots\ldots W$ erscheinen.

Zuvörderst lässt sich darthun, dass sämmtliche Differentialquotienten: $\psi', \psi'', \ldots\ldots$ sich rational durch $\psi$ und $x$ ausdrücken lassen, denn man gewinnt, die Gleichung (54) differenzirend, zunächst für $\psi'$ folgenden rationalen Werth:

$$\psi' = -\frac{L'\psi^r + M'\psi^{r-1} + \ldots\ldots + W'}{rL\psi^{r-1} + (r-1)M\psi^{r-2} + \ldots\ldots} = T_1,$$

sodann durch abermalige Differentiation $\psi''$ in der Form:

$$\psi'' = \psi' T_2 = T_1 T_2,$$

wo $T_2$, sowie $T_1$, zwar gebrochen aber rational sind nach $x$ und $\psi$. Geht man so fort, so erhält man für $\psi'''$; $\psi^{IV}, \ldots\ldots$ lauter gebrochene aber rationale Ausdrücke in $x$ und $\psi$. Es lässt sich daher die Function $\varphi$ offenbar auch als eine rationale Function von $x$ und $\psi$ ansehen, welche die Differentialquotienten der letzteren Grösse nicht mehr in sich enthält und es werden sich sohin nicht nur alle symmetrischen Functionen der Wurzeln $\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots \psi_r$ rational durch die Coefficienten der Gleichung (54) ausdrücken lassen, sondern auch alle symmetrischen Functionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_r$ eben weil alle solche symmetrische Functionen der letzteren auch rationale symmetrische Functionen der ersteren sind, und die $r$ Werthe von $\varphi$ werden aus einer ähnlichen Gleichung des $r^{ten}$ Grades hervorgehen, wie die (54), die man jedesmal nach den in der Theorie der algebraischen Gleichungen vorkommenden Vorschriften zu bilden im Stande sein wird. Der aufgestellte allgemeine Satz wird daher bewiesen sein, wenn wir nur darthun können, dass die in eine rationale Differentialgleichung eingeführten particulären Werthe (55) dieselbe rational erhalten, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_r$ Wurzeln sind

nach einer solchen Weglassung übrigbleibende Gleichung abermals mit zweiwerthigen Coefficienten versehen, die gar keine Exponentielle mehr enthalten, also algebraisch sind, nach $\varphi$ und $x$ rational aussehen und die Eigenschaft besitzen, bei einer jeden Vertauschung zweier verschiedener $\varphi$ untereinander, welche lediglich auf eine Vertauschung der Stellenzeiger hinausläuft, das Zeichen zu ändern, d. h. die Coefficienten sind zweiwerthige Functionen der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_r$.

Hebt man nun diesen Character der Zweiwerthigkeit irgendwie auf, indem man entweder durch irgend Einen der Gleichungscoefficienten wegdividirt oder mit Einem derselben oder auch einer anderen zweiwerthigen Function der $\varphi$ multiplicirt — einer zweiwerthigen Function, die bei Vertauschungen auch nur das Zeichen zu ändern vermag — so erhält man offenbar eine Gleichung mit Coefficienten, welche symmetrische Functionen sind der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_r$ und sohin auch rationale Functionen der rationalen Coefficienten jener algebraischen Gleichung, die die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_r$ zu Wurzeln hat, also rationale Functionen von $x$, was zu erweisen war.

Man sieht bei diesen Betrachtungen abermals ganz klar, dass eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten isolirte irrationale particuläre Integrale, erscheinend unter der allgemeinen Form $e^{\int \varphi dx}$, wo $\varphi$ irrational ist, nicht besitzen könne; dass, wenn $\varphi$ Wurzelgrössen in sich enthalten soll, namentlich: Quadratwurzeln, dritte Wurzeln, vierte Wurzeln, ..... in der rational vorausgesetzten Gleichung particuläre Integrale vorhanden sein müssen beziehlich mindestens 2, 3, 4, ... an der Zahl; dass, wenn jemand eine rationale Differentialgleichung zu sehen wünscht, der ein particuläres Integral $e^{\int Q dx}$ Genüge leistet, wo $Q$ eine gegebene Irrationalfunction nach $x$ ist, diesem seinem Wunsche entsprochen werden könne dadurch, dass man die Gleichung $Q = \varphi$ hinstellt, sie durch Potenziren rational macht, die dadurch erhaltene höhere algebraische Gleichung in $\varphi$ mit rationalen Coefficienten auflöst und nun nicht Ein, sondern mehrere particuläre Integrale in eine Gleichung vereinigt, so viele nämlich, als das $\varphi$ Werthe bekommen hat. So wird man z. B. in einer Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten nie das einzelne particuläre Integral:

$$e^{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$$

unter den Genüge leistenden Werthen finden, wohl aber können rationale Differentialgleichungen existiren, denen eine Summe wie:

$$C_1\, e^{x + \sqrt{a^2 - x^2}} + C_2\, e^{x - \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Genüge leistet, unter $C_1$ und $C_2$ willkürliche Constanten verstanden, eben weil die Exponenten dieser beiden Exponentialgrössen, als Wurzeln, einer algebraischen Gleichung des zweiten Grades mit rationalen Coefficienten angehören. Endlich muss offenbar der Fall irrationaler particulärer Integrale als der allgemeinere betrachtet werden und der andere von rationalen solchen, als der specielle in ihm enthaltene, wenn sich nämlich die verschiedenen Wurzelausziehungen wirklich vollbringen lassen, gerade so, wie der Fall eines ganz regelmässigen Coefficientenbaues mit ganzen Ansteigungszahlen, der nach

unseren Untersuchungen den rationalen Formen angehört, ein specieller Fall der ganz beliebigen mannigfaltigen Gestaltung derselben ist.

Eine Bemerkung wollen wir hier noch anknüpfen zu Gunsten derjenigen, die geneigt wären geschlossene Formeln für die particulären Integrale der höheren Differentialgleichungen aufzusuchen, oder ihre Unmöglichkeit zu erweisen: es geht nämlich aus unseren Untersuchungen hervor, dass, wenn solche geschlossene Formeln überhaupt existiren, diess nur bis zu den Gleichungen der vierten Ordnung inclusive in aller Strenge stattfinden könne, aus der einfachen Ursache, weil auch die algebraischen Gleichungen nur bis zum vierten Grade eine Auflösung durch geschlossene algebraische Formeln zulassen. Da nämlich eine Differentialgleichung, die z. B. der vierten Ordnung angehört, particuläre Integrale zu haben vermag, die die vier Wurzeln einer Gleichung des vierten Grades in sich enthalten, so muss offenbar in der gesuchten allgemeinen Formel, so sie vorhanden ist, auch dieser specielle Fall einbegriffen sein; somit werden in ihr nothwendigerweise auch diese vier Wurzeln erscheinen, und ebenso für eine Differentialgleichung von der fünften Ordnung, bei welcher die allgemeine Formel die Wurzeln einer algebraischen Gleichung des fünften Grades in sich beherbergen sollte, die bekanntlich in geschlossener Form nicht vorhanden sind. Streng genommen wird man daher auch keine geschlossenen Formeln für die particulären Integrale der Differentialgleichungen, die den vierten Grad übersteigen, zu erwarten haben; mindestens werden diese nicht explicit sein können und man wird sich dieselben höchstens so vorstellen mögen, dass die Form der particulären Integrale gegeben ist, die noch eine gewisse Function $\varphi$ in sich schliesst, welche letztere als Wurzel einer höheren algebraischen Gleichung erklärt wird, die ebenfalls gegeben ist.

## §. 10.

## Differentialgleichungen der zweiten Ordnung mit irrationalen particulären Integralen.

Um nun zu näheren Aufschlüssen über den Bau der Differentialgleichungen mit irrationalen particulären Integralen zu gelangen, wollen wir hier einige Beispiele anführen und namentlich zuvörderst diejenige Gleichung der zweiten Ordnung construiren, deren allgemeines Integral:

$$y = C_1\, e^{\int \varphi_1 dx} + C_2\, e^{\int \varphi_2 dx} \tag{58}$$

ist, unter $\varphi_1$ und $\varphi_2$ die beiden Wurzeln der algebraischen Gleichung des zweiten Grades:

$$L\,\varphi^2 + M\,\varphi + N = 0 \tag{59}$$

verstanden. — Die zu diesem Zwecke einzuleitende Rechnung bietet keinerlei Schwierigkeiten dar. Man setzt nämlich:

$$y_1 = e^{\int \varphi_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int \varphi_2 dx}, \tag{60}$$

und bekömmt durch Differenziren sogleich:

$$(61)\qquad \begin{aligned} y'_1 &= e^{\int \varphi_1 dx}\,\varphi_1, & y'_2 &= e^{\int \varphi_2 dx}\,\varphi_2,\\ y''_1 &= e^{\int \varphi_1 dx}\,(\varphi_1^2 + \varphi'_1), & y''_2 &= e^{\int \varphi_2 dx}\,(\varphi_2^2 + \varphi'_2), \end{aligned}$$

bemerkt sodann, dass die Differentialgleichung, welche die particulären Integrale $y_1$ und $y_2$ hat, in derjenigen Form, in der wir sie im I. Abschnitte, §. 4 auffanden, d. h. mit zweiwerthigen Coefficienten, die folgende sei:

$$(62)\qquad [y_1\, y'_2 - y'_1\, y_2]\, y'' - [y_1\, y''_2 - y''_1\, y_2]\, y' + [y'_1\, y''_2 - y''_1\, y'_2]\, y = 0,$$

oder, in Folge der Werthe (60) und (61) und mit Hinweglassung des allen Gliedern gemeinschaftlichen, exponentiellen Factors: $e^{\int(\varphi_1+\varphi_2)dx}$, der offenbar nach $\varphi_1$ und $\varphi_2$ symmetrisch ist:

$$(63)\qquad (\varphi_2 - \varphi_1)\, y'' - (\varphi_2^2 - \varphi_1^2 + \varphi'_2 - \varphi'_1)\, y' + (\varphi_2^2\, \varphi_1 - \varphi_1^2\, \varphi_2 + \varphi_1\, \varphi'_2 - \varphi_2\, \varphi'_1)\, y = 0.$$

Die zweiwerthige Beschaffenheit der Coefficienten fällt hier in die Augen. Wir gestalten sie in symmetrische um dadurch, dass wir alle Glieder mit $\varphi_2 - \varphi_1$ multipliziren, wodurch wir erhalten:

$$(64)\qquad \begin{aligned} &(\varphi_2 - \varphi_1)^2\, y'' - [(\varphi_2 - \varphi_1)^2\, (\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_1\, \varphi'_1 + \varphi_2\, \varphi'_2 - (\varphi_1\, \varphi'_2 + \varphi_2\, \varphi'_1)]\, y'\\ &\qquad + [\varphi_1\, \varphi_2\, (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \varphi_1\, \varphi_2\, (\varphi'_1 + \varphi'_2) - (\varphi_1^2\, \varphi'_2 + \varphi_2^2\, \varphi'_1)]\, y = 0. \end{aligned}$$

Endlich drücken wir die einzelnen symmetrischen Functionen, die hier vorkommen, durch die Coefficienten $S$ und $T$ der Gleichung:

$$(65)\qquad \varphi^2 + S\varphi + T = 0$$

aus, welche aus der (59) hervorgeht, wenn man für einen Augenblick $\frac{M}{L} = S$, $\frac{N}{L} = T$ setzt. Wir erhalten ohne Mühe:

$$(66)\qquad \begin{aligned} &\varphi_1 + \varphi_2 = -S, \quad \varphi_1\, \varphi_2 = T, \quad (\varphi_2 - \varphi_1)^2 = S^2 - 4T,\\ &\varphi'_1 + \varphi'_2 = -S', \quad \varphi_1\varphi'_2 + \varphi_2\varphi'_1 = T', \quad \varphi_1\varphi'_1 + \varphi_2\varphi'_2 = SS' - T', \quad \varphi_1^2\varphi'_2 + \varphi_2^2\varphi'_1 = TS' - ST' \end{aligned}$$

und unsere Differentialgleichung sieht jetzt so aus:

$$(67)\qquad (S^2 - 4T)\, y'' + [S\,(S^2 - 4T) - SS' + 2T']\, y' + [T\,(S^2 - 4T) - 2TS' + ST']\, y = 0,$$

oder, wenn wir anstatt $S$ und $T$ die $L$, $M$, $N$ wieder zurückführen:

$$(68)\qquad \begin{aligned} &L\,(M^2 - 4LN)y'' + [M\,(M^2 - 4LN) - M\,(M'L - L'M) + 2L\,(N'L - L'N)]\, y'\\ &\qquad + [N\,(M^2 - 4LN) + M\,(N'L - L'N) - 2N\,(M'L - L'M)]\, y = 0. \end{aligned}$$

Die unmittelbare Ansicht dieser Gleichung veranlasst uns nun zu folgenden Bemerkungen:

Erstens. Wenn die in der algebraischen Gleichung (59) vorkommenden Coefficienten $L$, $M$ und $N$, in Rücksicht ihrer Ordnungszahlen, ein Fortschreiten im Niveau offenbaren, d. h. wenn sie alle drei, oder auch nur die beiden äussersten, $L$ und $N$ nämlich, von demselben Grade nach $x$ sind, so findet dasselbe auch in der Differentialgleichung statt.

Zweitens. Wenn in der algebraischen Gleichung irgend ein Ansteigen von dem ersten Coefficienten $L$ zum zweiten $M$, oder zum dritten $N$ zu gewahren ist, welches, auf die zwei Coefficientenpaare repartirt, eine ganze oder gebrochene, jedesmal mit dem Nenner 2 versehene Repartitionszahl liefert, so wird sich dasselbe Ansteigen, in derselben Art und mit derselben Repartitionszahl, auch in der Differentialgleichung wiederfinden, so dass dasselbe Polygon, das, nach §. 6 construirt, nach Wegschneiden aller einspringenden Winkel, den Coefficientenbau in der Differentialgleichung wiedergibt, auch jenen in der algebraischen Gleichung und umgekehrt darstellt, und so sehen wir denn, dass die in einer Differentialgleichung bei der Repartition der Ansteigungen gelegentlich gewonnenen Brüche und namentlich die Halben, ihr Dasein dem Vorkommen von irrationalen particulären Integralen verdanken können, in denen die vorhandenen Wurzelgrössen aus der Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades gezogen sind. Wiewohl nun aber gebrochene Repartitionszahlen auf irrationale particuläre Integrale immer den Schluss verstatten, so kann man doch aus dem Nichtvorhandensein der ersteren auf das Nichtvorhandensein der letzteren keineswegs schliessen, weil die in der algebraischen Gleichung vollkommen befolgte Etiquette, ohne die irrationale Beschaffenheit der Wurzeln zu beeinträchtigen, sich auch ebenso vollständig auf die Differentialgleichung überträgt und wir sind sohin genöthigt, den Fall der irrationalen Auflösungen als den allgemeinen, jenen der rationalen aber als den in ihm enthaltenen speciellen anzusehen.

Drittens. Auch ein Abfallen von $L$ auf $M$ und $N$ in der Ordnungszahl, welches vom ersten auf den letzten dieser Coefficienten gerade Eine Einheit und somit auf jedes Coefficientenpaar die gebrochene Zahl $\frac{1}{2}$ ergibt, findet sich in der Differentialgleichung wieder. Es wird daher ein Abfallen dieser Art, wenn es in irgend einer Differentialgleichung vorkömmt, ebenfalls auf irrationale particuläre Integrale schliessen lassen, die in sich die Wurzeln einer algebraischen Gleichung beherbergen können wie (59), in welcher $M$ mindestens um die Einheit, $N$ aber gerade um die Einheit niederer ist als $L$.

Viertens. Findet sich in der algebraischen Gleichung ein stärkeres Abfallen als um die halbe Einheit in der Ordnungszahl für Ein Coefficientenpaar, so ist solches in voller Congruenz in der Differentialgleichung nicht nothwendig mehr wiederzufinden. Wenn z. B. von $L$ auf $M$ zwei Einheiten, und von $M$ auf $N$ wieder zwei Einheiten Abfall vorhanden wären, so bemerkt man in der Differentialgleichung vom ersten auf den zweiten Coefficienten einen Abfall von Einer Einheit, vom zweiten auf den dritten aber einen von drei Einheiten in der Ordnungszahl und eben so, wenn in der algebraischen Gleichung, allgemein, vom ersten auf den zweiten Coefficienten ein Abfall von wenigstens $\delta$ Einheiten, vom ersten auf den dritten Coefficienten aber einer von $2\delta$ Einheiten vorhanden wäre, der also, auf die beiden Coefficientenpaare repartirt, auf jedes derselben die gleiche Anzahl von $\delta$ Einheiten liefert, so gewahrt man in der Differentialgleichung vom ersten auf den zweiten Coefficienten in der Regel nur einen Abfall von Einer Einheit, vom zweiten auf den dritten aber einen von $\delta + 1$ Einheiten und diess zwar in Folge einer in diesem Falle stattfindenden Aufhebung des zu $M\,(N'L - L'N) - 2N\,(M'L - L'M)$ gehörigen höchsten Gliedes, von der sich der Leser selbst

ohne Schwierigkeit überzeugen kann. Diese Aufhebung nun, von deren Möglichkeit schon im §. 6 die Rede war, gestaltet sich, bei dem Vorhandensein zweier particulärer Integrale von der Form (60), bei denen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ einerlei und zwar negativen Ordnungszahlen angehören, als Regel. Da aber der nun einmal irgendwie durch Aufheben der höchsten Coefficienten erzeugte jähere Abfall, durch die Einführung von ferneren particulären Integralen nicht mehr aufgehoben werden kann, wie schon eben im §. 6 bemerkt worden ist, so gestaltet sich ein ähnliches, in der vorgelegten Differentialgleichung etwa vorfindiges, mehr als Eine Einheit auf das Coefficientenpaar ausweisendes Abfallen, als Merkmal wahrscheinlicher solcher particulärer Integrale, die denselben Ordnungszahlen angehörige Werthe von $\varphi$ in sich schliessen. Die Differentialgleichungen, welche den binomischen algebraischen von der Form: $\varphi^n + M = 0$ angehören, dienen in der That dazu diese Wahrnehmung zu bekräftigen — und diess sind die Bemerkungen, die wir aus unserer Differentialgleichung ableiten, indem wir einzig und allein auf die Ordnungszahlen der Coefficienten Rücksicht nehmen.

Da wir nun aber wissen, dass in der Regel der erste Coefficient in der Gleichung auch mancherlei Aufschlüsse über die Beschaffenheit der particulären Integrale darbietet, und namentlich alle diejenigen Werthe von $x$ verräth, für welche irgend Eines derselben unendlich wird, so machen wir, um zu einer zweiten Reihe ebenso wichtiger Bemerkungen zu gelangen, darauf aufmerksam, dass die aufgelöste algebraische Gleichung (59) die in folgender einzigen Formel enthaltenen Werthe von $\varphi_1$ und $\varphi_2$ liefere:

$$\varphi = -\frac{M}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{M^2 - 4LN}. \tag{69}$$

Vergleicht man hiermit den ersten Coefficienten der in diesem Paragraphe gewonnenen Differentialgleichung, nämlich: $L\,(M^2 - 4LN)$, so sieht man allsogleich, dass derselbe zusammengesetzt sei: Erstens, aus all' denjenigen einfachen Factoren, welche auch der Gleichung $L = 0$ zukommen und die, auf Null gebracht, Einen der beiden Werthe von $\varphi$ unendlich machen und zweitens auch aus denjenigen Factoren, die der Gleichung $M^2 - 4LN = 0$ angehören und bei deren Verschwinden $\varphi_1$ und $\varphi_2$ von reell imaginär oder umgekehrt werden, oder auch ihre Beschaffenheit gar nicht ändern und nur $\varphi_1 = \varphi_2$ wird. Um nun die Exponenten numerisch zu bestimmen, zu welchen die einzelnen, im ersten Gleichungscoefficienten nur Einmal erscheinenden Factoren, in den einzelnen, particulären Integralen erhoben vorkommen, dividirt man bekanntlich den zweiten Coefficienten durch den ersten, zerlegt den so erhaltenen Bruch in Partialbrüche und subtrahirt von jedem Zähler eines solchen die um Eins verminderte Ordnungszahl der Gleichung; der Rest ist der gesuchte Exponent des betreffenden Factors, der im Nenner vorhanden gedacht wird. Verfahren wir hier auf dieselbe Weise, so bietet sich uns zunächst folgender Bruch dar:

$$\frac{M(M^2 - 4LN) - M(M'L - L'M) + 2L(N'L - L'N)}{L(M^2 - 4LN)} = \frac{M + L'}{L} - \frac{\tfrac{1}{2}(M^2 - 4LN)'}{M^2 - 4LN}. \tag{70}$$

Ist nun $x - \alpha$ ein einzelner in $L$ enthaltener Factor, so wird man, zur Ermittlung des ihm zugehörigen Exponenten, diesen Bruch mit $x - \alpha$ multipliziren, dann aber $x = \alpha$ setzen. Hierdurch

verwandelt sich der erste, im zweiten Theile der Gleichung (70) ersichtliche Bestandtheil desselben in $\frac{0}{0}$, der zweite in 0; der numerische Werth des Symbols $\frac{0}{0}$ wird aber hier auf die gewöhnliche Weise gefunden und gibt, um die Einheit verringert, den zu $x-\alpha$ gehörigen Exponenten: $\left.\frac{M}{L'}\right\}_{\alpha}$, welcher derselbe ist, der auch einem einzigen rationalen particulären Integrale mit eben diesem Factor $x-\alpha$ im Nenner entsprechen kann, so dass sich also nach den Ergebnissen dieser Untersuchungen keineswegs mit Sicherheit entscheiden lässt, ob ein solcher Factor zu einem einzelnen rationalen particulären Integrale, oder zu einer Gruppe von irrationalen solchen gehöre.

Dieses Vorhandensein von nur einem einzigen Factor $x-\alpha$ im ersten Coefficienten, während er doch, scheinbar wenigstens, in den Nennern zweier particulärer Integrale vorkömmt, hört auf uns zu befremden, wenn wir bedenken, dass gleichwohl nur ein einziges derselben für $x=\alpha$ unendlich werden kann, weil in diesem Falle von den beiden Werthen von $\varphi$, die die Gleichung (69) liefert, auch nur ein einziger für $x=\alpha$ einen unendlichen Werth bekömmt. Eine Ausnahme hievon zeigt sich, wenn der in $L$ Einmal vorhandene Factor $x-\alpha$ auch dem $M$ Einmal zukömmt; dann enthalten nämlich beide Werthe von $\varphi$ die Quadratwurzel aus diesem Factor im Nenner und der zu demselben gehörige, auf die hier vorgetragene Weise gewonnene Exponent, hört auf den Werth $\left.\frac{M}{L'}\right\}_{\alpha}$ zu besitzen, sondern gewinnt, in Folge der auftauchenden Theilbarkeit der Gleichung (68) durch $x-\alpha$, den Werth $-\frac{1}{2}$, der, wiewohl er seinen Ursprung auch gelegentlich einem einzelnen particulären Integrale mit rationaler Exponentielle verdanken kann, doch mit überwiegender Wahrscheinlichkeit auf eine Gruppe von zweien irrationalen hinweist.

Ist hingegen $x-\alpha$ ein Factor von $M^2-4LN$ und man sucht den dazu gehörigen Exponenten, so erhält man, genau auf die eben beigebrachte Weise verfahrend, die einfache Bruchzahl $-\frac{3}{2}$. Es ist nun freilich wahr, dass derselbe gebrochene Werth, als Exponent von $x-\alpha$, auch einem einzelnen particulären Integrale mit rationaler Exponentielle zukommen könne, allein es ist diess offenbar ein höchst seltener Fall und man wird in der Regel aus dem Vorkommen solcher Exponenten wie $-\frac{3}{2}$, auch wenn die repartirten Ordnungszahlen der Coefficienten in der Differentialgleichung keine Brüche in sich enthalten, auf die Möglichkeit irrationaler particulärer Integrale schliessen, und zwar namentlich solcher, die Irrationalgrössen, hervorgegangen aus der Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades, d. h. Quadratwurzeln enthalten; ja, es wird überdem noch dieser einfache Bruch $-\frac{3}{2}$ gelegentlich Zeugniss geben von einer, bei dem Werthe $x=\alpha$ vor sich gehenden, Formänderung von reell in imaginär oder umgekehrt, respective von einem Periodischwerden des betreffenden particulären Integrals.

Nun ist noch übrig das Verhalten der im ersten Coefficienten der Differentialgleichung vorkommenden wiederholten Factoren zu untersuchen. Wir werden bei denjenigen anfangen, die zu $L$ gehören. Nun überzeugt man sich aber sehr leicht, dass, wenn z. B. $(x-\alpha)^2$ dem $L$ als Factor angehörig und $M$ gar nicht durch $x-\alpha$ theilbar ist, auch in der Differentialgleichung der erste Coefficient zwei Factoren $x-\alpha$ habe und der zweite gar keinen. Hätte hingegen $L$ solcher Factoren zwei, $M$ aber Einen, so wird die Differentialgleichung durch $(x-\alpha)^2$ theilbar, und die neue, aus der Divi-

aus hervorgehende Gleichung, trägt auch im ersten Coefficienten zwei Factoren $x-\alpha$, im zweiten aber Einen. Überhaupt kann man sagen, dass dasselbe, nach Wegschneiden der ausspringenden Winkel erhaltene, nach §. 8 construirte Polygon, welches der algebraischen Gleichung (59) angehört, auch der Differentialgleichung (68) zukomme.

Anders verhält es sich mit den in $M^2-4LN$ gelegentlich vorkommenden wiederholten Factoren. Diese liefern nämlich, insofern als sie weder dem $M$ noch dem $L$ angehören, ob einfach oder wiederholt das ist gleichgiltig, zu dem ersten Coefficienten der gehörig abgekürzten Differentialgleichung, immer nur höchstens einen einzigen Factor dieser Art. Diess ist vorzüglich klar und ganz unmittelbar ersichtlich bei derjenigen Differentialgleichung, die der binomischen algebraischen:

$$\varphi^2+N=0 \tag{71}$$

entspricht und die man aus der (68) erhält, wenn man $L=1$, $M=0$ setzt. Diese Differentialgleichung ist:

$$2N.y''-N'.y'+2N^2.y=0 \tag{72}$$

und es lehrt ihre unmittelbare Ansicht, dass, wenn $(x-\alpha)^m$ ein Factor von $N$ ist, eine sofortige Abkürzung durch $(x-\alpha)^{m-1}$ Platz greife, nach welcher dem ersten Coefficienten nur Ein Factor $x-\alpha$, dem zweiten aber gar keiner verbleiben wird. Es liesse sich hier noch die Bemerkung hinzufügen, dass der dritte Coefficient Factoren $x-\alpha$, und zwar $m+1$ an der Zahl erhalte und dass ihr Vorhandensein als Merkmal der binomischen Gleichungen gelten könnte, wenn ihm nicht der nothwendige Character der Unverwischbarkeit abgehen würde. Jede Einführung nämlich eines neuen particulären Integrals setzt, wie der Anblick der oftgenannten Gleichung (12) lehrt, die Anzahl der Factoren $x-\alpha$ in diesem letzten Coefficienten mindestens um Eins herab und veranlasst so gelegentlich ihre gänzliche Aufhebung. Einzelne oder wiederholte Factoren unter dem Wurzelzeichen der Irrationalgrössen würden sich demnach gar nicht von einander unterscheiden, wenn der ihnen zugehörige Exponent nicht wäre, den der eben gebrauchte Zerlegungsprocess in Partialbrüche für dieselben liefert, und der, auf den gegenwärtigen Fall angewendet, einen Exponenten:

$$k=-\frac{N'}{2N}\,(x-\alpha)\Big\}_\alpha-1 \tag{73}$$

ergibt, zu dessen numerischer Berechnung, bei dem Vorhandensein von $m$ verschwindenden Factoren $x-\alpha$ im Zähler und Nenner des hier vorkommenden Bruches, ein $m$-maliges Differenziren des einen und anderen vorzunehmen ist, welches, durchgeführt, ohne Mühe zu:

$$k=-\frac{m+2}{2} \tag{74}$$

führt, so dass sich also die Factoren, welche unter dem Wurzelzeichen:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \dots\dots\dots\quad m$$

durch $(x-\alpha)^{m-1}$ theilbar und der erste Coefficient der abgekürzten neuen Gleichung bekömmt nun mit Nothwendigkeit einen einzigen Factor $x-\alpha$, der im zweiten Coefficienten hingegen nicht erscheint.

Um nun den zu $x-\alpha$ gehörenden Exponenten $k$ zu ermitteln, machen wir Gebrauch von der Gleichung (70), in Folge deren:

$$k = -\frac{(M^2-4LN)'}{2(M^2-4LN)}(x-\alpha)\Big\}_\alpha - 1 \tag{81}$$

ausfällt und auf dieselbe Weise, wie in dem früher betrachteten einfacheren Falle sich:

$$k = -\frac{m+2}{2} \tag{82}$$

ergibt, so dass also die vollständige Identität der analytischen Erscheinungen hier und dort nachgewiesen ist.

Es bliebe uns hier noch der Fall zu erörtern übrig, wo der Ausdruck $M^2-4LN$, nebst denjenigen Factoren $x-\alpha$, die aus $L$ und $M$ stammen, überschüssige eigene besitzt — ein Fall, der offenbar nur dann vorkommen kann, wenn $r$ die Anzahl der in $M$ und $2r$ die der in $L$ enthaltenen ist, unter $r$ jede beliebige ganze positive Zahl verstanden. Unter solchen Umständen ist es nämlich möglich, dass dieser Ausdruck mehr als $2r$ solche Factoren gewinnt, etwa $2r+s$. Eine nähere Untersuchung des Verhaltens der Differentialgleichung überzeugt uns aber von der Theilbarkeit derselben durch $2r+s$ Factoren dieser Art, so, dass also eben diese überschüssigen $s$ Factoren beinahe spurlos aus der Differentialgleichung entschwunden, und nur durch die wirkliche Integration der Differentialgleichung wieder zu entdecken sind. Der Fall endlich, wo solche Factoren nicht nur in $L$ und $M$, sondern auch in $N$ vorhanden sind, verdient hier keine Beachtung, weil er eine vorgängige Division durch eine gewisse Anzahl Factoren $x-\alpha$ ermöglicht und erheischt.

Obwohl nun alle die hier angestellten Betrachtungen nur eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung zum Gegenstande haben, so wird es doch jedem aufmerksameren Leser bereits klar geworden sein, dass die hier zur Sprache gebrachten Merkmale insgesammt den Character der Unverwischbarkeit an sich tragen und dass die Einführung von noch so vielen neuen particulären Integralen die, hier aus der ähnlichen Erscheinung in der algebraischen Gleichung auf die Differentialgleichung Übertragene des Ansteigens oder Abfallens, nur eben zu verschieben, aber nicht aufzuheben, den Werth von $k$ aber nicht zu ändern vermag. Jeden Zweifel daran wird ein aufmerksameres Durchgehen von den in §. 7 enthaltenen Lehren zerstreuen, aus denen erhellet, dass der, dem gewissen Zähler des Partialbruches zu Theil werdende Zuwachs um die Einheit bei jeder Erhöhung der Differentialgleichung ebenfalls um die Einheit in der Ordnungszahl, gar nicht an die Bedingung rationaler dort vorkommender $M$ und $N$ gebunden sei, dass wir also, bei jeder Differentialgleichung, von beliebiger Ordnung, wenn zwei ihrer particulären Integrale aus der Auflösung einer rationalen algebraischen Gleichung hervorgehende Wurzelgrössen beherbergen, denselben Erscheinungen, wie die hier ausführlich auseinandergesetzten, noth

## §. 11.

## Differentialgleichungen der dritten Ordnung mit irrationalen particulären Integralen.

Die nicht unbedeutenden Aufschlüsse, die wir im vorhergehenden Paragraphe erhalten haben über die Natur der Differentialgleichungen, deren particuläre Integrale Irrationalgrössen enthalten, hervorgegangen aus der Auflösung einer rationalen, algebraischen Gleichung des zweiten Grades, d. h. Quadratwurzeln, bestimmen uns zur Fortsetzung dieser Untersuchung, also zunächst zur Construction einer Differentialgleichung der dritten Ordnung, deren particuläre Integrale die drei Wurzeln einer algebraischen und rationalen Gleichung vom dritten Grade in sich enthalten. Die damit verknüpften Rechnungen machen, ihrer Weitläufigkeit wegen, jede mögliche Abkürzung wünschenswerth. Der Leser möge daher, um nicht in undurchführbare Massen von analytischen Entwicklungen zu gelangen und die vorzüglichsten, theils zur Abkürzung, theils zur Controlle solcher Rechnungen dienlichen Kunstgriffe kennen zu lernen, mit uns folgenden Weg einschlagen: Die gesuchte Differentialgleichung, in der Form, wie sie direct durch das bekannte Eliminationsverfahren, also mit zweiwerthigen Coefficienten, erzeugt wird, mit Auslassung jedoch der allen Gliedern als Factor gemeinschaftlichen Exponentialgrösse, sei:

$$X_3\, y''' + X_2\, y'' + X_1\, y' + X_0\, y = 0; \tag{83}$$

ihre particulären Integrale seien:

$$y_1 = e^{\int \varphi_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int \varphi_2 dx}, \quad y_3 = e^{\int \varphi_3 dx}, \tag{84}$$

$\varphi_1$, $\varphi_2$ und $\varphi_3$ aber die Wurzeln einer Gleichung des dritten Grades, vorderhand nur einer solchen ohne der zweiten Potenz der Unbekannten:

$$\varphi^3 + A\varphi + B = 0, \tag{85}$$

die Rechnungen werden sich nämlich mit dieser Gleichung bequemer durchführen lassen und der Übergang von diesem nur scheinbar speciellen Falle, zu dem allgemeinen einer Gleichung:

$$L\,\varphi^3 + M\,\varphi^2 + N\,\varphi + O = 0$$

bietet keine Schwierigkeit. Es wird nun darauf ankommen, die successiven Coefficienten $X_3$, $X_2$, $X_1$, $X_0$ der gesuchten Differentialgleichung der Berechnung zu unterwerfen und zugleich die Verwandlung derselben in symmetrische Functionen, durch Multiplication mit einer schicklich gewählten zweiwerthigen Function zu bewirken. Wir bekommen dieselben zunächst als Functionen der Wurzeln $\varphi_1$, $\varphi_2$ und $\varphi_3$, zuletzt aber als Ausdrücke in $A$ und $B$ und ihrer Differentialquotienten; unserer Rechnung liegen daher die, diesen letzteren gleichgeltenden, symmetrischen Functionen der Wurzeln zu Grunde, nämlich:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0, \quad \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3 = A, \quad \varphi_1\varphi_2\varphi_3 = -B. \tag{86}$$

Setzen wir:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = s, \quad \varphi_1\varphi_2 = p, \tag{87}$$

so wird:

$$\varphi_3 = -s, \quad A = p - s^2, \quad B = ps, \tag{88}$$

wegen hiezu vorzüglich brauchbare $G$, mit welchem wir, diese Gleichung multiplizirend, symmetrische Formen erhalten:

$$GX_2 = G^2 + 3\,G\,(\varphi_1\,\varphi'_2 - \varphi_2\,\varphi'_1). \tag{98}$$

Nun rechnen wir zuvörderst $G^2$ und führen zu diesem Zwecke, anstatt der $\varphi_1$ und $\varphi_2$, $p$ und $s$ ein. Die hierdurch gewonnenen Ausdrücke in $p$ und $s$ setzen wir in solche nach $s$ allein um, indem wir $p$ mittelst der Gleichung:

$$p = A + s^2, \tag{99}$$

siehe die Gleichungen (88) eliminiren. Sollten wir hiebei auf dritte oder höhere Potenzen von $s$ stossen, so eliminiren wir auch diese mittelst der Gleichung (89). $G^2$ kann so offenbar nur als ein $s$ und $s^2$ enthaltender Ausdruck erscheinen, aus welchem, da $G^2$ symmetrisch, $s$ und $s^2$ aber dreiwerthig sind, die mit dem Buchstaben $s$ verbundenen Glieder sich von selbst wegheben werden, indem sie die Nulle zum Coefficienten erhalten. Diese Einführung von Grössen in die Rechnung, von welchen man aus bestimmten Gründen im Voraus weiss, dass sie im Resultate nicht enthalten sind, ist eine der zweckmässigsten Massregeln der Controlle grösserer analytischer Entwicklungen. Es ist so in der Gleichung (96):

$$(\varphi_2^3 - \varphi_1^3) = (\varphi_2 - \varphi_1)\,(\varphi_2^2 + \varphi_1\,\varphi_2 + \varphi_1^2) = (\varphi_2 - \varphi_1)\,(s^2 - p),$$

also:

$$\begin{aligned} G &= (\varphi_2 - \varphi_1)\,(2\,s^2 + p), \\ G^2 &= (s^2 - 4p)\,(2\,s^2 + p)^2 = -\,(3\,s^2 + 4\,A)\,(3\,s^2 + A)^2, \end{aligned} \tag{100}$$

weil

$$(\varphi_2 - \varphi_1)^2 = \varphi_2^2 + \varphi_1^2 - 2\,\varphi_1\,\varphi_2 = s^2 - 4\,p = -\,(3\,s^2 + 4\,A)$$

ist. Durch Hinausschaffen der höheren Potenzen von $s$ wird endlich:

$$G^2 = -\,4\,A^3 - 27\,B^2. \tag{101}$$

Auf ähnliche Weise verfahren wir bei der Berechnung dés zweiten Bestandtheils von $GX_2$, nämlich:

$$3G(\varphi_1\varphi'_2 \quad \varphi_2\varphi'_1) = 3(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1)(2s^2 + p) = (6s^2 + 3p)\big(\varphi_1\varphi_2(\varphi'_1 + \varphi'_2) - (\varphi_1^2\varphi'_2 + \varphi_2^2\varphi'_1)\big). \tag{102}$$

Nun ist aber, mit Rücksicht auf die Gleichungen (87):

$$\varphi_1\,\varphi_2\,(\varphi'_1 + \varphi'_2) = ps', \qquad \varphi_1^2\,\varphi'_2 + \varphi_2^2\,\varphi'_1 = p's - ps',$$

und somit:

$$3\,G\,(\varphi_1\,\varphi'_2 - \varphi_2\,\varphi'_1) = (6\,s^2 + 3\,p)\,(2\,ps' - p'\,s) = (9\,s^2 + 3\,A)\,(2\,As' - A'\,s).$$

Durch Wegschaffung des $s'$ mit Zuhilfenahme der Gleichung:

$$3\,s^2\,s' = -\,A'\,s - As' + B', \tag{103}$$

welche aus der Gleichung (89) durch Differentiation unmittelbar hervorgeht, und indem wir diese letztere abermals zur Wegschaffung von $s^2$ benützen, bekommen wir endlich:

$$3\,G\,(\varphi_1\,\varphi'_2 - \varphi_2\,\varphi'_1) = 6\,AB' - 9\,A'B, \tag{104}$$

ist, eine Reihe von Gleichungen, in welchen, so wie in den (92), die vorkommenden Buchstaben, mit den Stellenzeigern 1, 2 und 3 versehen, die successiven Differentialquotienten der Genüge leistenden particulären Integrale darstellen. Diess vorausgesetzt, substituiren wir in der Gleichung (83), deren erste zwei Coefficienten bereits gefunden sind, zuerst $y_1$, dann $y_2$, endlich $y_3$ anstatt $y$, wodurch sie jedesmal identisch wird und erhalten, den exponentiellen Factor jedesmal weglassend:

$$\eta_1^{(3)} X_3 + \eta_1^{(2)} X_2 + \eta_1^{(1)} X_1 + \eta_1 X_0 = 0$$
$$\eta_2^{(3)} X_3 + \eta_2^{(2)} X_2 + \eta_2^{(1)} X_1 + \eta_2 X_0 = 0$$
$$\eta_3^{(3)} X_3 + \eta_3^{(2)} X_2 + \eta_3^{(1)} X_1 + \eta_3 X_0 = 0.$$

Addirt man nun diese drei identischen Gleichungen, und bemerkt, dass die Coefficienten der durch Addition erhaltenen, symmetrische Functionen sind von $\varphi_1$, $\varphi_2$ und $\varphi_3$ und dass namentlich, wegen:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 = \varphi''_1 + \varphi''_2 + \varphi''_3 = 0,$$
$$(111)\qquad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = -2A, \quad \varphi_1\varphi'_1 + \varphi_2\varphi'_2 + \varphi_3\varphi'_3 = -A', \quad \varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \varphi_3^3 = -3B,$$

alsogleich erhalten wird:

$$\eta_1^{(3)} + \eta_2^{(3)} + \eta_3^{(3)} = \varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \varphi_3^3 + 3(\varphi_1\varphi'_1 + \varphi_2\varphi'_2 + \varphi_3\varphi'_3) + \varphi''_1 + \varphi''_2 + \varphi''_3 = -3(A'+B),$$
$$(112)\qquad \eta_1^{(2)} + \eta_2^{(2)} + \eta_3^{(2)} = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 = -2A,$$
$$\eta_1^{(1)} + \eta_2^{(1)} + \eta_3^{(1)} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0,$$

so kommen wir zu der einfachen Relation:

$$3(A' + B) X_3 + 2AX_2 - 3X_0 = 0,$$

aus der unmittelbar der Werth des Einen der gesuchten Coefficienten hervorgeht:

$$(113)\qquad GX_0 = (A' + B)\, GX_3 + \frac{2}{3} A \cdot GX_2,$$

der nach gehöriger Substitution der für $GX_3$ und $GX_2$ bereits gefundenen Werthe, übergeht in:

$$(114)\qquad GX_0 = B(-4A^3 - 27B^2) + 24ABB' - 36A'B^2 - 9A'^2B + 8AA'B' + 6AA''B - 4A^3B'' + \\ + \frac{A(6A^2A' + 27BB')(4AB' - 6A'B)}{4A^3 + 27B^2}.$$

Den letzten noch übrigen Coefficienten $GX_1$ erhalten wir vermittelst einer ähnlichen, auf folgende Weise zu entwickelnden Beziehungsgleichung: Wir differenziren zuvörderst die (83) und bekommen:

$$(115)\qquad X_3 y^{IV} + (X'_3 + X_2) y''' + (X'_2 + X_1) y'' + (X'_1 + X_0) y' + X'_0 y = 0,$$

multipliziren ferner die eben erhaltene mit $G$, die (83) aber mit $G'$ und addiren. Diess gibt:

$$(116)\qquad GX_3 \cdot y^{IV} + [(GX_3)' + GX_2] y''' + [(GX_2)' + GX_1] y'' + [(GX_1)' + GX_0] y' + (GX_0)' y = 0.$$

Mit dieser Gleichung verfahren wir nun eben so, wie mit der (83) bei Berechnung von $GX_0$ und erhalten, den drei gemachten Substitutionen entsprechend, folgende drei identische Gleichungen:

schen Functionen vervollständigen, zusammenstellend, durch Benützung der Werthe (111) und Berechnung der nachfolgenden symmetrischen Functionen auf die Jedermann bekannte Weise:

$$\varphi_1^2 \varphi_2 \varphi_3 + \varphi_2^2 \varphi_3 \varphi_1 + \varphi_3^2 \varphi_1 \varphi_2 = 0\,, \quad \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_3 + \varphi_2^2 \varphi_3 + \varphi_2^2 \varphi_1 + \varphi_3^2 \varphi_1 + \varphi_3^2 \varphi_2 = 3B\,, \tag{125}$$

und sodann für unseren zu ermittelnden Ausdruck den Werth:

$$\varphi_1' \varphi_2' + \varphi_1' \varphi_3' + \varphi_2' \varphi_3' = \frac{A^2 A'^2 + 9 A' B B' - 3 A B'^2}{4 A^3 + 27 B^2}, \tag{126}$$

mit dessen Hilfe wir aus (122) gewinnen:

$$\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2 = \frac{-2 A^2 A'^2 - 18 A' B B' + 6 A B'^2}{4 A^3 + 27 B^2}. \tag{127}$$

Um endlich zum Werthe von $\varphi_1 \varphi_1'' + \varphi_2 \varphi_2'' + \varphi_3 \varphi''$ zu gelangen, differenziren wir die Gleichung:

$$\varphi_1 \varphi_1' + \varphi_2 \varphi_2' + \varphi_3 \varphi_3' = -A'$$

und erhalten:

$$\varphi_1 \varphi_1'' + \varphi_2 \varphi_2'' + \varphi_3 \varphi_3'' = -A'' - (\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2).$$

Die letzte der hier vorkommenden symmetrischen Functionen ist uns ihrem Werthe nach bereits aus der eben durchgeführten Rechnung unter (127) bekannt; wir haben demnach:

$$\varphi_1 \varphi_1'' + \varphi_2 \varphi_2'' + \varphi_3 \varphi_3'' = -A'' + \frac{2 A^2 A'^2 + 18 A' B B' - 6 A B'^2}{4 A^3 + 27 B^2} \tag{128}$$

und in Folge dieser Werthe ist endlich zuvörderst:

$$\eta_1^{(4)} + \eta_2^{(4)} + \eta_3^{(4)} = 2 A^2 - 6 B' - 4 A'' + \frac{2 A^2 A'^2 + 18 A' B B' - 6 A B'^2}{4 A^3 + 27 B^2} = H \tag{129}$$

und sodann, mit Zuziehung der Gleichungen (112), die gesuchte, aus der Addition der (117) hervorgehende Relation:

$$H \,.\, GX_2 - 3 (A' + B) \left[(GX_2)' + GX_2\right] - 2 A \left[(GX_1)' + GX_1\right] + 3 (GX_0)' = 0, \tag{130}$$

die uns zu dem letzten der gesuchten Coefficienten $GX_1$ verhilft, für den wir zuvörderst folgende Formel erhalten:

$$2 A \,.\, GX_1 = H \,.\, GX_2 - 3 (A' + B) \left[(GX_2)' + GX_2\right] - 2 A (GX_2)' + 3 (GX_0)', \tag{131}$$

dann aber, nach gehöriger Einführung der für $GX_2$ und $GX_0$ bereits ermittelten Werthe (108) und (113), von denen der letztere durch Substitution aus (108) auch so wiedergegeben werden kann:

$$GX_0 = \left[A' + B + \frac{2}{3} A \frac{GG'}{G^2}\right] GX_2 - \frac{2}{3} A (GX_2)', \tag{132}$$

zunächst zu folgender Formel gelangen:

$$2 A \,.\, GX_1 = \left[H + 3 A'' + 3 B' - (A' + 3 B) \frac{GG'}{G^2}\right] GX_2 + (A' + 3 B) (GX_2)'. \tag{133}$$

Alle die bisherigen Rechnungen beziehen sich auf die algebraische Gleichung:

$$\varphi^3 + A\,\varphi + B = 0, \tag{144}$$

in der die zweite Potenz der Unbekannten fehlt. Wollte man diejenige Differentialgleichung haben, die der allgemeinen algebraischen:

$$L\Phi^3 + M\Phi^2 + N\Phi + O = 0 \tag{145}$$

entspricht, so könnte man letztere aus der ersteren als dadurch hervorgegangen ansehen, dass anstatt $\varphi$ geschrieben wird: $\Phi + \frac{M}{3L}$, wodurch sie zunächst übergeht in:

$$L\Phi^3 + M\Phi^2 + \left(AL + \frac{M^2}{3L}\right)\Phi + \frac{M^3}{27\,L^2} + \frac{1}{3}\,AM + BL = 0, \tag{146}$$

worauf:

$$N = AL + \frac{M^2}{3L}, \qquad O = \frac{M^3}{27\,L^2} + \frac{1}{3}\,AM + BL \tag{147}$$

angenommen wird, und:

$$A = \frac{N}{L} - \frac{M^2}{3\,L^2}, \qquad B = \frac{O}{L} - \frac{MN}{3\,L^2} + \frac{2\,M^3}{27\,L^3} \tag{148}$$

hervorgeht. Hiemit zusammenhängend wird man sich auch die neue gesuchte Differentialgleichung aus der bereits gewonnenen dadurch hervorgegangen denken können, dass zuvörderst $\varphi$ um $\frac{M}{3L}$ vermindert, oder, mit andern Worten, in $\Phi$ verwandelt wird, was man durch Multiplication sämmtlicher particulärer Integrale mit der Exponentialgrösse:

$$e^{-\int \frac{M}{3L} dx}$$

bewerkstelliget, die durch Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen vermittelst der Substitution:

$$z = y \,.\, e^{-\int \frac{M}{3L} dx} \tag{149}$$

erreicht wird, sodann aber in dem Substitutionsresultate die für $A$ und $B$ eben ermittelten Werthe (148) einführt. Diese hier angedeuteten Rechnungsoperationen leiten aber zu einer Differentialgleichung, die ihrer Weitläufigkeit wegen die nöthige Übersicht nicht gewährt. Wir beschränken uns daher auf die letztangedeutete Substitution, bei der wir den Bruch $\frac{M}{L}$ durch den einzelnen Buchstaben $S$ ersetzen, die Coefficienten aber der zu transformirenden Gleichung wie bisher mit $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_0$ bezeichnen, unter der Voraussetzung, dass:

$$S = \frac{M}{L}, \qquad A = \frac{N}{L} - \frac{M^2}{3\,L^2}, \qquad B = \frac{O}{L} - \frac{MN}{3\,L^2} + \frac{2\,M^3}{27\,L^3} \tag{150}$$

gedacht wird. Das so erhaltene Resultat ist:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_3 \,.\, z''' + z''\left[\mathfrak{X}_2 + S\,\mathfrak{X}_3\right] \\ &\quad + z'\left[\mathfrak{X}_1 + \frac{2}{3}\,S\,\mathfrak{X}_2 + \frac{1}{3}\,(S^2 + 3\,S')\,\mathfrak{X}_3\right] \\ &\quad + z\left[\mathfrak{X}_0 + \frac{1}{3}\,S\,\mathfrak{X}_1 + \frac{1}{9}\,(S^2 + 3\,S')\,\mathfrak{X}_2 + \frac{1}{27}\,(S^3 + 9\,SS' + 9\,S'')\,\mathfrak{X}_3\right] = 0. \end{aligned} \tag{151}$$

nes, so beschaffenes Abfallen als ein unverwischbares Merkmal ansehen können, das zwar allerdings auch durch eingeführte rationale Integrale hervorgerufen werden kann, aber mit weit höherer Wahrscheinlichkeit dem Vorhandensein irrationaler solcher sein Dasein verdankt.

Schreiten wir jetzt zu denjenigen Aufschlüssen, welche die Zusammensetzung der Coefficienten aus ihren einfachen Factoren ergibt. Es wird erspriesslich sein bei dem einfachsten Falle zu beginnen und zuvörderst diejenige Differentialgleichung, die aus der binomischen algebraischen:

$$\varphi^3 + O = 0 \tag{154}$$

hervorgeht, der Prüfung zu unterziehen. Sie wird ohne Mühe aus der (135) abgeleitet dadurch, dass man $A$ durch die Nulle und $B$ durch $O$ ersetzt und sieht so aus:

$$9\,O^2 . y''' - 9\,OO' . y'' + (5\,O'^2 - 3\,OO'')\,y' + 9\,O^4 . y = 0. \tag{155}$$

Wir wollen hier $O$ zuvörderst eine ganze Function von $x$ sein lassen und ihm den Factor $x-\alpha$ und diess zwar Einmal nur beilegen. Es enthalten dann die successiven Coefficienten der Reihe nach beziehlich zwei, einen und keinen Factor dieser Art. Sucht man nun, nach den Vorschriften des §. 7, die dazu gehörigen Exponenten $k$, so ergibt sich, zur Bestimmung derselben aus (45) folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$\left\{(k+2)(k+1)\frac{O^2}{(x-\alpha)^2} + (k+1)\frac{OO'}{x-\alpha} + \frac{5}{9}O'^2\right\}_\alpha = 0, \tag{156}$$

die, da man für $x=\alpha$

$$\left.\frac{O}{x-\alpha}\right\}_\alpha = O'_\alpha$$

hat, eine Abkürzung durch $O'^2_\alpha$ zulässt, und in die reine Zahlengleichung:

$$(k+2)(k+1) + k + 1 + \frac{5}{9} = 0 \tag{157}$$

oder:

$$k^2 + 4k + \frac{32}{9} = 0$$

übergeht, deren Wurzeln sind:

$$k = -\frac{4}{3}, \quad -\frac{8}{3}. \tag{158}$$

Wir wollen aber auch den allgemeineren Fall betrachten, wo $O$ eine Anzahl $m$ von Factoren $x-\alpha$ besitzt. Man überzeugt sich dann ohne Mühe, dass die Coefficienten der Gleichung (155) solcher Factoren beziehlich: $2m$, $2m-1$, $2m-2$, $3m$ erhalten werden, dass sohin eine abkürzende Division durch $(x-\alpha)^{2m-2}$ zunächst Platz greife, nach welcher, gerade so wie in dem früheren einfacheren Falle, den successiven Gleichungscoefficienten bezüglich 2, 1, 0 Factoren verbleiben werden. Wir haben also abermals zwei Werthe von $k$ zu suchen und das zwar vermittelst folgender Gleichung des zweiten Grades:

…ie ihr entsprechende Differential-…
enthalten und kann sohin aus derselben abgeleitet we…
durch Verwandlung von $O$ in $\frac{O}{L}$; sie ist:

$$(\ldots)\quad 9L^2O^2 \cdot y''' - 9LO(LO' - L'O)y'' + (5L^2O'^2 - 4LL'OO' - L'^2O^2 - 3L^2OO'' + 3LL''O^2)y' + 9LO^2 \cdot y = 0.$$

Die Erkennungszeichen der in $O$ vorhandenen Factoren $x-\alpha$ haben wir soeben gegeben — sie werden durch das Hinzutreten des Nenners $L$ gar nicht geändert; es bleibt uns daher nur noch übrig, das Verhalten der in $L$ allenfalls Ein oder mehrere Male vorkommenden solchen Factoren der Untersuchung zu unterwerfen. Nehmen wir also an, $L$ enthalte den Factor $x-\alpha$ und zwar Einmal, so werden die Gleichungscoefficienten, wie man sich leicht überzeugt, denselben und zwar, der Reihe nach, der erste Zweimal, der zweite Einmal, der dritte Nullmal enthalten, gerade so, als ob zwei rationale particuläre Integrale mit Nennern wie $(x-\alpha)^q$ vorhanden wären, so dass also, auf den ersten Anblick der Differentialgleichung, zwischen den im Zähler $O$ und im Nenner $L$ vorhandenen Factoren kein Unterschied wahrzunehmen ist. Anders verhält sichs mit dem Werthe von $k$, in welchem der in Rede stehende Unterschied allsogleich ersichtlich ist; es wird nämlich die auf ähnliche Weise gebildete Gleichung in $k$, wie wir zur (157) gelangten, jetzt so aussehen:

$$(k+1)^2 = \frac{1}{9}, \tag{165}$$

woraus:

$$k = -\frac{2}{3} \quad \text{oder} \quad -\frac{4}{3} \tag{166}$$

folgt. Nehmen wir zwei Factoren $x-\alpha$ an, die in $L$ vorhanden sein sollen, so gelangen wir zu ähnlichen Folgerungen; es wird nämlich von diesen Factoren der erste, zweite und dritte Gleichungscoefficient abermals Zwei, Einen und Keinen besitzen, die Gleichung aber in $k$ wird übergehen in:

$$(k+1)^2 - (k+1) + \frac{2}{9} = 0, \tag{167}$$

und Wurzeln:

$$k = -\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad -\frac{2}{3} \tag{168}$$

liefern. Beachtet man nun, dass es analytisch genommen gleichgiltig ist, ob man sagt: $L$ hat Ein Factor $x-\alpha$ und $O$ keinen, oder $O$ hat minus Einen, so sieht man allsogleich ein, dass die, auf $L$ vorkommende Factoren $x-\alpha$, Eins oder Zwei an der Zahl, bezüglichen Werthe von $k$, an (162) vorfindigen, als Glieder derselben Reihe, sich vollständig anschliessen, so zwar, dass … die in $O$ vorhanden gedacht werden, wenn:

$$m = -2, \quad -1, \quad \cdot \quad +1, \quad +2, \quad \ldots\ldots \quad +m$$

st, beziehlich:

$$k = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{cases}, \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{cases}, \begin{cases} -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{cases}, \ldots\ldots \begin{cases} -\frac{m+3}{3} \\ -\frac{2m+6}{3} \end{cases} \tag{169}$$

erhalten. Wir können sohin überhaupt die paarweise als Werthe von $k$ auftretenden Drittel ansehen als Merkmale von einzeln oder wiederholt unter dem Cubikwurzelzeichen vorkommenden Factoren wie $x-\alpha$, so lange das betreffende particuläre Integral für $x=\alpha$ nicht unendlich wird. Dieser Fall tritt nun ein, wenn $L$ drei oder mehr solche Factoren besitzt. Sind ihrer nur drei vorhanden, so tauchen in den successiven Coefficienten der Differentialgleichung, der Reihe nach, deren 3, 2, 1 und 0 an der Zahl auf. Die Gleichung in $k$ gehört dem dritten Grade an und ist folgende:

$$(k+2)(k+1)k - 3(k+1)k + k - \frac{6O}{L'''}\Big\}_\alpha = 0,$$

oder:

$$k^3 - \frac{6O}{L'''}\Big\}_\alpha = 0; \tag{170}$$

ihre drei Wurzeln sind nicht mehr reine Zahlenwerthe, sondern Functionen der in $L$ und $O$ vorkommenden constanten Parameter — was übrigens in voller Übereinstimmung ist mit den über den Bau der particulären Integrale bereits gewonnenen Kenntnissen. Weil nämlich dem $L$ drei Factoren $x-\alpha$ zukommen, so wird man:

$$L = \lambda (x-\alpha)^3 \tag{171}$$

setzen können und es wird $\varphi$ zufolge dieser Gleichung und der (163) folgende drei Werthe haben:

$$\varphi = -\frac{1}{x-\alpha}\sqrt[3]{\frac{O}{\lambda}}, \quad -\frac{\rho_1}{x-\alpha}\sqrt[3]{\frac{O}{\lambda}}, \quad -\frac{\rho_2}{x-\alpha}\sqrt[3]{\frac{O}{\lambda}}, \tag{172}$$

unter $\rho_1$ und $\rho_2$ die beiden imaginären Wurzeln der Gleichung $\rho^3=1$ verstanden. Setzen wir also, der Kürze wegen, $\sqrt[3]{\frac{O}{\lambda}} = \psi$ und bemerken, dass, kraft der Mac-Laurin'schen Formel:

$$\frac{\psi}{x-\alpha} = \frac{\psi_\alpha}{x-\alpha} + \psi'_\alpha + \frac{1}{2}\psi''_\alpha (x-\alpha) + \ldots\ldots$$

sei, eine Gleichung, die wir kürzer so schreiben:

$$\frac{\psi}{x-\alpha} = \frac{\psi_\alpha}{x-\alpha} + \chi,$$

indem wir unter $\chi$ das Ergänzungsglied der Reihe und sohin offenbar eine neue Function von $x$ verstehen, die die Eigenschaft besitzt, für $x=\alpha$ nicht mehr unendlich zu werden, so erscheint uns das allgemeine Integral der in Rede stehenden Differentialgleichung (164) zunächst in folgender Form:

$$y = C_1\, e^{-\int\left(\chi + \frac{\psi_\alpha}{x-\alpha}\right)dx} + C_2\, e^{-\rho_1\int\left(\chi + \frac{\psi_\alpha}{x-\alpha}\right)dx} + C_3\, e^{-\rho_2\int\left(\chi + \frac{\psi_\alpha}{x-\alpha}\right)dx},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(173) \qquad y = \frac{C_1}{(x-\alpha)^{\psi_\alpha}}\, e^{-\int\chi\, dx} + \frac{C_2}{(x-\alpha)^{\rho_1\psi_\alpha}}\, e^{-\rho_1\int\chi\, dx} + \frac{C_3}{(x-\alpha)^{\rho_2\psi_\alpha}}\, e^{-\rho_2\int\chi\, dx}.$$

Es ist hier augenscheinlich, dass die drei particulären Integrale Nenner wie $(x-\alpha)^k$ besitzen, und dass namentlich dem Exponenten $k$ beziehlich die drei Werthe:

$$k = \psi_\alpha, \quad \rho_1\psi_\alpha, \quad \rho_2\psi_\alpha$$

zukommen, die sämmtlich in der Relation:

$$(174) \qquad k^3 = \psi_\alpha^3$$

stehen — eine Gleichung, von welcher man sich ohne Mühe überzeugt, dass sie mit der früher erhaltenen (170) zusammenfalle, indem, wegen $L = \lambda\cdot(x-\alpha)^3$, für den speciellen Werth $x = \alpha$, offenbar $L''' = 6\lambda$, andererseits aber $\frac{O}{\lambda} = \psi_\alpha^3$ ist.

Am Schlusse des §. 8 dieses Abschnittes, der die Merkmale gebrochener Functionen im particulären Integrale zum Gegenstande hatte: einem particulären Integrale, das wir uns in der Form

$$e^{\int\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m}dx}$$

dachten, wurde die Bemerkung angefügt, dass der Coefficientenbau einer Differentialgleichung, in Bezug auf die Reihenfolge der einfachen Factoren von der Form $x-\alpha$, nichts als das Verhalten der successiven Differentialquotienten der einzelnen particulären Integrale wiedergebe und diess zwar für solche endliche Werthe der unabhängigen Veränderlichen, die irgend Eines derselben, oder einen seiner Differentialquotienten unendlich machen; dass daher solche Formen, welche ein ähnliches Verhalten dieser Differentialquotienten darlegen, auch auf ähnliche Weise in der Differentialgleichung abgebildet erscheinen. Hieraus lässt sich unmittelbar schliessen, dass der Werth von $m$, wenn er zwischen 0 und 1 liegt, einerlei Reihenfolge von Factoren $x-\alpha$ in den Gleichungscoefficienten zur Folge habe mit derjenigen, welche der Voraussetzung $m = 1$ angehört. Unsere gegenwärtigen Betrachtungen bestätigen einerseits diese Bemerkung und bringen andererseits Kennzeichen gebrochener Werthe von $m$ bei, mindestens für solche Differentialgleichungen, die der stete Gegenstand unserer Untersuchungen sind, d. h. mit rationalen Coefficienten. Fällt nämlich $m$ gleich irgend einem einfachen Bruche, der kleiner ist als 1 und mit dem Nenner 2, 3, 4 .... u. s. w. versehen, aus, so erscheint offenbar schon nach Einmaligem Differenziren eine Potenz mit gebrochenem Exponenten im Nenner des particulären Integrals und die von da an gewonnenen successiven Differentialquotienten, die unendlich werden für $x = \alpha$, nehmen ein Verhalten an dieser ihrer unendlichen Werthe, als ob im Exponenten der Exponentielle von dem Divisor $(x-\alpha)^m$ keine Spur vorhanden wäre — und daher rührt offenbar das für alle Werthe von $m$ zwischen 0 und 1 giltige Verhalten der Differentialgleichungscoefficienten in Bezug auf Factoren $x-\alpha$ und zugleich das Er-

selben sind bei der einen und bei der anderen, was denn auch ein ähnliches Verhalten der zugehörigen Differentialgleichungen zur Folge haben wird. Die drei Wurzeln der ebenerwähnten einfachen, algebraischen Gleichung gibt aber die Cardan'sche Formel bekanntlich in folgender Gestalt:

$$\varphi = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}}, \tag{176}$$

und es wird ein Übergang von reell in imaginär und umgekehrt nur bei denjenigen Werthen von $x$ stattfinden können, welche das Binom: $\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}$ oder, was dasselbe ist: $4A^3 + 27B^2 = -G^2$ der Nulle gleich machen. Die so erhaltene Gleichung ist zugleich die Bedingungsgleichung des Vorhandenseins gleicher Wurzeln und wird erhalten, wenn man aus der Gleichung (175) in $\varphi$ und der aus ihr durch Differenziren nach $\varphi$ abgeleiteten, nämlich:

$$3\varphi^2 + A = 0 \tag{177}$$

das $\varphi$ eliminirt. Wir finden es für gut hier diese Bemerkung zu machen, weil wir in der Folge zu zeigen beabsichtigen, dass das durch ein ähnliches Eliminationsverfahren erhaltene Polynom, allgemein, bei einer Differentialgleichung von beliebiger Ordnung, im ersten Coefficienten der letzteren als Factor enthalten sei. Bei der in Rede stehenden Differentialgleichung der dritten Ordnung fällt diess durch Betrachtung des Werthes von $\mathfrak{X}_3$ in die Augen; dieser enthält sohin nicht bloss die einfachen Factoren von der Form $x-\alpha$, welche Eines der particulären Integrale durch ihr Verschwinden unendlich machen, sondern auch diejenigen, bei deren Nullwerden eine Formänderung von reell in imaginär oder auch nur ein Gleichwerden zweier Werthe von $\varphi$ Platz greift, gleichgültig, ob damit eine solche Formänderung verknüpft ist oder nicht.

Es wäre überflüssig hier das Verhalten zu untersuchen derjenigen Factoren von der Form $x-\alpha$, die ein particuläres Integral unendlich machen und die in dem $L$ genannten ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung (153) ein oder mehrere Male erscheinen; denn es ist von dem im §. 7 zur Sprache gebrachten durchaus nicht verschieden.

Es bleibt uns daher nur noch übrig Erkennungszeichen aufzusuchen für solche einfache Factoren dieser Art, die das Binom $4A^3 + 27B^2$ der Nulle gleich machen. Wir betrachten sogleich den allgemeinen Fall und geben demselben den Factor $(x-\alpha)^m$, den wir aber als weder in $A$ noch in $B$ enthalten voraussetzen. Der Gleichung (136) zufolge, hat der erste Differentialgleichungscoefficient $\mathfrak{X}_3$ folgenden Werth:

$$\mathfrak{X}_3 = -G^2 . GX_3 = (4A^3 + 27B^2)(-4A^3 - 27B^2 + 6AB' - 9A'B), \tag{178}$$

und es lässt sich zuvörderst darthun, dass, unter der gemachten Voraussetzung, das Binom:

$$6AB' - 9A'B$$

den Factor $x-\alpha$ ebenfalls, jedoch nur $(m-1)$-mal enthalte, dass daher $\mathfrak{X}_3$ solcher Factoren $2m-1$ an der Zahl besitzen müsse. In der That ist:

$$-G^2 = 4A^3 + 27B^2,$$

somit durch Differentiation:

$$-2GG' = 12A^2A' + 54BB';$$

hieraus bestimmen wir den Werth von:

$$B' = -\frac{2A^2A'}{9B} - \frac{2GG'}{54B} = -\frac{2A^2A'}{9B} + \frac{(4A^3+27B^2)'}{54B},$$

und setzen denselben in das obenstehende Binom, welches hierdurch übergeht in:

$$6AB' - 9A'B = -\frac{A'}{3B}(4A^3 + 27B^2) + \frac{A}{9B}(4A^3 + 27B^2)' = \frac{A'}{3B}G^2 - \frac{2A}{9B}GG'.$$

Aus dieser Gleichung geht, unter der aufgestellten Voraussetzung, die Theilbarkeit des in Rede stehenden Binoms durch $(m-1)$ Factoren $x-\alpha$, nicht mehr und nicht weniger, unmittelbar hervor und hieraus folgt weiter, dass der ganze Coefficient $\mathfrak{X}_3$ solcher Factoren $2m-1$ an der Zahl besitze.

Der nächste Coefficient ist $\mathfrak{X}_2$. Wir betrachten ihn in der Form, in welcher er durch die Gleichung (141) gegeben wird, d. h.

$$\mathfrak{X}_2 = G^2(GX_2)' - GG'.GX_2;$$

da nun aber die Grössen:

$$G^2, \quad GG', \quad GX_2, \quad (GX_2)',$$

Factoren $x-\alpha$ beziehungsweise:

$$m, \quad m-1, \quad m-1, \quad m-2$$

an der Zahl besitzen, so ist ersichtlich, dass $\mathfrak{X}_2$ mindestens $2m-2$ solche Factoren enthalten werde. Wir werden aber sehen, dass deren auch nicht mehr als $2m-2$ sein können und diess zwar aus dem numerischen Werthe, den der, mit $x-\alpha$ multiplicirte zweite Coefficient, getheilt durch den ersten, für $x=\alpha$ liefert und der von der Nulle verschieden ist.

Der dritte Gleichungscoefficient $\mathfrak{X}_1$ ist ebenfalls durch $(2m-2)$ Factoren $x-\alpha$ mindestens theilbar. Um diess einzusehen, stelle man denselben ebenfalls in der Form, wie er durch die Gleichung (142) gegeben ist, hin, d. h.:

$$2A\,\mathfrak{X}_1 = GX_2\left[-G^2(H + 3A'' + 3B') + GG'(A' + 3B)\right] - G^2(GX_2)'(A' + 3B).$$

Hier ist, zufolge der Gleichung (129):

$$H = 2A^2 - 6B' - 4A'' + \frac{A'(2A^2A' + 9BB') - B'(6AB' - 9A'B)}{4A^3 + 27B^2},$$

oder, wenn wir statt $4A^3+27B^2$, $2A^2A' + 9BB'$ und $6AB' - 9A'B$ beziehungsweise $-G^2$, $-\frac{1}{3}GG'$ und $GX_2 - G^2$ schreiben:

$$H = 2A^2 - 7B' - 4A'' + \frac{\frac{1}{3}A'.GG' + B'.GX_2}{G^2},$$

und es ist zuvörderst ersichtlich, dass, zufolge der Beschaffenheit der beiden Glieder, aus denen der Zähler des gebrochenen Theiles in $H$ zusammengesetzt ist, beiden $m-1$ Factoren $x-\alpha$, also dem

ganzen Zähler mindestens so viele zukommen. Der Nenner hat deren $m$ an der Zahl, sohin ist der Bruch nach denselben **wenigstens** von der Ordnung $-1$ und wenigstens diese Ordnungszahl, wenn nicht eine grössere, wird auch dem $H$ zukommen. Wir schliessen hieraus, dass der Coefficient $\mathfrak{X}_1$ solcher Factoren **mindestens** $2m-2$ besitze.

Da sich endlich dasselbe auch von dem letzten Coefficienten $\mathfrak{X}_0$ behaupten lässt, wie aus seinem Werthe (143):

$$\mathfrak{X}_0 = - GX_3 \left[\frac{2}{3} A \cdot GG' + G^2 (A' + B)\right] + \frac{2}{3} A . G^2 (GX_3)'$$

ohne Mühe zu entnehmen ist, so schliessen wir aus all' diesen Ergebnissen auf die Theilbarkeit der ganzen Gleichung (135) durch solche Factoren und zwar $2m-2$ an der Zahl, nach deren Durchführung nur dem ersten Coefficienten derselben nothwendigerweise Ein Factor $x-\alpha$ verbleiben wird. Schreiten wir nun zur Aufsuchung des demselben zugehörigen Exponenten $k$, den man bekanntlich erhält, den mit $x-\alpha$ multiplizirten zweiten Coefficienten durch den ersten dividirend, im so erhaltenen Resultate $x=\alpha$ setzend und, nach Berechnung des unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden Ergebnisses, von demselben die Ordnungszahl der Gleichung weniger der Einheit subtrahirend. Demnach wäre hier:

$$k = \frac{\mathfrak{X}_2}{\mathfrak{X}_3} (x-\alpha)\Big\}_{\alpha} - 2,$$

oder, mit Zuhilfenahme der Werthe (140) und (141):

$$k = \frac{(G^2)'}{2G^2} (x-\alpha)\Big\}_{\alpha} - \frac{(GX_3)'}{GX_3} (x-\alpha)\Big\}_{\alpha} - 2. \tag{181}$$

Beide im Werthe von $k$ erscheinende Brüche nehmen für $x=\alpha$ die Form $\frac{0}{0}$ an und es führt eine $m$-malige Differentiation von Zähler und Nenner zum Werthe des ersten und eine $(m-1)$-malige zum Werthe des zweiten derselben. Da man aber hat:

$$\frac{d^m}{dx^m} [(G^2)' (x-\alpha)] = (G^2)^{(m+1)} (x-\alpha) + m (G^2)^{(m)}$$

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} [(GX_3)' (x-\alpha)] = (GX_3)^{(m)} (x-\alpha) + (m-1) (GX_3)^{(m-1)},$$

so ist offenbar:

$$\frac{(G^2)'}{2G^2} (x-\alpha)\Big\}_{\alpha} = \frac{m}{2}, \qquad \frac{(GX_3)'}{GX_3} (x-\alpha)\Big\}_{\alpha} = m-1,$$

und somit:

$$k = -\frac{m+2}{2}. \tag{182}$$

Vergleicht man hiemit den Werth (82) von $k$, der in einer Differentialgleichung der **zweiten Ordnung** die vorhandenen Factoren $x-\alpha$ unter dem Quadratwurzelzeichen verräth, so sieht man, dass er mit dem hier gewonnenen zusammenfalle und vermuthet demnächst, dass alle solchen unter einem Quadratwurzelzeichen erscheinenden Factoren in einer Gleichung von beliebiger Ordnung

also gleich viel, ob diese Quadratwurzel noch unter anderen Wurzelzeichen steht oder nicht, sich durch gebrochene Werthe von $k$ mit dem Nenner 2 kundgeben, und dass nur die wirklich gebrochenen unter ihnen einem Übergange von reell in imaginär entsprechen, die für $k$ gewonnenen, ganzen und negativen Zahlen hingegen, nur einem Durchgange durch gleiche Wurzeln angehören — eine Vermuthung, die sich zur Gewissheit erheben lässt.

Nebst den Factoren endlich, welche entweder in $L$, oder in $4A^3+27B^2$ erscheinen, vermag der erste Coefficient noch solche zu enthalten, die in:

$$GX_3 = -4A^3 - 27B^2 + 6AB' - 9A'B \qquad (1$$

enthalten sind, ohne in:

$$G^2 = -4A^3 - 27B^2 \qquad (1$$

vorzukommen. Von diesen lässt sich ohne Mühe darthun, dass sie, nach gehöriger Division der ganzen Gleichung (135) durch eine entsprechende Anzahl derselben, im ersten Coefficienten Einmal, im zweiten aber gar nicht erscheinen werden, in diesem Punkte die gleiche Eigenschaft mit den unmittelbar zuvor der Betrachtung Unterworfenen theilend. Das ihnen zugehörige $k$ geht daher auch aus der Formel (181) hervor, in welcher der erste der vorkommenden Brüche offenbar gleich Null ist, der zweite aber, unter der Voraussetzung von $m$ Factoren $x-\alpha$ in $GX_3$, den Werth $m$ gewinnt, daher denn:

$$k = -m - 2 \qquad (1$$

ausfällt — eine ganze Zahl, die dazu dient die Behauptung zu bestätigen, dass nur gebrochene Werthe von $k$ und zwar namentlich Halbe einen Übergang von reell in imaginär des Werthes von $\varphi$, bezüglich ein Periodischwerden des betreffenden particulären Integrals kundthun.

Wir haben bisher geflissentlich die Fälle ausser Acht gelassen, wo die Theilbarkeit der Binome $4A^3+27B^2$ und $6AB'-9A'B$ aus den in $A$ und in $B$ entweder Einmal oder wiederholt enthaltenen Factoren entspringt, weil diese Fälle ihrem speciellen Verhalten nach mit den früher betrachteten, wo $k$ doppelwerthig ist, verwandt sind. In der That: setzen wir zuvörderst einen einzigen Factor $x-\alpha$ in $A$ und $B$ voraus, so bemerken wir zunächst, dass der durch die Cardan'sche Formel gegebene Werth von $\varphi$ die Sonderung Eines Factors $\sqrt[3]{x-\alpha}$ gestatte, gerade so, als wenn in der binomischen Gleichung (154) der $O$ genannte Coefficient durch $x-\alpha$ theilbar ausfällt, wo dann $k$ den doppelten Werth $-\frac{4}{3}$ und $-\frac{8}{3}$ gewinnt. Gerade so verhält sich's auch hier. Es bekömmt nämlich das Binom $4A^3+27B^2$ unter der gemachten Voraussetzung zwei solche Factoren, das andere $6AB'-9A'B$ nur Einen solchen und man überzeugt sich leicht, dass die Gleichungscoefficienten $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_0$ deren der Reihe nach 3, 2, 1, 3 an der Zahl enthalten werden. Es wird also $k$ von einer Gleichung des zweiten Grades abhängig sein, die man aus der (45), §. 7, und durch Benützung der Gleichungen (140), (141) und (142) ohne Schwierigkeit bilden kann, wenn man bedenkt, dass für $x=\alpha$ folgende Gleichungen bestehen:

$$\left\{\frac{\mathfrak{X}_3}{(x-\alpha)^3}(k+2)(k+1)-\frac{\mathfrak{X}_2}{(x-\alpha)^2}(k+1)+\frac{\mathfrak{X}_1}{x-\alpha}\right\}_\alpha=0, \tag{186}$$

$$\left.\frac{G^2}{(x-\alpha)^2}\right\}_\alpha=\left.\frac{GG'}{x-\alpha}\right\}_\alpha=-27\,B'^2_\alpha,\qquad \left.\frac{GX_3}{x-\alpha}\right\}_\alpha=(GX_3)'_\alpha=-3A'_\alpha B'_\alpha,$$

$$\left.\frac{GG'}{G^2}(x-\alpha)\right\}_\alpha=1,\qquad \left.\frac{GX_3}{G^2}(x-\alpha)\right\}_\alpha=\frac{A'_\alpha}{9B'_\alpha},\qquad \left.(H+3A''+3B')(x-\alpha)\right\}_\alpha=\frac{4}{9}A'_\alpha,$$

siehe die Gleichungen (183), (184) und (180). Die obenstehende Gleichung in $k$ verwandelt sich so in:

$$k^2+3k+\frac{20}{9}=0, \tag{187}$$

und liefert Wurzeln:

$$k=-\frac{4}{3},\qquad -\frac{5}{3}, \tag{188}$$

also auch Gruppen von Dritteln, die aber von den früher im ähnlichen Falle, Seite 212, erhaltenen, nämlich $-\frac{4}{3}$, $-\frac{8}{3}$ verschieden sind und durch eben diese Verschiedenheit den Unterschied zwischen isolirten dritten Wurzeln und Wurzelpaaren dieser Art, so wie sie in der Cardan'schen Formel vorkommen, kundthun.

Hätten wir in $A$ und $B$ anstatt eines einzigen zwei Factoren $x-\alpha$ vorausgesetzt, so wäre jeder Werth von $\varphi$ der $\sqrt[3]{(x-\alpha)^2}$ proportional geworden und eine ähnliche Rechnung hätte zu folgender Gleichung in $k$ geführt:

$$(k+1)^2+2(k+1)+\frac{8}{9}=0, \tag{189}$$

und Wurzeln gegeben:

$$k+1=-\frac{2}{3},\qquad -\frac{4}{3}. \tag{190}$$

Nimmt man endlich, um das Gesetz, nach welchem die Werthe von $k$ fortschreiten, zu bestimmen, $m$ Factoren $x-\alpha$ in $A$ und $B$ an, und erwägt zu diesem Behufe, dass für $x=\alpha$ folgende Gleichungen zu gelten haben:

$$\left\{\frac{\mathfrak{X}_3}{(x-\alpha)^{4m-1}}(k+2)(k+1)-\frac{\mathfrak{X}_2}{(x-\alpha)^{4m-2}}(k+1)+\frac{\mathfrak{X}_1}{(x-\alpha)^{4m-3}}\right\}_\alpha=0, \tag{191}$$

$$\left.\frac{G^2}{(x-\alpha)^{2m}}\right\}_\alpha=-27\,\frac{B^{(m)^2}_\alpha}{m!^2}=\mathfrak{G},\qquad \left.\frac{GG'}{(x-\alpha)^{2m-1}}\right\}_\alpha=m\,\mathfrak{G},$$

$$\left.\frac{GX_3}{(x-\alpha)^{2m-1}}\right\}_\alpha=-3m\,\frac{A^{(m)}_\alpha B^{(m)}_\alpha}{m!^2}=\mathfrak{K},\qquad \left.\frac{(GX_3)'}{(x-\alpha)^{2m-2}}\right\}_\alpha=(2m-1)\,\mathfrak{K},$$

$$\left.\frac{GG'}{G^2}(x-\alpha)\right\}_\alpha=m,\qquad \left.\frac{GX_3}{G^2}(x-\alpha)\right\}_\alpha=\frac{m}{9}\frac{A^{(m)}_\alpha}{B^{(m)}_\alpha},\qquad \left.\frac{H+3A''+3B'}{(x-\alpha)^{m-2}}\right\}_\alpha=\left(m-\frac{5}{9}m^2\right)\frac{A^{(m)}_\alpha}{m!},$$

(unter $m!$ wird hier allgemein das Produkt $1.2.3\ldots\ldots(m-1)m$ verstanden), so verwandelt sich die erste dieser Gleichungen, kraft der übrigen, deren man zur Entwicklung der stets benöthigten Gleichungen (140), (141) und (142) bedarf, in die sehr einfache Gleichung des zweiten Grades:

$$(k+1)^2 + m(k+1) + \frac{2}{9} m^2 = 0, \qquad (19$$

welche die zwei rationalen Wurzeln:

$$k+1 = -\frac{m}{3}, \quad -\frac{2m}{3} \quad \text{oder} \quad k = -\frac{m+3}{3}, \quad -\frac{2m+3}{3} \qquad (19$$

besitzt und sohin die dritten Wurzeln als Factoren in den Werthen von $\varphi$, durch den Ausdruck für $k+1$ auf dieselbe Weise verräth, wie diess in dem einfacheren Falle einer zu Grunde liegenden binomischen Gleichung des dritten Grades durch den Werth von $k$ geschah. Die Beschaffenheit der erhaltenen Werthe von $k$ gibt zugleich ein Mittel an die Hand isolirte dritte Wurzeln in den particulären Integralen von den der Cardan'schen Formel eigenthümlichen Wurzelpaaren zu unterscheiden: der numerisch kleinere nämlich dieser Werthe von $k$ ist derselbe in beiden Fällen, der andere ein verschiedener, so zwar, dass im ersten Falle ein Verhalten wie 1 zu 2 bei den Werthen von $k$ selbst, im zweiten Falle aber ein ähnliches Verhalten bei den Werthen von $k+1$ stattfindet.

Das Vorkommen solcher Gruppen von Dritteln wie die in Rede stehenden, ist aber nicht beschränkt auf den Fall, wenn die Coefficienten $A$ und $B$ die gleiche Anzahl von $m$ Factoren $x-\alpha$ besitzen, sondern hängt wesentlich dem Umstande an, dass sich aus der Cardan'schen Formel ein Factor $\sqrt[3]{(x-\alpha)^m}$ sondern lässt — ein Umstand, dessen Stattfinden jedesmal beobachtet werden kann, so oft die Zahl der in $B^2$ enthaltenen derlei Factoren geringer ist, als die der in $A^3$ vorkommenden. Hat dagegen $A^3$ solcher Factoren weniger als $B^2$, so wird sich eben aus der Cardan'schen Formel eine Quadratwurzel sondern lassen und die Rechnung wird, wie wir sehen werden, für $k$ nicht mehr eine Gruppe von Dritteln, sondern von Halben geben. Sind endlich $B^2$ und $A^3$ versehen mit ein und derselben Anzahl Factoren dieser Art, so kommen weder Drittel noch Halbe, sondern in der Regel Ganze zum Vorschein und der aus der Cardan'schen Formel abzuscheidende Factor ist ein rationaler — allfällige Ausnahmen hievon sollen alsobald erörtert werden. Wir beginnen unsere Untersuchung bei dem dritten der hier erwähnten Fälle, in welchem offenbar die Zahl der in $A$ und $B$ enthaltenen Factoren $x-\alpha$ beziehlich $2m$ und $3m$ ist, weil sonst $A^3$ und $B^2$ nicht mit der gleichen Anzahl derselben versehen sein könnten. Das Binom $4A^3+27B^2$ wird dann solcher Factoren mindestens $6m$ enthalten, es ist aber auch möglich, dass sich aus demselben, nebst den zu $A$ und $B$ gehörigen, noch andere, ihm eigenthümliche, etwa $s$ an der Zahl, heraussondern lassen, wo dann ihrer nicht $6m$ sondern $6m+s$ vorhanden wären. Wir sehen also, dass dieser dritte Fall in zwei andere ihm untergeordnete sich zerlegen lasse, die, des verschiedenen Ergebnisses wegen, abgesondert der Betrachtung unterworfen werden müssen, nämlich: den, wo $6m$ und den anderen, wo $6m+s$ die Zahl ist der in $4A^3+27B^2$ vorhandenen Factoren $x-\alpha$. Es seien also in den Grössen:

$$A, \qquad B, \qquad G^2 = -4A^3 - 27B^2, \qquad (19$$

beziehlich Factoren $x-\alpha$:

$$2m, \qquad 3m, \qquad 6m$$

enthalten, so fallen bei:

$$GX_3 = -4\,A^3 - 27\,B^2 + 6\,AB' - 9\,A'B$$

$5m-1$, d. h. so viel Factoren dieser Art, als sein letzter Bestandtheil $6\,AB'-9\,A'B$ besitzt, unmittelbar in die Augen. Bei näherer Beleuchtung aber sieht man, dass **wenigstens** noch Ein Factor $x-\alpha$, nebst den unmittelbar ersichtlichen $5m-1$, sich daraus abscheiden lasse, weil auch der $(5m-1)^{\text{te}}$ Differentialquotient des in Rede stehenden Binoms für $x=\alpha$ der Nulle gleich ist, der $5m^{\text{te}}$ aber in der Regel schon von der Nulle verschieden ausfällt, wovon man sich entweder mittelst der **Mac-Laurin**'schen Formel, oder auch derjenigen überzeugen kann, welche für die Entwicklung eines beliebigen $n^{\text{ten}}$ Differentials eines Produktes allgemein bekannt ist, und die man zur Ermittlung des $(5m-1)^{\text{ten}}$ und $5m^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $6\,AB'-9\,A'B$ verwendet. Die Anzahl der Factoren $x-\alpha$ in $GX_3$ ist also **mindestens** $5m$ und sohin die Gleichung in $k$:

$$\left\{\frac{\mathfrak{X}_3}{(x-\alpha)^{11m}}(k+2)(k+1) - \frac{\mathfrak{X}_2}{(x-\alpha)^{11m-1}}(k+1) + \frac{\mathfrak{X}_1}{(x-\alpha)^{11m-2}}\right\}_\alpha = 0; \tag{195}$$

zur Werthbestimmung ihrer Coefficienten dienen folgende Gleichungen:

$$\frac{G^3}{(x-\alpha)^{6m}}\Big\}_\alpha = -4\,\frac{A_\alpha^{(2m)^3}}{(2m)!^3} - 27\,\frac{B_\alpha^{(3m)^2}}{(3m)!^2} = \mathfrak{G}, \qquad \frac{GG'}{(x-\alpha)^{6m-1}}\Big\}_\alpha = 3m\,.\,\mathfrak{G},$$

$$\frac{GX_3}{(x-\alpha)^{5m}}\Big\}_\alpha = 6\,\frac{A_\alpha^{(2m)}\,B_\alpha^{(3m+1)}}{(2m)!\,(3m+1)!} - 9\,\frac{A_\alpha^{(2m+1)}\,B_\alpha^{(3m)}}{(2m+1)!\,(3m)!} = \mathfrak{K}, \qquad \frac{(GX_3)'}{(x-\alpha)^{5m-1}}\Big\}_\alpha = 5m\,.\,\mathfrak{K}$$

$$\frac{H+3\,A''+3\,B'}{(x-\alpha)^{2m-2}}\Big\}_\alpha = \frac{1}{(x-\alpha)^{2m-2}}\left(-A'' + \frac{A'.\,GG'}{3.\,G^3}\right)\Big\}_\alpha = -\,2m\,(m-1)\,\frac{A_\alpha^{(2m)}}{(2m)!}.$$

$\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}$ erhält man durch das bei Formen wie $\frac{0}{0}$ übliche Differentiationsverfahren. Die übrigen der vorliegenden fünf Gleichungen gehen aus den $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}$ liefernden unmittelbar hervor bis auf die letzte, wo noch die (180) zugezogen wird. Mit Hilfe derselben geht die Gleichung in $k$ über in:

$$k^2 + (2m+3)\,k + (m^2+3m+2) = 0, \tag{196}$$

und biethet Wurzeln:

$$k = -(m+1), \qquad -(m+2), \tag{197}$$

also **ganze Zahlen**, wie wir vorausgesehen haben. Sie scheinen einem **rationalen Factor** $(x-\alpha)^m$, der sich aus der **Cardan**'schen Formel abscheiden lässt, anzugehören.

Schreiten wir jetzt zur Erörterung des **zweiten Falles**, wo die unter (194) ersichtlichen drei Grössen Factoren $x-\alpha$ besitzen beziehungsweise $2m$, $3m$, $6m+s$ an der Zahl. Hier überzeugt man sich durch dieselben Mittel, deren so eben Erwähnung geschah, dass $6\,AB'-9\,A'B$ und sohin auch $GX_3$ solcher Factoren **gerade** $5m+s-1$ besitze und dass in Folge dieses Umstandes die Gleichung in $k$ so aussehe:

$$\left\{\frac{\mathfrak{X}_3}{(x-\alpha)^{11m+2s-1}}(k+2)(k+1) - \frac{\mathfrak{X}_2}{(x-\alpha)^{11m+2s-2}}(k+1) + \frac{\mathfrak{X}_1}{(x-\alpha)^{11m+2s-3}}\right\}_\alpha = 0, \tag{198}$$

zur Werthbestimmung ihrer Coefficienten dienen die folgenden fünf Gleichungen:

$$\left.\frac{G^2}{(x-\alpha)^{6m+s}}\right\}_\alpha = \mathfrak{G}\,, \qquad \left.\frac{GG'}{(x-\alpha)^{6m+s-1}}\right\}_\alpha = \frac{6m+s}{2}\,\mathfrak{G}\,,$$

$$\left.\frac{GX_s}{(x-\alpha)^{5m+s-1}}\right\}_\alpha = -\frac{s}{9}\,\frac{A^{(2m)}}{(2m)!}\cdot\frac{(3m)!}{B^{(3m)}}\,\mathfrak{G} = \mathfrak{K}, \qquad \left.\frac{(GX_s)'}{(x-\alpha)^{5m+s-2}}\right\}_\alpha = (5m+s-1)\,\mathfrak{K},$$

$$\left.\frac{H+3A''+3B'}{(x-\alpha)^{2m-2}}\right\}_\alpha = \left.\frac{1}{(x-\alpha)^{2m-2}}\left(-A'' + \frac{{}^1\!/_2 A'.\,GG' + B'.\,GX_s}{G^2}\right)\right\}_\alpha = -2m(m-1)\,\frac{A_\alpha^{(2m)}}{(2m)!}.$$

$\mathfrak{G}$ braucht nicht gerechnet zu werden, $\mathfrak{K}$ dagegen lässt sich ohne Schwierigkeit in Function von $\mathfrak{G}$ mit Hilfe der Formel (179) bestimmen, vermöge welcher man:

$$GX_s = G^2 + 6AB' - 9A'B = \frac{A'+3B}{3B}\,G^2 - \frac{2A}{9B}\,GG' \tag{199}$$

erhält; die Ableitung der übrigen Gleichungen endlich ist für sich klar; mit ihrer Hilfe gelangen wir zur folgenden Gleichung in $k$:

$$k^2 + \left(2m + 2 + \frac{s}{2}\right)k + \left(m^2 + 2m + 1 + (m+1)\,\frac{s}{2}\right) = 0, \tag{200}$$

die Wurzeln hat:

$$k = -(m+1)\,, \qquad -\left(m + 1 + \frac{s}{2}\right); \tag{201}$$

sie sind nur giltig für Werthe von $s$, welche von der Nulle verschieden sind, für $s=0$ aber treten die früheren (197) an ihre Stelle. Der so merkwürdig gestaltete zweite Werth von $k$ scheint anzudeuten, dass die Analysis in unerschütterlicher Consequenz jeden Übergang von reell in imaginär, selbst wenn er bei verschwindenden Wurzeln stattfindet, durch einen Bruch mit dem Nenner 2, den sie für $k$ liefert, bezeichne.

Unterziehen wir nun auch jene Fälle der Betrachtung, wo die Cardan'sche Formel die Sonderung einer dritten Wurzel gestattet und wo, wie wir früher voraussagten, Gruppen von Dritteln als Werthe von $k$ auftauchen und $A^3$ gegen $B^2$ die grössere Anzahl von Factoren $x-\alpha$ besitzt. Nennen wir die Anzahl solcher Factoren in $A$ und $B$ beziehlich $a$ und $b$, so ist also, unserer Voraussetzung nach, $3a > 2b$ und wir werden uns, zur Ableitung der entsprechenden Werthe von $k$, wie bisher an die Gleichungen (140), (141) und (142) zu wenden haben. Diese führen uns nun, wenn $a$ gegen $b$ stets steigend gedacht wird, von dem Werthe: $3a = 2b+1$ anzufangen, bis für $a=b$, stets auf genau demselben Wege, zur folgenden Endgleichung in k:

$$k^2 + (a+2)\,k + \left(a + \frac{ab}{3} - \frac{b^2}{9} + 1\right) = 0, \tag{202}$$

die Wurzeln biethet:

$$k = -\left(\frac{b+3}{3}\right), \qquad -\left(\frac{3a+3-b}{3}\right), \tag{203}$$

und die auch wenn $a = b + 1$ wird, noch gültig erscheint, indem für diesen Fall zwar einige Umstände der Zwischenrechnung eine theilweise Änderung erfahren, dennoch aber für $k$ die Gleichung:

$$k^2 + (b+3)\,k + \frac{2}{9}(b+3)^2 = 0 \tag{204}$$

mit Wurzeln:

$$k = -\frac{b+3}{3}, \qquad -\frac{2b+6}{3} \tag{205}$$

erhalten wird. — Für $a > b + 1$ werden uns die Werthe von $k$ nicht mehr durch die Gleichung (202), sondern eben durch die der Annahme: $a = b + 1$ entsprechende (204) geboten, die man sich für den vorliegenden Fall am besten mit Hülfe der Gleichungen (136), (137) und (138) verschaffen kann, aus deren Anblicke man sich leicht überzeugt, dass in den einzelnen Coefficienten nur jene Glieder, in denen kein $A$ erscheint, mit der kleinsten Anzahl Factoren $x - \alpha$ versehen, respective für die Anzahl solcher Factoren in den Coefficienten selbst entscheidend sind. Es folgt hieraus, dass wir uns, zum Behufe der Aufstellung der entsprechenden Gleichung in $k$, unmittelbar an die der binomischen algebraischen (154) entsprechende (155) wenden können, für welche die bezügliche Rechnung bereits durchgeführt wurde und zur Gleichung (160) geleitet hat, die sich in der That von der oben gewonnenen (204) nur darin unterscheidet, dass dort $m$ steht, wo hier $b$. Es führt somit der Fall $a \overline{>} b + 1$ und jener der binomischen algebraischen Gleichung zu einerlei Werthen für $k$, und wir sehen also, dass, unter der hier stets geltenden Voraussetzung $3a > 2b$, zwar jedesmal Gruppen von Dritteln erhalten werden, dass uns aber die beiden für $k$ gewonnenen Werthe (203) die Anzahl $a$ der in $A$ und jene $b$ der in $B$ vorhandenen Factoren $x - \alpha$ nur so lange abgesondert und mit Sicherheit zu liefern vermögen, so lange der Werth von $a$ jenen von $b$ nicht numerisch überschreitet.

Lassen wir endlich $B^2$ gegen $A^3$ in Bezug auf die Anzahl Factoren $x - \alpha$ vorwiegen, sohin aus der Cardan'schen Formel eine Quadratwurzel als Factor hervortreten, so tauchen, wie wir gesagt haben, Halbe als Werthe von $k$ auf, die aber auch hier wieder nicht stets aus derselben Gleichung gezogen werden können. Ist nämlich $b \overline{\gtrless} 2a$, so führt uns die Rechnung auf dem oftbetretenen Wege zur Gleichung:

$$k^2 + \left(b + 2 - \frac{a}{2}\right) k + \left(b + 1 + \frac{ab}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = 0, \tag{206}$$

mit Wurzeln:

$$k = -\left(\frac{a+2}{2}\right), \qquad -(b - a + 1), \tag{207}$$

aus denen man offenbar die Werthe von $a$ und $b$ abgesondert erfahren kann. Wird $b = 2a + 1$, so erhält man als Endgleichung in $k$:

$$k^2 + \left(\frac{3a}{2} + 3\right) k + \left(\frac{a^2}{2} + 2a + 2\right) = 0 \tag{208}$$

mit Wurzeln:

$$k = -\left(\frac{a+2}{2}\right), \qquad -(a+2),$$

die aus den (207) zwar allerdings ganz regelrecht hervorgehen, die uns aber, wo sie auftreten, keinen sicheren Rückschluss auf das Stattfinden des in Rede stehenden Falles gestatten, indem dieselben Werthe für $k$ auch in allen jenen Fällen gewonnen werden, wo $b > 2a + 1$.

Wir kommen durch diese Rechnungsentwicklungen zum Schlusse, dass durch den Werth von $k$ die, in irgend einem $\varphi$ vorhandenen Irrationalgrössen, wenn durch ihr Verschwinden entweder ein Unendlichwerden oder ein Durchgang durch gleiche Wurzeln $\varphi$ veranlasst wird, sich jedesmal kennzeichnen: im ersten Falle durch Werthe von $k$, die Functionen sein können der in der Differentialgleichung vorhandenen Buchstabenparameter, oder auch reine Zahlenwerthe, im zweiten Falle durch Brüche mit dem Nenner 2. Andere Irrationalgrössen, wie etwa die in der Cardan'schen Formel vorkommenden dritten Wurzeln, sind in der Differentialgleichung nicht nothwendigerweise und überhaupt nur dann zu gewahren, wenn sich aus dem Werthe von $\varphi$ ein irrationaler Factor wie $\sqrt[3]{(x-\alpha)^m}$ sondern lässt — wir erhalten nämlich alsdann für $k$ zweigliedrige Gruppen von Dritteln, die zwar nicht mit voller Sicherheit, aber doch mit überwiegender Wahrscheinlichkeit auf dritte Wurzeln in $\varphi$ den Schluss gestatten und sogar über die Art ihres Vorkommens, ob einzeln oder gepaart, Aufschluss geben. Auch lässt sich aus den angeführten Untersuchungen entnehmen, dass bei einer Differentialgleichung der dritten Ordnung, von der man aus irgend einem Grunde erwiesen hätte, ihre particulären Integrale seien algebraische von der hier betrachteten Art, die Bildung der entsprechenden algebraischen Gleichung in $\varphi$, einige Unsicherheiten abgerechnet, die zu Umwegen veranlassen kann, keinen wesentlichen Schwierigkeiten unterliege. Lässt sich aber ein solcher Beweis, wie in den meisten Fällen, nicht führen, so ist es wieder für sich klar, dass aus allen in der Differentialgleichung vorhandenen Erscheinungen nur ein disjunctiver Rückschluss mit »entweder — oder« auf alle diejenigen Formen particulärer Integrale gestattet sei, deren Einführung zu diesen Erscheinungen Veranlassung geben kann, während hier wohl zu bemerken ist, dass diess zwar algebraische Formen sein mögen, dass wir aber die Eigenschaft ein algebraisches, geschlossenes Polynom zu sein für keine der in unseren Rechnungen vorkommenden Functionen wie $A$, $B$, $M$, $N$, $O$ analytisch auszudrücken Gelegenheit hatten. Der Coefficient $L$ bildet hievon die alleinige Ausnahme — dieser ist nämlich, wegen der in ihm vorausgesetzten endlichen Anzahl einfacher Factoren, ein geschlossenes Polynom, was übrigens der Allgemeinheit unserer Untersuchungen auch keinen Eintrag thut, weil wir ja das Recht haben, nach Belieben, denselben entweder $= 1$ zu setzen, d. h. die algebraische Gleichung durch ihn als dividirt anzusehen, oder ihn zusammenzusetzen aus all' denjenigen Factoren, bei deren Verschwinden irgend ein anderer der Gleichungscoefficienten durch Unendlich durchgeht, um dadurch den Vortheil zu gewinnen, alle Gleichungscoefficienten als Functionen betrachten zu können, die für keinen endlichen Werth von $x$ unendlich werden. Es ist daher auch hier allgemein anzunehmen, dass unsere Untersuchungen solche algebraische und Differentialgleichungen voraussetzen und für sie auch vollkommen gültig sind, deren Coefficienten, mit Ausschluss des ersten, welcher

entschieden algebraisch ist, nur die Eigenschaften besitzen derjenigen Functionen, die wir im §. 1 dieses Abschnittes zur **ersten Classe** gezählt haben, und zu welchen noch die Eigenschaft für keinen endlichen Werth von $x$ unendlich zu werden hinzutritt, und diese Eigenschaften sind es, welche man nicht nur von der algebraischen auf die entsprechende Differentialgleichung, sondern auch von der letzteren auf die erstere folgerichtig übertragen kann.

## §. 12.

## Differentialgleichung der vierten Ordnung, entsprechend einer biquadratischen, algebraischen Gleichung.

So interessant auch die Bemerkungen sein mochten, die wir aus der Construction der Differentialgleichungen schöpften, die in ihren particulären integralen Irrationalgrössen, hervorgegangen aus der Auflösung einer algebraischen Gleichung des zweiten oder dritten Grades enthielten, so stehen doch dem Wunsche, dasselbe in Bezug auf eine Gleichung des $n^{ten}$ Grades zu leisten, in der Länge der nothwendigen Rechnungsentwicklungen unübersteigliche Hindernisse entgegen. Wir beschränken uns daher auf die wirkliche Bildung der Differentialgleichung nur in solchen Fällen, wo daraus bei der wirklichen Integration ein Nutzen erwachsen kann, d. h. wo $\int \varphi . dx$ allenfalls noch in geschlossener Form darstellbar ist, bei der algebraischen Gleichung des $n^{ten}$ Grades jedoch begnügen wir uns damit, dasjenige, was sich, ohne wirkliche Construction der ihr entsprechenden Differentialgleichung in Bezug auf die Kennzeichen etwa vorhandener Irrationalgrössen sagen lässt, in einem späteren Paragraphe zur Sprache zu bringen. Hier aber nehmen wir uns vor die Differentialgleichung zu bilden, deren vier particuläre Integrale von der Form $e^{\int \varphi dx}$ sind, wobei $\varphi$ eine Wurzel der biquadratischen, algebraischen Gleichung ist, in der die ungeraden Potenzen der Unbekannten fehlen. — Es sei also:

$$X_4 y^{IV} + X_3 y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = 0 \tag{210}$$

die zu construirende Differentialgleichung, deren Coefficienten uns zweiwerthige, algebraische Functionen bedeuten mögen, so, wie sie direkt, bei Bildung der Gleichung aus ihren particulären Integralen, nach dem bekannten Eliminationsverfahren und nach Weglassung der allen Gleichungsgliedern als Factor gemeinschaftlichen Exponentialgrösse entstehen. Die particulären Integrale dieser Gleichung seien:

$$y_1 = e^{\int \varphi_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int \varphi_2 dx}, \quad y_3 = e^{\int \varphi_3 dx}, \quad y_4 = e^{\int \varphi_4 dx}, \tag{211}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ aber seien die vier Wurzeln einer algebraischen Gleichung wie:

$$\varphi^4 + A \varphi^2 + B = 0. \tag{212}$$

Unter eben dieser Voraussetzung sind bekanntlich $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ paarweise einander dem Werthe nach gleich und nur dem Zeichen nach entgegengesetzt. Sei also:

$$\varphi_3 = -\varphi_1, \qquad \varphi_4 = -\varphi_2, \tag{213}$$

so können diese Relationen zur Vereinfachung der nachfolgenden Entwicklungen und zur Verwandlung der Stellenzeiger 3 und 4 beziehungsweise in 1 und 2 benützt werden und wir bemerken auch, dass der obenerwähnte Exponentialfactor:

$$e^{\int(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)\,dx}$$

in diesem Falle offenbar eine constante Grösse von beliebig anzunehmendem Werthe bedeutet, so zwar, dass wir uns unter $X_4$, $X_3$, $X_2$, $X_1$, $X_0$ auch die vollständigen, unabgekürzten, zweiwerthigen Coefficienten von $y^{IV}$, $y'''$, $y''$, $y'$, $y$, nach eben vollbrachter Bildung der verlangten Gleichung aus ihren particulären Integralen, vorstellen dürfen. Eben diese Coefficienten werden uns hiebei zuvörderst als zweiwerthige Functionen von $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ und $\varphi_4$ und ihrer Differentialquotienten gebothen, die wir sofort, durch Multiplication mit einer geeignet zu wählenden, nach eben jenen Grössen gleichfalls zweiwerthigen Function $G$, auf ganz ähnliche Weise, wie wir im vorhergehenden Paragraphe vorgegangen sind, in symmetrische Functionen nach $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ verwandeln, um sie endlich, nach den Ergebnissen des §. 9, als reine Functionen der Coefficienten $A$ und $B$ in der algebraischen Gleichung (212) und ihrer Differentialquotienten darzustellen.

Indem wir sofort zur directen Berechnung von $X_4$ schreiten, erhalten wir dasselbe (zufolge I. Abschn., §. 4) zunächst in folgender Form:

$$\begin{aligned}
X_4 = &+ y_1 y_2' y_3'' y_4''' && - y_1' y_2 y_3'' y_4''' && + y_1'' y_2 y_3' y_4''' && - y_1''' y_2 y_3' y_4'' \\
&- y_1 y_2' y_3''' y_4'' && + y_1' y_2 y_3''' y_4'' && - y_1'' y_2 y_3''' y_4' && + y_1''' y_2 y_3'' y_4' \\
&- y_1 y_2'' y_3' y_4''' && + y_1' y_2'' y_3 y_4''' && - y_1'' y_2' y_3 y_4''' && + y_1''' y_2' y_3 y_4'' \\
&+ y_1 y_2'' y_3''' y_4' && - y_1' y_2'' y_3''' y_4 && + y_1'' y_2' y_3''' y_4 && - y_1''' y_2' y_3'' y_4 \\
&+ y_1 y_2''' y_3' y_4'' && - y_1' y_2''' y_3 y_4'' && + y_1'' y_2''' y_3 y_4' && - y_1''' y_2'' y_3 y_4' \\
&- y_1 y_2''' y_3'' y_4' && + y_1' y_2''' y_3'' y_4 && - y_1'' y_2''' y_3' y_4 && + y_1''' y_2'' y_3' y_4 .
\end{aligned} \tag{214}$$

Zum Behufe der Entwicklung dieses Ausdrucks bemerken wir zuvörderst, dass, allgemein und ohne Rücksicht auf einen zugehörigen Stellenzeiger:

$$y = e^{\int\varphi dx}, \quad y' = e^{\int\varphi dx}.\varphi, \quad y'' = e^{\int\varphi dx}(\varphi^2 + \varphi'), \quad y''' = e^{\int\varphi dx}(\varphi^3 + 3\varphi\varphi' + \varphi'') \tag{215}$$

sei und sämmtliche Glieder von (214) unter der Form: $y_1^{(r)} y_2^{(s)} y_3^{(t)} y_4^{(u)}$ dargestellt zu werden vermögen. Setzen wir nun, wie wir gleich anfangs beabsichtigten, statt $\varphi_3$ und $\varphi_4$ beziehungsweise $-\varphi_1$ und $-\varphi_2$, so wird in den einzelnen Entwicklungsposten des Productes $y_1^{(r)} y_3^{(t)}$ nur der Stellenzeiger 1, in jenen von $y_2^{(s)} y_4^{(u)}$ ebenso nur der Stellenzeiger 2 erscheinen und stellen wir nun diese beiden Producte beziehungsweise durch die Symbole: $\binom{(r)}{(t)}_1$ und $\binom{(s)}{(u)}_2$ vor, so wird das obenerwähnte $y_1^{(r)} y_2^{(s)} y_3^{(t)} y_4^{(u)}$ die Gestalt:

$$y_1^{(r)} y_2^{(s)} y_3^{(t)} y_4^{(u)} = \binom{(r)}{(t)}_1 \binom{(s)}{(u)}_2 \tag{216}$$

annehmen und sich sonach $X_4$ auch folgendermassen schreiben lassen.

$$
\begin{aligned}
X_4 = &+ \binom{0}{,,}_1\binom{\prime}{,,,}_2 &&- \binom{\prime}{,,}_1\binom{0}{,,,}_2 &&+ \binom{\prime\prime}{,}_1\binom{0}{,,,}_2 &&- \binom{\prime\prime\prime}{,}_1\binom{0}{,,}_2 \\
&- \binom{0}{,,,}_1\binom{\prime}{,,}_2 &&+ \binom{\prime}{,,,}_1\binom{0}{,,}_2 &&- \binom{\prime\prime}{,,,}_1\binom{0}{,}_2 &&+ \binom{\prime\prime\prime}{,,}_1\binom{0}{,}_2 \\
&- \binom{0}{,}_1\binom{\prime\prime}{,,,}_2 &&+ \binom{\prime}{0}_1\binom{\prime\prime}{,,,}_2 &&- \binom{\prime\prime}{0}_1\binom{\prime}{,,,}_2 &&+ \binom{\prime\prime\prime}{0}_1\binom{\prime}{,,}_2 \\
&+ \binom{0}{,,,}_1\binom{\prime\prime}{,}_2 &&- \binom{\prime}{,,,}_1\binom{\prime\prime}{0}_2 &&+ \binom{\prime\prime}{,,,}_1\binom{\prime}{0}_2 &&- \binom{\prime\prime\prime}{,,}_1\binom{\prime}{0}_2 \\
&+ \binom{0}{,}_1\binom{\prime\prime\prime}{,,}_2 &&- \binom{\prime}{0}_1\binom{\prime\prime\prime}{,,}_2 &&+ \binom{\prime\prime}{0}_1\binom{\prime\prime\prime}{,}_2 &&- \binom{\prime\prime\prime}{0}_1\binom{\prime\prime}{,}_2 \\
&- \binom{0}{,,}_1\binom{\prime\prime\prime}{,}_2 &&+ \binom{\prime}{,,}_1\binom{\prime\prime\prime}{0}_2 &&- \binom{\prime\prime}{,}_1\binom{\prime\prime\prime}{0}_2 &&+ \binom{\prime\prime\prime}{,}_1\binom{\prime\prime}{0}_2 .
\end{aligned}
\tag{217}
$$

Wir bilden nun vor allem die, bei Ausserachtlassung des Stellenzeigers von einander verschiedenen, hier vorkommenden Symbole und erhalten mit Rücksicht auf die Gleichungen (215) ganz leicht:

$$
\begin{aligned}
&\binom{\prime}{0} = +\varphi, \quad \binom{\prime\prime}{0} = +\varphi^2 + \varphi', \quad \binom{\prime\prime\prime}{0} = +\varphi^3 + 3\varphi\varphi' + \varphi'', \\
&\binom{0}{,} = -\varphi, \quad \binom{0}{,,} = +\varphi^2 - \varphi', \quad \binom{0}{,,,} = -\varphi^3 + 3\varphi\varphi' - \varphi'', \\
&\binom{\prime\prime}{,} = -\varphi^3 - \varphi\varphi', \quad \binom{\prime\prime\prime}{,} = -\varphi^4 - 3\varphi^2\varphi' - \varphi\varphi'', \\
&\binom{\prime}{,,} = +\varphi^3 - \varphi\varphi', \quad \binom{\prime}{,,,} = -\varphi^4 + 3\varphi^2\varphi' - \varphi\varphi'', \\
&\binom{\prime\prime\prime}{,,} = +\varphi^5 + 2\varphi^3\varphi' - 3\varphi\varphi'^2 + \varphi^2\varphi'' - \varphi'\varphi'', \\
&\binom{\prime\prime}{,,,} = -\varphi^5 + 2\varphi^3\varphi' + 3\varphi\varphi'^2 - \varphi^2\varphi'' - \varphi'\varphi''.
\end{aligned}
\tag{218}
$$

Eine aufmerksame Betrachtung der eben erhaltenen Werthe und der einzelnen Glieder in (217) überzeugt uns nun alsbald, dass sich letztere in je viergliedrige Gruppen zusammenstellen lassen, dermassen, dass die Entwicklungsposten eines jeden Gliedes mit den Entwicklungsposten eines jeden anderen Gliedes derselben Gruppe verglichen, einerlei Buchstaben- und Coefficientenwerthe ausweisen und sich höchstens in den Zeichen von einander unterscheiden werden. Bei der Berechnung von $X_4$ werden sonach zweckmässig alle Glieder einer und derselben solchen Gruppe zusammenzunehmen sein und wir bekommen so, etwa für die Gruppe:

$$+ \binom{0}{,,}_1\binom{\prime}{,,,}_2 - \binom{0}{,,}_1\binom{\prime\prime\prime}{,}_2 - \binom{\prime\prime}{0}_1\binom{\prime}{,,,}_2 + \binom{\prime\prime}{0}_1\binom{\prime\prime\prime}{,}_2$$

durch wirkliche Entwicklung ihrer Glieder:

$$
\begin{aligned}
+ \binom{0}{,,}_1\binom{\prime}{,,,}_2 &= -\varphi_1^2\varphi_2^4 + 3\varphi_1^2\varphi_2^2\varphi'_2 - \varphi_1^2\varphi_2\varphi''_2 + \varphi'_1\varphi_2^4 - 3\varphi'_1\varphi_2^2\varphi'_2 + \varphi'_1\varphi_2\varphi''_2 \\
- \binom{0}{,,}_1\binom{\prime\prime\prime}{,}_2 &= +\varphi_1^2\varphi_2^4 + 3\varphi_1^2\varphi_2^2\varphi'_2 + \varphi_1^2\varphi_2\varphi''_2 - \varphi'_1\varphi_2^4 - 3\varphi'_1\varphi_2^2\varphi'_2 - \varphi'_1\varphi_2\varphi'' \\
- \binom{\prime\prime}{0}_1\binom{\prime}{,,,}_2 &= +\varphi_1^2\varphi_2^4 - 3\varphi_1^2\varphi_2^2\varphi'_2 + \varphi_1^2\varphi_2\varphi''_2 + \varphi'_1\varphi_2^4 - 3\varphi'_1\varphi_2^2\varphi'_2 + \varphi'_1\varphi_2\varphi''_2 \\
+ \binom{\prime\prime}{0}_1\binom{\prime\prime\prime}{,}_2 &= -\varphi_1^2\varphi_2^4 - 3\varphi_1^2\varphi_2^2\varphi'_2 - \varphi_1^2\varphi_2\varphi''_2 - \varphi'_1\varphi_2^4 - 3\varphi'_1\varphi_2^2\varphi'_2 - \varphi'_1\varphi_2\varphi''_2
\end{aligned}
$$

und sonach:

$$\binom{0}{,,}_1\binom{\prime}{,,,}_2 - \binom{0}{,,}_1\binom{\prime\prime\prime}{,}_2 - \binom{\prime\prime}{0}_1\binom{\prime}{,,,}_2 + \binom{\prime\prime}{0}_1\binom{\prime\prime\prime}{,}_2 = -12\varphi_2^2\varphi'_1\varphi'_2 .$$

hierauf:

$$\varphi_1 \varphi'_1 \varphi_2 \varphi'_2 = \frac{A'^2 \varphi_1^2 \varphi_2^2 + A'B'(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + B'^2}{16 \varphi_1^2 \varphi_2^2 + 8A(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 4A^2},$$

das sich, mit Zuziehung der Werthe (221) ohne Anstand weiter behandeln lässt. Alle übrigen symmetrischen Functionen brauchen nicht direct aus der Gleichung (212), sondern können zweckmässig aus bereits früher ermittelten symmetrischen Functionen abgeleitet werden, wobei wir von der Gleichung:

$$\varphi^4 + A\varphi^2 + B = 0 \tag{222}$$

nur zur Wegschaffung aller vierten oder höheren Potenzen von $\varphi$ Gebrauch machen. So verwenden wir zur Berechnung von $\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2$ die Gleichung:

$$-\frac{1}{4} A'B' = \varphi_1 \varphi_2 (\varphi_1 \varphi'_1 + \varphi_2 \varphi'_2)(\varphi_1 \varphi'_2 + \varphi_2 \varphi'_1) = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \varphi_1 \varphi'_1 \varphi_2 \varphi'_2 + \varphi_1^2 \varphi_2^2 (\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2),$$

aus welcher dasselbe mit Leichtigkeit hervorgeht und dann zur Ermittlung von $\varphi_1 \varphi_1'' + \varphi_2 \varphi_2''$ dient, dessen Werth aus der Gleichung:

$$-\frac{1}{2} A'' = \varphi_1 \varphi_1'' + \varphi_2 \varphi_2'' + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2$$

gezogen werden kann. Zur Bestimmung von $\varphi_1^4 \varphi_2 \varphi_2'' + \varphi_2^4 \varphi_1 \varphi_1''$ entfernen wir zuvörderst $\varphi_1^4$ und $\varphi_2^4$ mit Hülfe der Gleichung (222) und bekommen zunächst:

$$\varphi_1^4 \varphi_2 \varphi_2'' + \varphi_2^4 \varphi_1 \varphi_1'' = -A(\varphi_1^2 \varphi_2 \varphi_2'' + \varphi_2^2 \varphi_1 \varphi_1'') - B(\varphi_1 \varphi_1'' + \varphi_2 \varphi_2'');$$

den hier erscheinenden Werth von $\varphi_1^2 \varphi_2 \varphi_2'' + \varphi_2^2 \varphi_1 \varphi_1''$ erfahren wir aber am geeignetsten durch vorläufige Bestimmung von $\varphi_1^2 \varphi_1'^2 + \varphi_2^2 \varphi_2'^2$ vermittelst der Relation:

$$\frac{1}{4} A'^2 = \varphi_1^2 \varphi_1'^2 + \varphi_2^2 \varphi_2'^2 + 2 \varphi_1 \varphi'_1 \varphi_2 \varphi'_2,$$

und hierauf folgende Ermittlung von $\varphi_1^2 \varphi_2'^2 + \varphi_2^2 \varphi_1'^2$ mit Hülfe von:

$$-A(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) = (\varphi_1^2 \varphi_1'^2 + \varphi_2^2 \varphi_2'^2) + (\varphi_1^2 \varphi_2'^2 + \varphi_2^2 \varphi_1'^2),$$

deren Werthe uns ohnedem für das Folgende bekannt sein müssen. Die Gleichung aber für $\varphi_1^2 \varphi_2 \varphi_2'' + \varphi_2^2 \varphi_1 \varphi_1''$ ist:

$$\frac{1}{2} B'' = (\varphi_1^2 \varphi_2'^2 + \varphi_2^2 \varphi_1'^2) + 4 \varphi_1 \varphi'_1 \varphi_2 \varphi'_2 + (\varphi_1^2 \varphi_2 \varphi_2'' + \varphi_2^2 \varphi_1 \varphi_1'').$$

Nachdem wir so sämmtliche symmetrische Functionen, welche wir für (220) benöthigen, ermittelt haben, substituiren wir dieselben in eben besagte Gleichung und erhalten:

$$\varphi_1 \varphi_2 X_4 = -4B(A^2 - 4B) + \frac{AB'^2}{B} + 4A''B - 2AB'' +$$

$$+ \frac{1}{A^2 - 4B}(-10AA'^2B + 5A^2A'B' + 20A'BB' - 10AB'^2).$$

Im Zähler des hier auftretenden, mit dem Nenner $A^2 - 4B$ versehenen Bruches, erscheinen die beiden Glieder $5A^2A'B' + 20A'BB'$, die auch folgendermassen geschrieben werden können:

$$5A^2A'B' + 20A'BB' = 5A'B'(A^2 - 4B) + 40A'BB',$$

wodurch an die Stelle der erwähnten beiden Glieder das Eine Glied $40A'BB'$ zu stehen kömmt, ausserdem aber noch ein Glied $5A'B'$ zu den übrigen, ungebrochenen, dem oben besagten Bruche vorangehenden Gliedern hinzutritt. Wir bekommen so:

$$\varphi_1\varphi_2 X_4 = -4B(A^2 - 4B) + 5A'B' + \frac{AB'^2}{B} + 4A''B - 2AB'' +$$
$$+ \frac{1}{A^2 - 4B}(-10AA'^2B + 40A'BB' - 10AB'^2).$$

Schliesslich multipliciren wir noch diesen ganzen Ausdruck mit $-4B^2(A^2 - 4B)^2$, wodurch in den Ausdrücken für die übrigen Coefficienten Brüche vermieden werden und erhalten dann:

$$-4\varphi_1\varphi_2 B^2(A^2 - 4B)^2 X_4 = GX_4 = \mathfrak{X}_4$$

in derjenigen Gestalt, in welcher wir dasselbe unter (253) mit den übrigen Coefficienten zusammengestellt haben.

Wir wollen auch bei Berechnung der übrigen Coefficienten, zur Erlangung eines gleichförmigen Resultates und einer vollen Übereinstimmung unter den Rechnungen derjenigen Leser, welche diese Entwicklungen wiederholen wollten und weil sich dadurch häufig bedeutende Abkürzungen ergeben, immer die früher angegebene Reduction vornehmen. Wir ordnen nämlich überhaupt zuvörderst die für die Coefficienten gewonnenen Ausdrücke in $A$ und $B$ nach Potenzen von $A^2 - 4B$ und erhalten sofort Formen wie:

$$H + J(A^2 - 4B) + K(A^2 - 4B)^2 + \ldots\ldots;$$

hierauf heben wir, und zwar am besten zuerst in $H$, alle Glieder heraus, die mit der zweiten oder einer höheren Potenz von $A$ verknüpft sind und also die Form $A^2P$ besitzen, schreiben statt derselben $P(A^2 - 4B) + 4BP$ und behalten $4BP$ bei den Gliedern von $H$, während wir $P$ den Gliedern von $J$ beigesellen — mit andern Worten: wir dividiren alle Glieder wie $A^2P$ in $H$ durch $A^2 - 4B$, behalten den Rest in $H$ und tragen den ganzen Quotienten nach $J$, welches wir dann eben so behandeln u. s. w.

Wir geben noch, ehe wir zur Aufsuchung von $\mathfrak{X}_3$ schreiten, die im Laufe dieser Entwicklungen in Anwendung kommenden symmetrischen Functionen in jener Aufeinanderfolge, in welcher sie bei der wirklichen Berechnung am geeignetsten aus einander abgeleitet werden, indem wir die Aufsuchung der hiezu dienlichen, jedesmal leicht auffindbaren Relationen dem Leser überlassen, welchem wir ohnediess über das hiebei einzuhaltende Verfahren, durch die im Vorigen Behandelten, genügende Andeutungen gegeben haben:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -A, \qquad \varphi_1^2\,\varphi_2^2 = B,$$

$$\varphi_1^4 + \varphi_2^4 = A^2 - 2B, \quad (\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2 = A^2 - 4B, \quad \varphi_1^6 + \varphi_2^6 = -A^3 + 3AB$$

$$\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2' = -\frac{1}{2}A', \quad \varphi_1^2\varphi_2\varphi_2' + \varphi_2^2\varphi_1\varphi_1' = \frac{1}{2}B', \quad \varphi_1^3\varphi_1' + \varphi_2^3\varphi_2' = \frac{1}{2}AA' - \frac{1}{2}$$

$$\varphi_1\varphi_1'\varphi_2\varphi_2' = \frac{1}{A^2-4B}\left(-\frac{1}{4}A'^2B + \frac{1}{4}AA'B' - \frac{1}{4}B'^2\right),$$

$$\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 = \frac{1}{A^2-4B}\left(-\frac{1}{4}AA'^2 + A'B' - \frac{AB'^2}{4B}\right),$$

$$\varphi_1\varphi_1'' + \varphi_2\varphi_2'' = -\frac{1}{2}A'' + \frac{1}{A^2-4B}\left(\frac{1}{4}AA'^2 - A'B' + \frac{AB'^2}{4B}\right),$$

(224)
$$\varphi_1^2\varphi_1'^2 + \varphi_2^2\varphi_2'^2 = \frac{1}{4}A'^2 + \frac{1}{A^2-4B}\left(\frac{1}{2}A'^2B - \frac{1}{2}AA'B' + \frac{1}{2}B'^2\right),$$

$$\varphi_1^2\varphi_2'^2 + \varphi_2^2\varphi_1'^2 = \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{A^2-4B}\left(\frac{1}{2}A'^2B - \frac{1}{2}AA'B' + \frac{1}{2}B'^2\right),$$

$$\varphi_1^2\varphi_2\varphi_2'' + \varphi_2^2\varphi_1\varphi_1'' = \frac{1}{2}B'' - \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{A^2-4B}\left(\frac{1}{2}A'^2B - \frac{1}{2}AA'B' + \frac{1}{2}B'^2\right),$$

$$\varphi_1^2\varphi_1'' + \varphi_2^2\varphi_2'' = -\frac{1}{4}A'^2 + \frac{1}{2}AA'' - \frac{1}{2}B'' + \frac{1}{A^2-4B}\left(-\frac{3}{2}A'^2B + \frac{3}{2}AA'B' - \frac{3}{2}B'\right.$$

$$\varphi_1\varphi_1''' + \varphi_2\varphi_2''' = -\frac{1}{2}A''' + \frac{1}{A^2-4B}\left(-\frac{3}{8}A'^3 + \frac{3}{4}AA'A'' - \frac{3}{2}A''B' - \frac{3A'B'^2}{8B} - \frac{3}{2}A'B\right.$$

$$\left. + \frac{3AB'B''}{4B} - \frac{3AB'^3}{8B^2}\right) + \frac{1}{(A^2-4B)^2}\left(-3A'^3B + \frac{9}{2}AA'^2B' - 9A'B'^2 + \frac{3A}{2}\right.$$

Es wäre nun zunächst $GX_3 = \mathfrak{X}_3$ zu ermitteln und wir gelangen zu seinem Werthe so, wie wir den zweiten Coefficienten im vorigen Paragraphe berechnet haben. Es folgt näı aus der allgemeinen Relation (107) für unseren Fall:

$$X_3 = -X_4'$$

und somit:

(225)
$$\mathfrak{X}_3 = -\mathfrak{X}_4' + \frac{GG'}{G^2}\mathfrak{X}_4.$$

In diese Gleichung substituiren wir den aus (223) hervorgehenden Werth von $G^2$, nämlich:

(226)
$$G^2 = 16\,B^2\,(A^2 - 4\,B)^2, \quad \text{woraus:} \quad \frac{GG'}{G^2} = \frac{5\,B}{2\,B} + \frac{6\,AA' - 12\,B'}{A^2 - 4\,B}$$

und den bereits bekannten Werth (253) von $\mathfrak{X}_4$. Nachdem wir schliesslich noch sämmtliche, der zweiten oder einer höheren Potenz von $A$ verknüpften Glieder, der bei Berechnung von auseinandergesetzten Behandlung unterworfen haben, erhalten wir endlich den gewünschten W von $\mathfrak{X}_3$ in derjenigen Form, in welcher wir ihn unter (254) aufgenommen haben.

voraussetzen, können ferner in die auf eine solche Weise und mit so geordneten Coefficienten hi stellte Differentialgleichung anstatt $y$, der Reihe nach, erst $e^{\pm\int\varphi_1 dx}$, dann $e^{\pm\int\varphi_2 dx}$ substituiren die beiden so erhaltenen offenbar identischen Gleichungen, in denen jetzt nur lediglich die $\varphi_1$ und vorhanden gedacht werden müssen, in mehrere zerlegen, die Glieder, denen gleiche Ordnungsza entsprechen, zusammennehmend und in Eine Gleichung vereinigend. Die so zu zerlegenden zwei Gleicl gen sind in der Einen Form:

$$(229)\quad (\overset{1}{\mathfrak{X}}_4 + \overset{2}{\mathfrak{X}}_4)(\varphi^4 + 6\varphi^2\varphi' + 3\varphi'^2 + 4\varphi\varphi'' + \varphi''') + (\overset{1}{\mathfrak{X}}_3 + \overset{2}{\mathfrak{X}}_3)(\varphi^3 + 3\varphi\varphi' + \varphi'') + \\ + (\overset{1}{\mathfrak{X}}_2 + \overset{2}{\mathfrak{X}}_2 + \overset{3}{\mathfrak{X}}_2)(\varphi^2 + \varphi') + (\overset{1}{\mathfrak{X}}_1 + \overset{2}{\mathfrak{X}}_1 + \overset{3}{\mathfrak{X}}_1)\varphi + \overset{1}{\mathfrak{X}}_0 + \overset{2}{\mathfrak{X}}_0 + \overset{3}{\mathfrak{X}}_0 =$$

enthalten und gehen aus ihr hervor, wenn man dem $\varphi$ einmal den Stellenzeiger 1, ein andermal Stellenzeiger 2 anfügt. Es würde nicht nützen und auch nicht schaden die Coefficienten (228) aus n als den in ihnen ersichtlichen Theilen zusammenzusetzen; der Gang der Rechnung würde die Über gung bringen, dass sämmtliche hinzugefügte Bestandtheile in Folge des Umstandes der Nulle gleich dass der erste von ihnen erwiesenermassen zweitheilig ist. Die so durchgeführte Rechnung leitet folgenden Systeme von Gleichungen:

$$(230)\quad \begin{aligned} \varphi_1^4 \overset{1}{\mathfrak{X}}_4 + \varphi_1^2 \overset{1}{\mathfrak{X}}_2 + \overset{1}{\mathfrak{X}}_0 &= 0 \\ \varphi_2^4 \overset{1}{\mathfrak{X}}_4 + \varphi_2^2 \overset{1}{\mathfrak{X}}_2 + \overset{1}{\mathfrak{X}}_0 &= 0; \end{aligned}$$

$$(231)\quad \begin{aligned} 6\varphi_1^2 \varphi'_1 \overset{1}{\mathfrak{X}}_4 + \varphi_1^3 \overset{1}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi'_1 \overset{1}{\mathfrak{X}}_2 + \varphi_1 \overset{1}{\mathfrak{X}}_1 &= 0 \\ 6\varphi_2^2 \varphi'_2 \overset{1}{\mathfrak{X}}_4 + \varphi_2^3 \overset{1}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi'_2 \overset{1}{\mathfrak{X}}_2 + \varphi_2 \overset{1}{\mathfrak{X}}_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$(232)\quad \begin{aligned} (3\varphi_1'^2 + 4\varphi_1\varphi''_1)\overset{1}{\mathfrak{X}}_4 + \varphi_1^4 \overset{2}{\mathfrak{X}}_4 + 3\varphi_1\varphi'_1 \overset{1}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi_1^2 \overset{2}{\mathfrak{X}}_2 + \overset{2}{\mathfrak{X}}_0 &= 0 \\ (3\varphi_2'^2 + 4\varphi_2\varphi''_2)\overset{1}{\mathfrak{X}}_4 + \varphi_2^4 \overset{2}{\mathfrak{X}}_4 + 3\varphi_2\varphi'_2 \overset{1}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi_2^2 \overset{2}{\mathfrak{X}}_2 + \overset{2}{\mathfrak{X}}_0 &= 0, \end{aligned}$$

$$(233)\quad \begin{aligned} \varphi'''_1 \overset{1}{\mathfrak{X}}_4 + 6\varphi_1^2\varphi'_1 \overset{2}{\mathfrak{X}}_4 + \varphi''_1 \overset{1}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi_1^3 \overset{2}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi'_1 \overset{2}{\mathfrak{X}}_2 + \varphi_1 \overset{2}{\mathfrak{X}}_1 &= 0 \\ \varphi'''_2 \overset{1}{\mathfrak{X}}_4 + 6\varphi_2^2\varphi'_2 \overset{2}{\mathfrak{X}}_4 + \varphi''_2 \overset{1}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi_2^3 \overset{2}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi'_2 \overset{2}{\mathfrak{X}}_2 + \varphi_2 \overset{2}{\mathfrak{X}}_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$(234)\quad \begin{aligned} (3\varphi_1'^2 + 4\varphi_1\varphi''_1)\overset{2}{\mathfrak{X}}_4 + 3\varphi_1\varphi'_1 \overset{2}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi_1^2 \overset{3}{\mathfrak{X}}_2 + \overset{3}{\mathfrak{X}}_0 &= 0 \\ (3\varphi_2'^2 + 4\varphi_2\varphi''_2)\overset{2}{\mathfrak{X}}_4 + 3\varphi_2\varphi'_2 \overset{2}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi_2^2 \overset{3}{\mathfrak{X}}_2 + \overset{3}{\mathfrak{X}}_0 &= 0, \end{aligned}$$

$$(235)\quad \begin{aligned} \varphi'''_1 \overset{2}{\mathfrak{X}}_4 + \varphi''_1 \overset{2}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi'_1 \overset{3}{\mathfrak{X}}_2 + \varphi_1 \overset{3}{\mathfrak{X}}_1 &= 0 \\ \varphi'''_2 \overset{2}{\mathfrak{X}}_4 + \varphi''_2 \overset{2}{\mathfrak{X}}_3 + \varphi'_2 \overset{3}{\mathfrak{X}}_2 + \varphi_2 \overset{3}{\mathfrak{X}}_1 &= 0, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen sind es, die wir zur Berechnung von $\mathfrak{X}_2$ und $\mathfrak{X}_1$ benutzen wollen, indem aus der früheren Rechnung die Werthe der einzelnen Bestandtheile von $\mathfrak{X}_4$ und $\mathfrak{X}_3$ bereits bek sind, nämlich:

Nach Durchführung der vorzunehmenden Substitutionen und Umwandlung der mit $A^2$ verknüpft erscheinenden Glieder auf die bei Berechnung des ersten Coefficienten bereits erwähnte Weise, erhalten wir zuletzt:

$$\overset{2}{\mathfrak{X}}_2 = (A^2 - 4B)^4 [8B^2B'' - 4BB'^2] + (A^2 - 4B)^3 [-8AA'B^2B' - 48AA''B^3 - 4B^2B'^2 + \\ + 92A'^2B^3 + 96B^3B''] + (A^2 - 4B)^2 [480A'^2B^4 - 480AA'B^3B' + 480B^3B'^2]. \tag{243}$$

Zur Berechnung endlich von $\overset{3}{\mathfrak{X}}_2$ wenden wir uns an die beiden Gleichungen (234), die wir ganz auf dieselbe Weise behandeln und die uns auch das verlangte $\overset{3}{\mathfrak{X}}_2$ zuvörderst in der Gestalt:

$$(A^2 - 4B)\overset{3}{\mathfrak{X}}_2 = \overset{3}{\mathfrak{X}}_4 \left[\frac{1}{4}A'^2 - 2AA'' - \frac{B'^2}{4B} + 4B'' + \frac{8A'^2B - 8AA'B' + 8B'^2}{A^2 - 4B}\right] + \left(3B' - \frac{3}{2}AA'\right)\overset{3}{\mathfrak{X}}_3, \tag{244}$$

nach gehörig vollbrachten Substitutionen aber in entwickelter Form liefern, in welcher wir es jedoch, seiner grösseren Gliederzahl wegen, hier nicht niederschreiben, sondern auf den unter (255) vollständig aufgeführten Werth von $\mathfrak{X}_2$ verweisen. Dort aber lassen sich die dem $\overset{1}{\mathfrak{X}}_2$, $\overset{2}{\mathfrak{X}}_2$ und $\overset{3}{\mathfrak{X}}_2$ angehörigen Glieder sehr gut dadurch von einander unterscheiden, dass sie beziehungsweise mit je 0, oder 2, oder 4 Strichen versehen sind.

Wir kommen nun zur Berechnung von $\mathfrak{X}_1$, das uns, bis auf seine Weitläufigkeit, gleichfalls keinerlei Schwierigkeiten entgegenstellt. Um namentlich zuerst zum Werthe von $\overset{1}{\mathfrak{X}}_1$ zu gelangen, benützen wir das Gleichungspaar (231), multipliciren die erste derselben mit $\varphi_1$, die zweite mit $\varphi_2$ und addiren. Diess gibt:

$$6(\varphi_1^3\varphi_1' + \varphi_2^3\varphi_2')\overset{1}{\mathfrak{X}}_4 + (\varphi_1^4 + \varphi_2^4)\overset{1}{\mathfrak{X}}_3 + (\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2')\overset{1}{\mathfrak{X}}_2 + (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\overset{1}{\mathfrak{X}}_1 = 0, \tag{245}$$

und nach gehörig vollbrachten Substitutionen:

$$A\overset{1}{\mathfrak{X}}_1 = -8B^2B'(A^2 - 4B)^5 + 8AA'B^3(A^2 - 4B)^4 + (A^2 - 4B)^3(-64AA'B^4 + 128B^4B').$$

Wiewohl nun diese Gleichung auf den ersten Anblick keine allgemeine Division durch $A$ zu gestatten scheint, so überzeugt man sich dennoch leicht vom Gegentheile, wenn man statt des Gliedes $128B^4B'$ im Multiplicator von $(A^2 - 4B)^3$ schreibt: $32A^2B^3B' - 32B^3B'(A^2 - 4B)$; die $32A^2B^3B'$ verbleiben im Factor von $(A^2 - 4B)^3$, die $-32B^3B'$ aber wandern zum Gliede mit $(A^2 - 4B)^4$ und hinterlassen daselbst, neuerdings auf dieselbe Weise behandelt, ein Glied $-8A^2B^2B'$, während $+8B^2B'$ zu dem mit $(A^2 - 4B)^5$ verknüpften Gliede hinzutritt und sich mit demselben aufhebt. Hierdurch ist aber gleichzeitig die Theilung der ganzen Gleichung durch $A$ ermöglicht, nach deren Durchführung wir erhalten:

$$\overset{1}{\mathfrak{X}}_1 = (A^2 - 4B)^4 [8A'B^3 - 8AB^2B'] + (A^2 - 4B)^3 [32AB^3B' - 64A'B^4]. \tag{246}$$

Wir werden auch in den beiden übrigen Theilen von $\mathfrak{X}_1$ die allgemeine Theilbarkeit durch $A$ auf die angegebene Weise herbeizuführen genöthigt sein. Sind wir nämlich, nach vollbrachten Substitutionen und ersten Reductionen, zuvörderst zu Formen gelangt wie:

und schreiben in unserer zu construirenden Differentialgleichung:

$$\mathfrak{X}_4\, y^{IV} + \mathfrak{X}_3\, y''' + \mathfrak{X}_2\, y'' + \mathfrak{X}_1\, y' + \mathfrak{X}_0\, y = 0 \tag{251}$$

statt $y$, der Reihe nach, einmal $y_1$, dann $y_2$, dann $y_3$ und endlich $y_4$, so bekommen wir folgende vier identische Gleichungen:

$$\mathfrak{X}_4\, \eta_1^{(4)} + \mathfrak{X}_3\, \eta_1^{(3)} + \mathfrak{X}_2\, \eta_1^{(2)} + \mathfrak{X}_1\, \eta_1^{(1)} + \mathfrak{X}_0\, \eta_1^{(0)} = 0$$
$$\mathfrak{X}_4\, \eta_2^{(4)} + \mathfrak{X}_3\, \eta_2^{(3)} + \mathfrak{X}_2\, \eta_2^{(2)} + \mathfrak{X}_1\, \eta_2^{(1)} + \mathfrak{X}_0\, \eta_2^{(0)} = 0$$
$$\mathfrak{X}_4\, \eta_3^{(4)} + \mathfrak{X}_3\, \eta_3^{(3)} + \mathfrak{X}_2\, \eta_3^{(2)} + \mathfrak{X}_1\, \eta_3^{(1)} + \mathfrak{X}_0\, \eta_3^{(0)} = 0$$
$$\mathfrak{X}_4\, \eta_4^{(4)} + \mathfrak{X}_3\, \eta_4^{(3)} + \mathfrak{X}_2\, \eta_4^{(2)} + \mathfrak{X}_1\, \eta_4^{(1)} + \mathfrak{X}_0\, \eta_4^{(0)} = 0,$$

aus deren Addition eine neue Gleichung hervorgeht, in welcher, nach Benützung der Werthe (250), $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ und $\varphi_4$ erscheinen werden. Nachdem man sofort für $\varphi_3$ und $\varphi_4$ beziehungsweise $-\varphi_1$ und $-\varphi_2$ gesetzt, und die auf diese Weise auftauchenden symmetrischen Functionen in $\varphi_1$ und $\varphi_2$ durch ihre bekannten Werthe wiedergegeben hat, erhält man zur Bestimmung von $\mathfrak{X}_0$ nachstehende einfache Relation:

$$4\,\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_4\left[-2A^2 + 4B + 4A'' + \frac{1}{A^2 - 4B}\left(-\frac{1}{2}AA'^2 + 2A'B' - \frac{AB'^2}{2B}\right)\right] + 3A'\,\mathfrak{X}_3 + 2A\,\mathfrak{X}_2, \tag{252}$$

die, nach gehörig durchgeführten Substitutionen und Reductionen in den unter (257) aufgeführten Werth übergeht. Nachdem wir so endlich zur Kenntniss sämmtlicher Coefficientenwerthe gelangt sind, stellen wir dieselben in unmittelbarer Aufeinanderfolge hin.

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_4 = {} & 16B^3(A^2 - 4B)^4 + (A^2 - 4B)^3\,[-20A'B^2B' - 16A''B^3 + 8AB^2B'' - 4ABB'^2] \\ & + (A^2 - 4B)^2\,[40AB^2B'^2 + 40AA'^2B^3 - 160A'B^3B'].\end{aligned} \tag{253}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_3 = {} & -8B^3B'(A^2 - 4B)^4 + (A^2 - 4B)^3\,[-32AA'B^3 + 64B^3B' + 28A''B^2B' \\ & - 6A'BB'^2 + 12A'B^2B'' + 16A'''B^3 + 12ABB'B'' - 8AB^2B''' - 6AB'^3] \\ & + (A^2 - 4B)^2\,[40A'^3B^3 - 80AA'A''B^3 + 160A''B^3B' - 20AA'^2B^2B' + 120A'B^2B'^2 \\ & + 20ABB'^3 - 80AB^2B'B'' + 160A'B^3B''] + (A^2 - 4B)\,[-480AA'^2B^3B' \\ & + 960A'B^3B'^2 - 160AB^2B'^3 + 320A'^3B^4].\end{aligned} \tag{254}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_2 = {} & (A^2 - 4B)^4\,[16AB^3 - 4BB'^2 + 8B^3B''] + (A^2 - 4B)^3\,[-8AA'B^2B' - 4B^2B'^2 - 48AA''B^3 \\ & + 92A'^2B^3 + 96B^3B'' + 9A'B'^2 - 18A'BB'B'' + 8A''BB'^2 - 16A''B^2B'' + 12A'B^3B'''] \\ & + (A^2 - 4B)^2\,[480A'^2B^4 - 480AA'B^3B' + 480B^3B'^2 + 18ABB'^2B'' - 17AB'^4 + 25A'^2B^2B' \\ & + 36A'^2A''B^3 - 128A''B^3B'' + 32AB^2B'^2 + 32AA'^2B^3 + 48A'B^3B''' - 24AB^2B'B''' \\ & + 25A'BB'^2 + 8AA'^2BB'^2 - 16AA'^2B^2B'' - 60A'B^2B'B'' - 2AA'A''B^2B' + 40A''B^2B'^2 \\ & - 24AA'A'''B^3 + 48A'''B^3B'] + (A^2 - 4B)\,[18ABB'^4 - 16AB^2B'^2B'' - 112AA'^2B^2B'^2 \\ & - 50AA'^4B^3 - 16AA'^2B^3B'' - 32AA'A''B^3B' + 168A'B^2B'^3 + 440A'^3B^3B' + 64A'B^3B'B'' \\ & + 32A''B^3B'^2 + 32A'^2A''B^4] - 160AB^2B'^4 - 160AA'^4B^4 - 960AA'^2B^3B'^2 \\ & + 1280A'^3B^4B' + 1280A'B^3B'^3.\end{aligned} \tag{255}$$

$$\mathfrak{X}_1 = (A^2-4B)^4\,[8A'B^3 - 8AB^2B' + 12BB'B'' - 8B^2B''' - 6B'^3] + (A^2-4B)^3\,[32AB^2B'$$
$$- 64A'B^4 + 32AA'B^2B'' - 16AA'BB'^2 - 68B^2B'B'' + 12BB'^3 - 76A'A''B^3 - 78A^2B^2B'$$
$$+ 32AA''B^2B' + 8AA'''B^3 - 16B^2B''' - 6A''BB'B'' + 4A''B^2B''' + 3A''B'^3 - 4A'''B^2B''$$
$$+ 2A'''BB'^2] + (A^2-4B)^2\,[100AA'^2B^3 - 760A^2B^2B' + 300AA'B^2B'^2 - 200B^2B'^3$$
$$- 160A'A''B^4 - 160B^2B'B'' + 80AA''B^2B' + 80AA'B^2B'' - 4A^2A'''B^3 - 16A'''B^2B'^2$$
$$+ 10AA'A'''B^2B' + 8A^2B^2B'' - 4A^2BB'^2 + 3A^2A''B^2B' + 12A'A^2B^3 + 8AA'A''B^2B''$$
$$+ 4AA'A''BB'^2 + 16A''B^2B'B'' + 9A''BB'^3 - 30A'BB'^2B'' + 22A'B'^4 - 28A'B^2B''^2 \tag{256}$$
$$+ 6ABB'B''^2 - 3AB'^2B'' - 14AA''^2B^2B' + 12AA'^2BB'B'' - 8AA'^2B^2B''' - 6AA'^2B'^3$$
$$+ 20A'B^2B'B''' - 2ABB'^2B'''] + (A^2-4B)\,[160AA'^2B^4 + 480AA'B^3B'^2 - 960A^2B^4B'$$
$$- 320B^3B'^3 + 20A^5B^4 + 8A^2B^2B'^3 - 10AA^4B^3B' - 22AA'^2A''B^3 - 58AA'A''B^2B'^2$$
$$+ 124A^2A''B^2B' + 36A''B^2B'^2 + 52A'BB'^4 - 14AA'^2BB'^3 - 36A^3B^2B'' - 124A'B^2B'^2B''$$
$$+ 58AA'^2B^2B'B'' + 22ABB'^2B'' - 16AB'^5] + 40AA'^2B^2B'^3 - 60AA'^4B^2B' + 20ABB'^5$$
$$- 120A'B^2B'^4 + 40A^5B^4 + 80A^3B^3B'^2.$$

$$\mathfrak{X}_0 = 16B^4(A^2-4B)^4 + (A^2-4B)^3\,[-20AB^2B'^2 + 4AB^2B'' - 100A'B^3B' - 80A''B^4$$
$$+ 8BB'^2B'' - 8B'^4 + 16B^2B''^2 - 12B^2B'B'''] + (A^2-4B)^2\,[200AA'^2B^4 - 800A'B^4B'$$
$$+ 200AB^2B'^3 + 62AA''B^2B'^2 - 68A'A''B^3B' + 32A^2B^3B'^2 - 86AA'B^2B'B'' + 28AA'BB'^3$$
$$- 64AA''B^3B'' + 64B^3B''^2 + 64A''^2B^4 + 24AA'''B^3B' - 48B^3B'B''' - 48A'A'''B^4 \tag{257}$$
$$+ 24B^2B'^2B'' + 24AA'B^3B''' - 28BB'^4 + 76A^2B^3B''] + (A^2-4B)\,[-100AA'^2B^2B'$$
$$+ 4AA'B^2B'^2 - 32B^2B'^2B'' + 32AA'B^2B'B'' + 16AA'^2A''B^4 - 64A'A''B^4B' + 16AA''B^3B'^2$$
$$+ 40A'^4B^4 - 104A'^2B^2B'^2 - 64B^2B'^4 - 32A'^2B^4B''] + 640AA'^2B^4B' + 640AA'B^3B'^3$$
$$- 320A'^4B^5 - 1920A'^2B^4B'^2 - 320B^2B'^4.$$

Man sieht wohl, wie sehr diese Ausdrücke für die Differentialgleichungs-Coefficienten an Länge selbst diejenigen übertreffen, die wir im nächstvorhergehenden Paragraphe für die Gleichungen des dritten Grades erhielten und vermuthet sonach, dass die Aufstellung derjenigen Differentialgleichung der vierten Ordnung, die der allgemeinsten algebraischen des vierten Grades entspricht, in beinahe undurchführbare Rechnungsentwicklungen verstricken müsse. Wir stehen daher um so lieber von einer solchen Aufstellung ab, als wir in den folgenden §§. 14, 15 die vornehmsten Haupteigenschaften einer Differentialgleichung von beliebig hoher Ordnung einer abermaligen Erörterung aus einem anderen Standpunkte zu unterwerfen gesonnen sind, die ein ferneres Eingehen ins Detail an diesem Orte überflüssig macht. Überdem nöthigt uns der complicirte Bau der ebenangeführten Coefficienten für dieselben andere Ausdrücke, ähnlich den Gleichungen (140), (141), (142) und (143) im vorhergehenden Paragraphe aufzustellen, durch welche jeder folgende Differentialgleichungs-Coefficient in Function der vorangehenden ausgedrückt erscheint. In der That werden durch die Gleichungen (253), (225) und (252)

die Werthe von $\mathfrak{X}_4$, $\mathfrak{X}_3$ und $\mathfrak{X}_2$ in der angedeuteten Form gegeben. Um $\mathfrak{X}_0$ zu erhalten addirt man die Formeln: (240), (242) und (244); zur Gewinnung von $\mathfrak{X}_1$ endlich dienen eben so die Gleichungen: (245), (247) und (249), indem man sie gleichfalls addirt und die im Rechnungsresultate erscheinenden symmetrischen Functionen in $\varphi_1$ und $\varphi_2$ durch die Gleichungscoefficienten $A$ und $B$ ausdrückt. Wir stellen hier der bequemen Übersicht wegen die so erhaltenen Formeln zusammen:

$$\mathfrak{X}_4 = B\Big[16B^2(A^2-4B)^4 + (A^2-4B)^3\left[-20A'BB' - 16A''B^2 + 8ABB'' - 4AB'^2\right] + (A^2-4B)^2\left[+40AA'^2B^2 + 40ABB'^2 - 160A'B^2B'\right]\Big], \tag{258}$$

$$\mathfrak{X}_3 = -\mathfrak{X}'_4 + \frac{\mathfrak{X}_4}{B}\left[\frac{5}{2}B' + 3B\frac{(A^2-4B)'}{A^2-4B}\right], \tag{259}$$

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{\mathfrak{X}_4}{B}\left[AB + \frac{1}{A^2-4B}\left(\frac{1}{4}A'^2B - 2AA''B - \frac{1}{4}B'^2 + 4BB''\right) + \frac{1}{(A^2-4B)^2}\left(8A'^2B^2 - 8AA'BB' + 8BB'^2\right)\right] - \frac{3}{4}\frac{(A^2-4B)'}{A^2-4B}\mathfrak{X}_3, \tag{260}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_1 = \frac{\mathfrak{X}_4}{AB^2}\Big[&3AA'B^2 - 3B^2B' - \frac{1}{2}A'''B^2 + \frac{1}{A^2-4B}\Big(-\frac{3}{8}A'^3B^2 + \frac{3}{4}AA'A''B^2 \\ &- \frac{3}{2}A''B^2B' - \frac{3}{8}A'BB'^2 - \frac{3}{2}A'B^2B'' + \frac{3}{4}ABB'B'' - \frac{3}{8}AB'^3\Big) \\ &+ \frac{1}{(A^2-4B)^2}\Big(\frac{9}{2}AA'^2B^2B' - 3A'^3B^3 - 9A'B^2B'^2 + \frac{3}{2}ABB'^3\Big)\Big] + \\ &+ \frac{\mathfrak{X}_2}{AB}\Big[A^2B - 2B^2 - \frac{1}{2}A''B + \frac{1}{A^2-4B}\Big(\frac{1}{4}AA'^2B - A'BB' + \frac{1}{4}AB'^2\Big)\Big] - \frac{A'}{2A}\mathfrak{X}_2,\end{aligned} \tag{261}$$

$$\mathfrak{X}_0 = \frac{\mathfrak{X}_4}{B}\left[-\frac{1}{2}A^2B + B^2 + A''B + \frac{1}{A^2-4B}\left(-\frac{1}{8}AA'^2B + \frac{1}{2}A'BB' - \frac{1}{8}AB'^2\right)\right] + \frac{3}{4}A'\mathfrak{X}_3 + \frac{1}{2}A\mathfrak{X}_2. \tag{262}$$

Wir haben bisher immer eine doppelte Verwandtschaft der Differentialgleichung mit der ihr entsprechenden algebraischen hervorgehoben: eine Verwandtschaft nämlich in Bezug auf die Ordnungszahlen der Coefficienten und eine andere, in Bezug auf die Zusammensetzung derselben aus ihren einfachen Factoren. Dasselbe lässt sich auch hier thun und man wird wenig Mühe haben, die erste Sorte dieser Verwandtschaft ins Auge fassend, darzuthun, dass jede auf das Coefficientenpaar bei der gewissen, vielerwähnten Repartition entfallende Ansteigung, Fortschreiten im Niveau und auch Abfall gegen die letzten Coefficienten zu, falls er weniger als die Einheit, oder nur die Einheit auf das Paar beträgt, sich gleichmässig in der Differentialgleichung und in der ihr entsprechenden algebraischen vorfinde, und dass nur ein stärkerer Abfall nicht nothwendig sich von der letzteren auf die erstere übertrage, so, dass dasselbe den Coefficientenbau umspannende Polygon beiden Gleichungen angehörig ist —. diess jedoch mit Rücksicht auf die letzterwähnte Beschränkung. Wir werden in den §§. 14, 15 ganz allgemein auf diesen Gegenstand zurückkommen und sehen, dass die Ordnungs-

zahlen der Coefficienten von denjenigen unendlichen Werthen der unabhängigen Veränderlichen herrühren, welche die einzelnen Wurzeln der algebraischen und die diesen entsprechenden particulären Integrale der Differentialgleichung gleichzeitig unendlich machen, und dass es eben die Ordnungszahlen dieser letzteren unendlichen Werthe sind, welche der Coefficientenbau beider Gleichungen wiedergibt.

Jetzt wollen wir unsere Aufmerksamkeit auch den Factoren des ersten Coefficienten und den ihm zugehörigen Werthen desjenigen Exponenten schenken, den wir in unseren früheren Rechnungen immer mit $k$ bezeichneten. Wir beginnen abermals mit dem einfachsten Falle, und reduziren unsere biquadratische algebraische Gleichung, $A=0$ voraussetzend, auf die binomische:

$$\varphi^4 + B = 0. \tag{263}$$

Die ihr zugehörige Differentialgleichung ist leicht zu erhalten und sieht so aus:

$$32B^3 . y^{iv} - 48B^2B' . y''' + (54BB'^2 - 32B^2B'')\, y'' + (38BB'B'' - 8B^2B''' - 33B'^3)\, y' + 32B^4 . y = 0. \tag{264}$$

Enthält jetzt $B$ einen einzigen Factor $x-\alpha$, so erscheinen einerseits die vier Werthe von $\varphi$ der vierten Wurzel aus $x-\alpha$ proportional, andererseits aber kömmt derselbe Factor $x-\alpha$ in den Gleichungscoefficienten, und zwar beziehlich 3-, 2-, 1-, 0- und 4-mal vor. Die zur Bestimmung von $k$ dienende Gleichung ist also vom dritten Grade und erscheint, auf ähnliche Weise wie im vorigen Paragraphe behandelt, in folgender Gestalt:

$$32\,(k+3)\,(k+2)\,(k+1) + 48\,(k+2)\,(k+1) + 54\,(k+1) + 33 = 0,$$

ihre Wurzeln sind:

$$k = -\frac{5}{4}, \quad -\frac{10}{4}, \quad -\frac{15}{4}, \tag{265}$$

also eine dreigliedrige Gruppe von Vierteln, in welcher die einzelnen Glieder sich wie die Zahlen 1, 2 und 3 verhalten.

Hätten wir anstatt eines einzigen Factors $x-\alpha$, deren allgemein $m$ an der Zahl in $B$ vorausgesetzt, so hätten wir uns ohne Mühe von der Anwesenheit solcher Factoren $3m$, $3m-1$, $3m-2$, $3m-3$, $4m$ in den Coefficienten der Differentialgleichung (264), sohin von der allgemeinen Theilbarkeit durch $(x-\alpha)^{3m-3}$ überzeugt, und wären abermals zu einer Gleichung des dritten Grades in $k$ gelangt, und zwar:

$$32k^3 + k^2\,(48m+192) + k\,(22m^2+176m+352) + 3m^3 + 36m^2 + 144m + 192 = 0; \tag{266}$$

sie lässt sich durch die Substitution $k=\frac{h}{4}$ in eine mit ganzen Coefficienten versehene Gleichung in $h$ verwandeln, nämlich:

$$h^3 + h^2\,(6m+24) + h\,(11m^2+88m+176) + 6m^3 + 72m^2 + 288m + 384 = 0,$$

deren Wurzeln sind:

$$h = -(m+4), \quad -(2m+8), \quad -(3m+12),$$

31*

welche man nur durch 4 zu dividiren braucht, um aus ihnen die gewünschten Werthe für $k$ zu gewinnen, nämlich:

$$k = -\frac{m+4}{4}, \quad -\frac{2m+8}{4}, \quad -\frac{3m+12}{4}, \tag{267}$$

und die abermals eine dreigliedrige Gruppe von Vierteln bilden, deren einzelne Glieder sich verhalten wie die Zahlen 1, 2 und 3.

Schreiten wir jetzt zur Erörterung des Falles, wo $B$ gebrochen ist, oder, mit anderen Worten, wo die algebraische Gleichung:

$$L\varphi^4 + M = 0 \tag{268}$$

zu Grunde liegt. Sie ist aus der vorigen offenbar dadurch abzuleiten, dass man $\frac{M}{L}$ anstatt $B$ schreibt. Diess führt aber zu:

$$\begin{aligned}
&32L^3M^3.y^{IV} - L^2.y'''(48LM^2M' - 48L'M^3)\\
&\quad + Ly''(54L^2MM'^2 - 32L^2M^2M'' - 44LL'M^2M' + 32LL''M^3 - 10L'^2M^3)\\
&\quad + y'(-33L^2M'^3 + 38L^2MM'M'' - 8L^2M^2M''' + 23L^2L'MM'^2 - 14L^2L'M^2M''\\
&\qquad -14L^2L''M^2M' - 10LL'L''M^3 + 5LL'^2M^2M' + 8L^2L'''M^3 + 5L'^3M^3) + 32L^3M^3.y = 0.
\end{aligned} \tag{269}$$

Von den in $M$ vorhandenen Factoren haben wir so eben gesprochen und es bleiben uns nur die in $L$ begriffen sind, in Bezug auf die ihnen entsprechenden Werthe von $k$, zu untersuchen übrig. Setzen wir deren der Reihe nach Einen, zwei und drei voraus, so ergeben sich, diesen Annahmen angehörend, folgende drei Gleichungen des dritten Grades in $k$:

$$\begin{aligned}
32\,(k+3)\,(k+2)\,(k+1) - 48\,(k+2)\,(k+1) - 10\,(k+1) - 5 &= 0,\\
4\,(k+3)\,(k+2)\,(k+1) - 12\,(k+2)\,(k+1) + 3\,(k+1) &= 0,\\
32\,(k+3)\,(k+2)\,(k+1) - 144\,(k+2)\,(k+1) + 102\,(k+1) - 3 &= 0;
\end{aligned} \tag{270}$$

ihnen entsprechen die folgenden drei Systeme von Wurzeln:

$$k = \begin{cases} -\frac{3}{4} \\ -\frac{6}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{cases}, \quad \begin{cases} -\frac{2}{4} \\ -\frac{4}{4} \\ -\frac{6}{4} \end{cases}, \quad \begin{cases} -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{cases}, \tag{271}$$

und setzt man die in $L$ ein-, zwei- oder dreimal vorhandenen Factoren als in $M$ beziehungsweise $-1$-, $-2$-, $-3$-mal enthalten voraus, so gesellen sich die für diese negativen Zahlen gefundenen Werthe von $k$ zu den früheren, einem positiven $m$ entsprechenden, als Glieder derselben Zahlenreihe. Man hat nämlich für:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
m=-3, & -2, & -1, & & +1, & +2, & +3, \ldots\ldots & +m \\
k=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{4}\\-\frac{2}{4},\\-\frac{3}{4}\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{4}\\-\frac{4}{4},\\-\frac{6}{4}\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}-\frac{3}{4}\\-\frac{6}{4},\\-\frac{9}{4}\end{array}\right. & & \left\{\begin{array}{l}-\frac{5}{4}\\-\frac{10}{4},\\-\frac{15}{4}\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}-\frac{6}{4}\\-\frac{12}{4},\\-\frac{18}{4}\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}-\frac{7}{4}\\-\frac{14}{4},\\-\frac{21}{4}\end{array}\right. \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l}-\frac{m+4}{4}\\-\frac{2m+8}{4}\\-\frac{3m+12}{4}\end{array}\right.
\end{array} \tag{272}
$$

So lange also für $x=\alpha$ das betreffende particuläre Integral nicht unendlich wird, geben sich die Factoren $(x-\alpha)^m$ unter dem Zeichen der vierten Wurzel durch dreigliedrige, der vorliegenden Reihe entnommene Gruppen von Werthen für $k$, in denen die einzelnen Glieder sich wie die Zahlen 1, 2 und 3 verhalten, kund. Können aber diese particulären Integrale für $x=\alpha$ unendlich werden, oder, mit anderen Worten, ist im Nenner von $\varphi$ die erste oder eine höhere als die erste Potenz von $x-\alpha$ vorhanden, so werden die Erscheinungen andere. Wir erhalten nämlich in dem ersten dieser beiden Fälle zur Bestimmung von $k$ eine Gleichung des vierten Grades, weil die vier particulären Integrale je einen Divisor wie $(x-\alpha)^q$ gewinnen. Ihre vier Wurzeln sind nicht mehr Viertel, oder sonstige einfache, reine Zahlenwerthe, sondern Functionen der in der Differentialgleichung enthaltenen constanten Parameter. Hievon überzeugt man sich genau so wie im vorigen Paragraphe. Im zweiten Falle aber hat man eine andere Reihenfolge von Factoren $x-\alpha$ in den einzelnen Gleichungscoefficienten zu gewärtigen, und die nach den Ergebnissen des §. 8 gemachte Repartition wird eine auf das Coefficientenpaar entfallende, gelegentlich ganze, meistens aber gebrochene, die Einheit überschreitende und mit dem Nenner 4 versehene Anzahl solcher Factoren liefern, die gleich sein wird dem Exponenten der Potenz, in welcher $x-\alpha$ im Nenner von $\varphi$ erscheint. Wir verweisen auch hier den Leser auf den zweitfolgenden Paragraph, der den Grund dieser Erscheinungen aus einem anderen, höheren Gesichtspunkte auffasst.

Jetzt wollen wir zur Untersuchung der allgemeineren Differentialgleichung schreiten, die der am Anfange des gegenwärtigen Paragraphes zu Grunde gelegten algebraischen:

$$\varphi^4+A\varphi^2+B=0 \tag{273}$$

entspricht, wo wir natürlich die Coefficienten $A$ und $B$ von der Nulle verschieden annehmen und rational, übrigens aber ganz, oder gebrochen. Setzt man demzufolge:

$$A=\frac{M}{L}, \qquad B=\frac{N}{L}, \tag{274}$$

so ist man dann berechtigt in der Gleichung:

$$L\varphi^4+M\varphi^2+N=0 \tag{275}$$

sämmtliche Coefficienten als ganze Functionen von $x$ zu betrachten, und gewahrt nach einiger Überlegung in dem ersten Coefficienten $\mathfrak{X}_4$ der Differentialgleichung vier Sorten von Factoren:

**Erstens**: Die in $L$ vorfindigen Factoren. Sie haben die Eigenschaft durch ihr Verschwinden Eine der $\varphi_1$ und $\varphi_2$ genannten Wurzeln, oder auch beide, unendlich zu machen, wie aus dem, durch unmittelbare Auflösung der Gleichung (275) gewonnenen allgemeinen Werthe von $\varphi$ ersichtlich ist:

$$\varphi = \pm \sqrt{-\frac{M}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{M^2 - 4LN}}. \tag{276}$$

Der Exponent der Potenz, zu der ein solcher in $L$ Ein- oder mehrmal enthaltener einfacher Factor, von der Form $x-\alpha$, im Nenner des Werthes von $\varphi$, erhoben vorkömmt, wird durch das früher auseinandergesetzte Repartitionsverfahren jedesmal unmittelbar gewonnen, so oft dieser Exponent entweder gleich Eins ist, oder die Einheit überschreitet. Man wird daher immer, aus dem Baue des ersten Coefficienten, diejenigen Werthe der unabhängigen Veränderlichen zu ersehen im Stande sein, welche nicht nur eine Wurzel $\varphi$ der algebraischen Gleichung (275), sondern auch das $\int \varphi . dx$ unendlich machen und diess zwar mit Hilfe keiner anderen Rechnung als derjenigen, die überhaupt die Zerlegung der Gleichungscoefficienten in einfache Factoren, gleichviel ob bei der algebraischen oder bei der Differentialgleichung, erheischt — denn zu beiden gehört dasselbe den Coefficientenbau aus einfachen Factoren umspannende Polygon. In dem Falle als der Exponent Eins ist, wird die von uns bisher mit $k$ bezeichnete Grösse in der Regel eine Function sein der in der Gleichung vorkommenden constanten Parameter und man wird sie, auf die bereits im §. 7 auseinandergesetzte Weise, berechnen. — Wir betrachten daher den Fall, wo die Repartition der Anzahlen von Factoren $x-\alpha$ auf das Coefficientenpaar entweder mehr als eine Einheit ausweist, oder gerade Eine Einheit, und einen Werth von $k$, der eine Function ist von constanten Parametern, hier um so mehr als erledigt, als wir, wie schon gesagt, denselben allgemein und in Bezug auf eine Gleichung von beliebig hohem Grade in den §§. 14 und 15 noch einmal zur Sprache bringen. In dem Falle jedoch, wo der erwähnte Exponent kleiner ist als die Einheit und die Art, wie er sich in den Gleichungscoefficienten abbildet, dieselbe ist, die dem Werthe Eins entspricht, werden wir sehen, dass, wie bisher, die Werthe von $k$, gerechnet nach der Vorschrift des §. 7, reine, theils ganze, theils gebrochene Zahlen sind.

**Zweitens** erscheinen im ersten Coefficienten $\mathfrak{X}_4$ diejenigen Factoren, welche in:

$$A^2 - 4B = P \tag{277}$$

vorhanden sind, ohne in $A$ und $B$ enthalten zu sein. Sie bewirken durch ihr Verschwinden einen Durchgang durch gleiche Wurzeln $\varphi$, und gelegentlich einen Übergang von reell in imaginär und umgekehrt. Es ist zu bemerken, dass dieses Binom, gerade so wie das ähnliche $4A^3 + 27B^2$ des vorhergehenden Paragraphes, erhalten werde als Resultat der Elimination von $\varphi$ aus der Gleichung (273) und der daraus durch Differentiation nach $\varphi$ abgeleiteten:

$$2\varphi^2 + A = 0. \tag{278}$$

**Drittens** sind in $\mathfrak{X}_4$ Factoren $x-\alpha$ zu gewahren, die in $P$ desshalb vorkommen, weil sie in $A$ und $B$ enthalten sind, und auf eben solche in den Zählern der Werthe von $\varphi$ hindeuten.

Viertens endlich kann es Factoren geben, die wohl in $\mathfrak{X}_4$ vorkommen, sonst aber in keiner der Functionen $L$, $A$, $B$, $P$ vorhanden sind. Wir werden damit anfangen nach den Werthen von $k$ zu forschen, die dem letzteren Falle entsprechen, und dann fortschreiten zu denjenigen $k$, welche den Factoren von $A$, $B$ und $P$ angehörig sind.

Wir nehmen also an, als ersten Fall, dass $(x-\alpha)^m$ ein Factor sei von $\mathfrak{X}_4$, so wie dieser erste Coefficient durch die Formel (258) gegeben ist, so hat $\mathfrak{X}'_4$ dieser Factoren $m-1$ an der Zahl, folglich auch $\mathfrak{X}_3$ eben so viele, nicht mehr und nicht weniger, wie der Anblick der Formel (259) lehrt. Die übrigen Coefficienten $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_0$ beherbergen dann sämmtlich mindestens $m-1$ solche Factoren, wo nicht mehr. Die gehörig abgekürzte Differentialgleichung (251) kann daher im ersten Coefficienten $\mathfrak{X}_4$ nur Einen einzigen solchen Factor $x-\alpha$ erhalten. Der ihm zugehörige Werth von $k$ ist sofort, zufolge der Gleichung:

$$\left\{\frac{\mathfrak{X}_4}{(x-\alpha)^m}(k+3)-\frac{\mathfrak{X}_3}{(x-\alpha)^{m-1}}\right\}_\alpha=0, \tag{279}$$

und mit Rücksicht auf die (259) offenbar:

$$k=-m-3, \tag{280}$$

gleich einer ganzen und negativen Zahl. Wir schliessen hieraus zurück, dass negative, ganze, unter den Werthen von $k$ vorkommende Zahlen, die zu isolirten Factoren $x-\alpha$ im ersten Coefficienten gehören, für den Bau der Werthe von $\varphi$ oder der particulären Integrale insofern bedeutungslos seien, als man solch' einen Factor weder im Nenner noch im Zähler irgend einer der Wurzeln $\varphi$ zu vermuthen berechtiget ist und denselben so zu sagen zu zählen hat zu den Reserven, die die Analysis in den ersten Coefficienten zu werfen genöthigt ist, um den Übergang von einer Form particulärer Integrale zur anderen zu vermitteln.

Jetzt wollen wir zum Zweiten, einen Factor $(x-\alpha)^m$ in $P=A^2-4B$ vorhandensein lassen, so jedoch, dass derselbe weder in $A$ noch in $B$ vorfindig gedacht wird, dass also die folgenden drei Substitutionsresultate von $\alpha$ anstatt $x$:

$$\left.\frac{P}{(x-\alpha)^m}\right\}_\alpha=\mathfrak{P}, \qquad A_\alpha=\mathfrak{A}, \qquad B_\alpha=\mathfrak{B}, \tag{281}$$

sämmtlich von Null und unendlich verschieden ausfallen. Um nun über die Anzahl von solchen Factoren in den successiven Coefficienten Aufschluss zu erhalten, ist man genöthigt den Gleichungen (258), (259), (260), (261) und (262) dadurch eine andere Form zu ertheilen, dass man, mittelst der Substitution:

$$B=\frac{1}{4}(A^2-P), \tag{282}$$

aus den Polynomen innerhalb der Klammern die $B$ eliminirt, wodurch aber gleichzeitig in denselben $P$ und Differentialquotienten dieser Grösse zum Vorschein kommen. Man gewinnt so die folgenden fünf, neuen, im gegenwärtigen Falle brauchbareren Formeln:

$$(283)\quad \mathfrak{X}_4 = B\Big[P^6 + P^5\left(-2A^2 - A''\right) + P^4\left(\frac{5}{4}A'P' + \frac{1}{2}AP'' + A^4 + A^2A'' - AA'^2\right) + P^3\left(-\frac{7}{8}AP'^2 - \frac{1}{4}A^2A'P' - \frac{1}{2}A^3P''\right) + \frac{5}{8}A^3P^2P'^2\Big],$$

$$(284)\quad \mathfrak{X}_3 = -\mathfrak{X}_4' + \frac{\mathfrak{X}_4}{B}\left[-\frac{11}{8}P' + \frac{5}{4}AA' + \frac{3A^2P'}{4P}\right].$$

$$(285)\quad \mathfrak{X}_2 = \frac{\mathfrak{X}_4}{B}\left[\frac{1}{4}A^3 - \frac{1}{4}AP - \frac{1}{16}A'^2 + \frac{AA'P'}{16P} + \frac{A^2P'^2}{8P^2} - \frac{A^2P''}{4P} - \frac{9P'}{64P}P' + \frac{1}{4}P''\right] - \frac{3P'}{4P}\mathfrak{X}_3,$$

$$(286)\quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_1 = \frac{\mathfrak{X}_4}{AB^2}\Big[&\frac{3}{64}P^2P' + P^2\left(\frac{3}{32}AA' - \frac{1}{32}A'''\right) + PP'\left(-\frac{3}{32}A^2 + \frac{3}{128}A''\right) + \frac{3}{128}A'.PP'' \\ &+ P'^2\left(\frac{3AP'}{256P} - \frac{15}{512}A'\right) + P\left(-\frac{3}{16}A^3A' + \frac{1}{16}A^2A''' - \frac{3}{128}A'^3 - \frac{3}{64}AA'A''\right) \\ &- \frac{3}{256}A.P'P'' + P'\left(-\frac{3A^3P'^2}{512P^2} - \frac{3A^2A'P'}{512P} + \frac{3}{64}A^4 - \frac{3}{128}A^2A'' + \frac{9}{128}AA'^2\right) \\ &+ P''\left(\frac{3A^3P'}{256P} - \frac{3}{128}A^2A'\right) + \frac{3}{32}A^5A' - \frac{1}{32}A^4A''' - \frac{3}{128}A^2A'^3 + \frac{3}{64}A^3A'A''\Big] + \\ &+ \frac{\mathfrak{X}_3}{AB}\left[-\frac{1}{8}P^2 + \frac{1}{8}A''P + P'\left(\frac{AP'}{64P} - \frac{1}{16}A'\right) + \frac{1}{8}A^4 - \frac{1}{8}A^2A'' + \frac{1}{16}AA'^2\right] - \frac{A'}{2A}\mathfrak{X}_3, \end{aligned}$$

$$(287)\quad \mathfrak{X}_0 = \frac{\mathfrak{X}_4}{B}\left[\frac{1}{16}P^2 - \frac{1}{16}A^4 + \frac{1}{4}A^2A'' - \frac{1}{32}AA'^2 - \frac{1}{4}A''P + \frac{1}{32}A'P' - \frac{AP'}{128P}P'\right] + \frac{3}{4}A'\mathfrak{X}_3 + \frac{1}{2}A\mathfrak{X}_2.$$

Der Anblick der ersten dieser Gleichungen lehrt, dass $\mathfrak{X}_4$ unter der gemachten Voraussetzung durch $(x-\alpha)^{4m-2}$ theilbar sei, und dass man namentlich:

$$\left.\frac{\mathfrak{X}_4}{(x-\alpha)^{4m-2}}\right\}_\alpha = \frac{1}{8}\,m\,(m+4)\,\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{P}^4 = \mathfrak{x}_4,$$

gleich einem endlichen Werthe erhalte. Eben so gewahrt man in den übrigen Coefficienten:

$$\mathfrak{X}_3,\qquad \mathfrak{X}_2,\qquad \mathfrak{X}_1,\qquad \mathfrak{X}_0,$$

nach kurzer Überlegung beziehungsweise:

$$4m-3,\qquad 4m-4,\qquad 4m-4,\qquad 4m-4$$

solcher Factoren, welche Anzahlen übrigens, für die beiden Coefficienten $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_0$, in speciellen Fällen sogar überschritten werden können. Die Gleichung in $k$ wird demnach vom zweiten Grade und zwar:

$$(288)\quad \left\{\frac{\mathfrak{X}_4}{(x-\alpha)^{4m-2}}(k+3)(k+2) - \frac{\mathfrak{X}_3}{(x-\alpha)^{4m-3}}(k+2) + \frac{\mathfrak{X}_2}{(x-\alpha)^{4m-4}}\right\}_\alpha = 0,$$

oder, mit gehöriger Rücksicht auf die Gleichungen (284) und (285), wegen:

$$-\left.\frac{\mathfrak{X}_3}{(x-\alpha)^{4m-3}}\right\}_\alpha = (m-2)\,\mathfrak{X}_4, \qquad \left.\frac{\mathfrak{X}_2}{(x-\alpha)^{4m-4}}\right\}_\alpha = \frac{1}{4}\,(m^2-2m)\,\mathfrak{X}_4,$$

$$k^2 + (m+3)\,k + \frac{1}{4}\,m^2 + \frac{3}{2}\,m + 2 = 0, \tag{289}$$

mit Wurzeln:

$$k = -\frac{m+2}{2}, \qquad -\frac{m+4}{2}. \tag{290}$$

Ist hier $m$ eine gerade Zahl, so sind die beiden vor Augen liegenden Wurzeln negative, ganze Zahlen und haben insoferne Ähnlichkeit mit den unmittelbar früher zur Sprache gebrachten, die wir in gewisser Beziehung für bedeutungslos erklärten; sie unterscheiden sich von ihnen durch den Umstand, dass sie nicht aus einer Gleichung des ersten, sondern des zweiten Grades gezogen sind, daher paarweise vorkommen und überdem noch dadurch, dass zwischen ihnen ein Unterschied von Einer Einheit obwaltet. Sie verrathen einen Durchgang zweier Wurzelpaare durch den Zustand der Gleichheit, der für $x=\alpha$ stattfindet, ohne dass damit ein Übergang von reell in imaginär, oder umgekehrt, verknüpft wäre. Ein solcher findet vielmehr offenbar nur dann statt, wenn $m$ eine ungerade Zahl ist, wenn somit unsere zwei Wurzeln (290) negative Brüche sind mit dem Nenner 2, die sich ebenfalls um die Einheit im Werthe unterscheiden. Hierauf gründen wir die Vermuthung, dass, ganz allgemein und bei Gleichungen von beliebig hohen Ordnungszahlen, erscheinende Werthe von $k$, die aus einer höheren Gleichung gezogen und entweder Gruppen sind von negativen Brüchen mit dem Nenner 2, und einem Unterschiede von je Einer Einheit in ihren Gliedern, oder Gruppen von negativen, ganzen Zahlen mit eben einem solchen Unterschiede, auf eben so viele Wurzelpaare $\varphi$ hindeuten, die für einen und denselben Werth von $x$ durch den Zustand der Gleichheit hindurchgehen. Mit den Halben ist überdiess, auch wenn sie isolirt erscheinen, noch eine Verwandlung von reell in imaginär verknüpft.

Es erübrigt nur noch die Erörterung des dritten Falles, desjenigen nämlich, wo die in $\mathfrak{X}_4$ enthaltenen Factoren wie $x-\alpha$, von eben solchen den beiden Coefficienten $A$ und $B$ eigenthümlichen herrühren — ein Fall, in welchem, wie man sich leicht überzeugen kann, zwei oder vier Wurzeln der Gleichung des vierten Grades eine gewisse Potenz von $x-\alpha$ mit positivem Exponenten zum Factor erhalten, was offenbar ein Verschwinden von einem oder zweien Wurzelpaaren für $x=\alpha$, sohin abermals einen Durchgang durch den Zustand der Gleichheit zur Folge hat, und daher auch wieder Halbe als Werthe von $k$ erwarten lässt. Dieser dritte Fall kann, nach Massgabe der Zahl der Factoren $x-\alpha$, die in die Coefficienten $A$ und $B$ fallen, in mehrere zerlegt werden, von welchen wir zuvörderst einen mittleren, den nämlich namhaft machen, wo $A$ und $B$ beziehlich $m$ und $2m$ solche Factoren besitzen, wo somit alle vier Wurzeln unserer Gleichung des vierten Grades insoferne ähnliche Functionen von $x$ sind, als sie sämmtlich die Potenz $(x-\alpha)^{\frac{m}{2}}$ als Factor enthalten. Hiebei wird die unter dem Quadratwurzelzeichen stehende, $P$ genannte Grösse, der Factoren $x-\alpha$ mindestens $2m$, kann aber auch eine grössere Zahl, etwa $2m+s$ derselben enthalten. Diese beiden untergeordneten Fälle sollen jetzt der Reihe nach betrachtet werden. Es seien also zuvörderst in:

Factoren $x - \alpha$ bezüglich: $\begin{matrix} A, & B, & P = A^2 - 4B, \\ m, & 2m, & 2m \end{matrix}$

vorhanden, so sieht man bei dem Anblicke des Werthes (283) von $\mathfrak{X}_4$, dass demselben mindestens $13m - 2$ Factoren $x - \alpha$ zukommen. Eine nähere Untersuchung jedoch und namentlich die durchgeführte Berechnung von $\left.\frac{\mathfrak{X}_4}{(x-\alpha)^{13m-2}}\right\}_\alpha$, die zu einem Werthe 0 leitet, überzeugt uns von dem Vorhandensein mehrer und zwar mindestens $13m - 1$ an der Zahl solcher Factoren, da man, vermittelst etwas weitläufiger Rechnungsentwicklungen, zu folgendem Werthe von $\left.\frac{\mathfrak{X}_4}{(x-\alpha)^{13m-1}}\right\}_\alpha$ gelangt:

$$\left.\frac{\mathfrak{X}_4}{(x-\alpha)^{13m-1}}\right\}_\alpha = \mathfrak{B}\mathfrak{P}^2 \left[m \frac{A_\alpha^{(m+1)}}{(m+1)!}\left(-12\mathfrak{A}^6 + 96\mathfrak{A}^4\mathfrak{B} - 184\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 - 32\mathfrak{B}^3\right) + \right.$$
$$\left. + m\frac{B_\alpha^{(2m+1)}}{(2m+1)!}\left(24\mathfrak{A}^5 - 196\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + 400\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\right)\right],$$

in welchem Kürze halber:

$$\frac{A_\alpha^{(m)}}{m!} = \mathfrak{A}, \quad \frac{B_\alpha^{(2m)}}{(2m)!} = \mathfrak{B}, \quad \frac{P_\alpha^{(2m)}}{(2m)!} = \mathfrak{P} \tag{291}$$

gesetzt worden ist, und der in der Regel von der Nulle verschieden sein wird, ausnahmsweise jedoch auch wieder gleich Null werden kann, und so noch eine grössere Anzahl von Factoren $x - \alpha$ in $\mathfrak{X}_4$, etwa $13m - 1 + r$ kundzugeben vermag. Diese Anzahl, ganz allgemein, vorausgesetzt, erschliesst man aus der sorgfältigeren Betrachtung der Gleichungen (283), (284), (285), (286) und (287) in:

$$\mathfrak{X}_4, \qquad \mathfrak{X}_3, \qquad \mathfrak{X}_2, \qquad \mathfrak{X}_1, \qquad \mathfrak{X}_0,$$

solcher Factoren beziehlich:

$$13m-1+r, \quad 13m-2+r, \quad 13m-3+r, \quad 13m-4+r, \quad 14m-3+r,$$

und gelangt sohin zu einer Gleichung des dritten Grades in $k$, die zuvörderst in der bereits sehr bekannten Gestalt erscheint:

$$\left\{\frac{\mathfrak{X}_4}{(x-\alpha)^{13m-1+r}}(k+3)(k+2)(k+1) - \frac{\mathfrak{X}_3}{(x-\alpha)^{13m-2+r}}(k+2)(k+1)\right.$$
$$\left. + \frac{\mathfrak{X}_2}{(x-\alpha)^{13m-3+r}}(k+1) - \frac{\mathfrak{X}_1}{(x-\alpha)^{13m-4+r}}\right\}_\alpha = 0, \tag{292}$$

dann aber, nach gehörig durchgeführter Berechnung der Coefficienten, sich verwandelt in:

$$(k+3)(k+2)(k+1) + (2m-1+r)(k+2)(k+1) + \left(\frac{5}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{3}{2}mr\right)(k+1) +$$
$$+ \frac{1}{4}m^3 + \frac{3}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}mr + \frac{1}{2}m^2r = 0,$$

oder:

$$k^3 + (2m+5+r)k^2 + \left(\frac{5}{4}m^2 + \frac{13}{2}m + 8 + 3r + \frac{3}{2}mr\right)k +$$
$$+ \frac{1}{4}m^3 + 2m^2 + 5m + 4 + 2r + 2mr + \frac{1}{2}m^2r = 0, \tag{293}$$

mit Wurzeln:

$$k = -(m+2), \quad -\frac{m+2}{2}, \quad -\left(\frac{m+4}{2}+r\right), \qquad ($$

deren erste jedesmal eine ganze, negative Zahl, die beiden anderen aber, wenigstens für ungerade Werthe von $m$, für welche wirklich ein Übergang von reell in imaginär der $\varphi$ genannten Gleichungswurzeln stattfindet, Brüche sind mit dem Nenner 2, andeutend zwei Gruppen von Wurzeln, die von reell imaginär werden. Die erste scheint dem überschüssigen Einen, oder den überschüssigen $(r+1)$ Factoren $x-\alpha$ anzugehören, die Anzahl $r$ aber der überschüssigen Factoren dieser Art liefert die dritte Wurzel.

Nun wollen wir den zweiten der früher erwähnten untergeordneten Fälle der Betrachtung unterziehen und setzen demnach voraus, dass in:

$$A, \qquad B, \qquad P,$$

beziehungsweise Factoren $x-\alpha$:

$$m, \qquad 2m, \qquad 2m+s$$

an der Zahl enthalten seien. Die aufmerksamere Betrachtung der Formel (283) für $\mathfrak{X}_4$ lehrt in diesem Falle, dass die Anzahl der in diesem Coefficienten vorhandenen Factoren ganz genau $13m+4s-2$ sei, nicht mehr und nicht weniger, weil:

$$\left.\frac{\mathfrak{X}_4}{(x-\alpha)^{13m+4s-2}}\right\}_\alpha = \mathfrak{A}^2\mathfrak{P}^4\left[\frac{1}{16}ms+\frac{1}{32}s^2+\frac{1}{8}s\right] = \mathfrak{X}_4$$

ist, unter $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$ die den bereits früher unter (291) genannten analogen Werthe verstanden — nicht mehr aus dem Grunde, weil dieses $\mathfrak{X}_4$ für gar keinen positiven Werth von $m$ und $s$, welche hier der Natur der Sache nach vorausgesetzt werden, der Nulle gleich wird. Die auf dieselbe Art wie früher betrachteten übrigen Differentialgleichungs-Coefficienten zeigen auch dieselben Abstufungen in der Anzahl der Factoren $x-\alpha$ die sie besitzen, daher man denn abermals zu einer Gleichung des dritten Grades in $k$ geleitet wird, die zuvörderst in der Gestalt erscheint:

$$(k+3)(k+2)(k+1)+(2m+s-2)(k+2)(k+1)+\left(\frac{5}{4}m^2+\frac{5}{4}ms+\frac{1}{4}s^2-m-\frac{1}{2}s\right)(k+1)+$$
$$+\frac{1}{4}m^3+\frac{3}{8}m^2s+\frac{1}{8}ms^2+\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{4}ms=0,$$

dann aber übergeht in:

$$k^3+(2m+s+4)k^2+\left(\frac{5}{4}m^2+\frac{5}{4}ms+5m+\frac{5}{2}s+\frac{1}{4}s^2+5\right)k+$$
$$+\frac{1}{4}m^3+\frac{3}{8}m^2s+\frac{1}{8}ms^2+\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{4}s^2+\frac{3}{2}ms+3m+\frac{3}{2}s+2=0, \qquad ($$

mit Wurzeln:

$$k=-\frac{m+2}{2}, \quad -\frac{m+2+s}{2}, \quad -\frac{2m+4+s}{2}, \qquad ($$

von denen immer entweder Eine ganz und die beiden anderen gebrochen, oder alle drei ganz ausfallen, letzteres dann, wenn $m$ und $s$ gerade sind, folglich für $x = \alpha$ gar keine Veränderung von reell in imaginär oder umgekehrt stattfinden kann, während im ersteren Falle jedesmal zwei Wurzelpaare diese Veränderung erleiden, so dass also jeder als Werth von $k$ gewonnene, und mit dem Nenner 2 versehene negative Bruch auf die sehr wichtige Veränderung von reell in imaginär eines Wurzelpaares für $\varphi$, beziehlich auf ein Periodischwerden eines Paares particulärer Integrale hindeutet — eine Bemerkung, die wir schon oft zu machen Gelegenheit gehabt.

Nachdem wir nun denjenigen Fall erledigt, der in der Mitte der analytischen Erscheinungen des Ansteigens in der Zahl der Factoren $x-\alpha$ der Gleichungscoefficienten $A$ und $B$ liegt, den nämlich, wo die Ansteigung eine gleichförmige ist von $m$ Einheiten, ist noch übrig auch die Fälle diessseits und jenseits dieses Mittelfalles gehörig der Untersuchung zu unterwerfen. Wir nehmen daher an, dass $A$ allgemein mit dem Factor $(x-\alpha)^a$ und eben so $B$ mit dem Factor $(x-\alpha)^b$ behaftet sei. Es ist dann entweder $b < 2a$, oder $b > 2a$, die Grösse $P$ aber wird sich von der Anzahl $2a$ oder $b$ von Factoren $x-\alpha$, die beziehlich dem $A^2$ und $B$ angehören, offenbar immer die kleinere erkiesen. Wir erhalten daher, für den Fall $b < 2a$ in:

$$A\,,\qquad B\,,\qquad P\,,$$

beziehlich Factoren $x-\alpha$:

$$a\,,\qquad b\,,\qquad b$$

an der Zahl, $\mathfrak{X}_4$ aber wird, wie die Betrachtung seines Werthes (258) lehrt, deren im Allgemeinen $a+6b-2$ enthalten, da, wie man alsbald sieht:

$$\left.\frac{\mathfrak{X}_4}{(x-\alpha)^{a+6b-2}}\right\}_\alpha = 1024\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}^6\left(a^2 - \frac{5}{4}ab + \frac{3}{8}b^2 - a + \frac{1}{2}b\right),$$

wobei Kürze halber:

$$\left.\frac{A}{(x-\alpha)^a}\right\}_\alpha = \mathfrak{A}\,,\qquad \left.\frac{B}{(x-\alpha)^b}\right\}_\alpha = \mathfrak{B} \tag{297}$$

gesetzt wurde, ausfällt, was in der Regel als von der Nulle verschieden betrachtet werden muss, die Fälle ausgenommen, in welchen:

$$a^2 - \frac{5}{4}ab + \frac{3}{8}b^2 - a + \frac{1}{2}b = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\left(a - \frac{1}{2}b\right)\left(a - \frac{3b+4}{4}\right) = 0,$$

wird, was entweder $2a = b$ gibt — ein Fall der früher schon erschöpft worden ist — oder zu $4a = 3b+4$ führt. Von diesem letzteren Ausnahmsfalle nun abgesehen, erhalten die Coefficienten:

$$\mathfrak{X}_4\,,\qquad \mathfrak{X}_3\,,\qquad \mathfrak{X}_2\,,\qquad \mathfrak{X}_1\,,\qquad \mathfrak{X}_0\,,$$

zufolge der Gleichungen (258), (259), (260), (261) und (262) beziehlich Factoren $x-\alpha$:

$$a+6b-2\,,\quad a+6b-3\,,\quad a+6b-4\,,\quad a+6b-5\,,\quad 2a+6b-4$$

an der Zahl und die abermals dem dritten Grade angehörige Gleichung in $k$ sieht so aus:

$$(k+3)(k+2)(k+1) + \left(a + \frac{1}{2}\,b - 2\right)(k+2)(k+1) + \left(-\frac{1}{16}\,b^2 - \frac{1}{2}\,b + \frac{3}{4}\,ab\right)(k+1)$$
$$- \frac{1}{32}\,b^3 + \frac{1}{8}\,ab^2 - \frac{1}{16}\,b^2 + \frac{1}{4}\,ab = 0,$$

oder:

$$k^3 + \left(a + \frac{1}{2}\,b + 4\right)k^2 + - \left(\frac{1}{16}\,b^2 + \frac{3}{4}\,ab + b + 3a + 5\right)k -$$
$$- \frac{1}{32}\,b^3 + \frac{1}{8}\,ab^2 - \frac{1}{8}\,b^2 + ab + \frac{1}{2}\,b + 2a + 2 = 0, \tag{298}$$

und biethet Wurzeln:

$$k = -\frac{b+4}{4}, \qquad -\frac{b+4}{2}, \qquad -\frac{4a-b+4}{4}, \tag{299}$$

also gelegentlich Ganze, Halbe und Viertel — Viertel nur dann, wenn sich aus den Wurzeln der Gleichung in $\varphi$ vierte Wurzeln von $x-\alpha$ herausstellen lassen, Halbe nur dann, wenn sich ein Übergang von reell in imaginär oder umgekehrt nachweisen lässt. Überdiess ist noch aus den Werthen für $k$ ersichtlich, dass sie zur Bestimmung von $a$ und $b$ benutzt werden können, oder, mit anderen Worten, dass sie andeuten, wie viele Factoren $x-\alpha$ in $A$ und $B$ enthalten sind. — Diess ist um so auffallender, als bei der zu Grunde gelegten Voraussetzung $b < 2a$ das den Bau der Coefficienten $A$ und $B$ in Bezug auf Factoren $x-\alpha$ umspannende Polygon einen ausspringenden Winkel hat, der nach dem Gesetze der Etiquette weggeschnitten werden muss, wenn man über die in den Wurzeln vorhandenen solchen Factoren belehrt sein will. Ihre Anzahl, so wie sie bei der üblichen Repartition ermittelt wird, hängt hier offenbar nur von $b$ ab, wovon man sich auch durch die aus der Auflösung der Gleichung (273) gewonnenen Werthe überzeugen kann, und dennoch verräth hier die Analysis selbst die für den Wurzelbau so zu sagen bedeutungslosen, nur zufällig in $A$ enthaltenen Factoren $x-\alpha$, und es wäre diess vielleicht als ein günstiger Umstand anzusehen, wenn dem nur immer so wäre. Diess ist aber nicht der Fall; man überzeugt sich nämlich ohne sonderliche Schwierigkeit, dass unsere Rechnungen und sohin auch ihr Resultat — wir meinen die Gleichung (298) — nur so lange richtig sind, als $a < b+2$ ist. Nimmt man aber $a \geqq b+2$, so geht die Rechnung einen wesentlich anderen Weg, gerade so wie in einem ähnlichen Falle, nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphes, bei den Gleichungen der dritten Ordnung und wir gelangen auch zu einer anderen Gleichung in $k$, nämlich zur:

$$k^3 + 6\,\frac{b+4}{4} + 11\left(\frac{b+4}{4}\right)^2 + 6\left(\frac{b+4}{4}\right)^3 = 0, \tag{300}$$

mit Wurzeln:

$$k = -\frac{b+4}{4}, \qquad -2.\frac{b+4}{4}, \qquad -3.\frac{b+4}{4}, \tag{301}$$

welche die uns bereits bekannten, der binomischen (263) entsprechenden sind, und gar kein $a$ in sich mehr enthalten, sohin auch zur Bestimmung dieser Grösse nicht dienen können.

Anders verhält es sich in dem letzten der noch zu betrachtenden Fälle, wo $b > 2a$ ist, das vielerwähnte Polygon somit seine convexe Seite der Abscissenaxe zukehrt, und somit sowohl $a$ als auch $b$ die Anzahl der in den Wurzeln der algebraischen Gleichung in $\varphi$ vorhandenen Factoren $x-\alpha$ bestimmen. Es werden nämlich, wie man sich durch Auflösung der (273) überzeugen kann, und wie es auch die übliche Repartition gibt, zwei Wurzeln der Potenz $(x-\alpha)^{\frac{a}{2}}$ und zwei andere der $(x-\alpha)^{\frac{b-a}{2}}$ proportional ausfallen. Es lässt sich daher mit Grund voraussehen, dass in diesem letzten Falle die Werthe von $k$ stets sowohl von $a$ als auch von $b$ abhängig sein werden. In der That gewahren wir hier in den Grössen:

$$A\,, \qquad B\,, \qquad P\,,$$

der Factoren $x-\alpha$ beziehungsweise:

$$a\,, \qquad b\,, \qquad 2a$$

an der Zahl, ersehen ferner aus (258), dass $\mathfrak{X}_4$ deren wenigstens $7a+3b-2$ enthalten müsse, und dass auch wirklich:

$$\left.\frac{\mathfrak{X}_4}{(x-\alpha)^{7a+3b-2}}\right\}_\alpha = 4\mathfrak{A}^7\mathfrak{B}^3\,(b-2a)(b-3a-2)$$

sei, unter $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abermals die früher zur Sprache gebrachten Werthe (297) verstanden — ein von Null in der Regel verschiedener Ausdruck, bis auf die beiden Fälle $b=2a$ und $b=3a+2$, von welchen der erste der bereits erledigte Mittelfall ist, der zweite aber zwar eine grössere Zahl von Factoren $x-\alpha$ in $\mathfrak{X}_4$ veranlasst, dennoch aber, wenn gleich auf etwas anderem Wege, zu derselben Gleichung in $k$ führt, d. h. zur:

$$(k+3)(k+2)(k+1) + \left(a+\frac{1}{2}b-2\right)(k+2)(k+1) + \left(-\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{4}ab-a\right)(k+1)$$
$$-\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2b-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}ab=0,$$

oder:

$$(302)\qquad \begin{aligned} k^3 + \left(a+\frac{1}{2}b+4\right)k^2 + \left(-\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{4}ab+2a+\frac{3}{2}b+5\right)k\; - \\ -\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2b-\frac{1}{2}a^2+ab+a+b+2=0 \end{aligned}$$

deren Wurzeln:

$$(303)\qquad k=-\frac{a+2}{2}, \qquad -(a+2), \qquad -\frac{b-a+2}{2},$$

von $a$ und $b$ abhängig sind, so wie wir es auch vorausgesehen haben und die sonach auch geeignet erscheinen zur Kenntniss des Werthes jeder einzelner dieser Grössen abgesondert zu verhelfen.

Es liesse sich auf diese Ergebnisse unserer Untersuchungen eine Methode gründen aus einer Differentialgleichung, bei welcher der Beweis gelungen wäre, dass ihr eine biquadratische, algebraische Gleichung zu Grunde liege, die letztere zu finden, und auf diesem Wege zum allgemeinen Integrale zu gelangen. Da man aber zu einem solchen Beweise nicht leicht je einen Anhaltspunkt finden wird,

da ferner die algebraische Beschaffenheit der Coefficienten $A$ und $B$ nur ein sehr spezieller Fall der Allgemeineren der Functionen erster Classe ist, für welche letzteren die eben durchgeführten Untersuchungen offenbar giltig sind, so wollen wir uns um eine solche Methode nicht bemühen und tragen eher im Sinne andere Methoden vorzutragen, welche das allgemeine Integral, ohne weiteren als den unumgänglich nöthigen Voraussetzungen, in derjenigen Form zu geben geeignet sind, die es wirklich anzunehmen vermag, und welche an der geschlossenen, algebraischen, so sie überhaupt vorhanden ist, vorbeiführt und bemerken an diesem Orte nur noch, dass wir das Vorkommen der gruppenweise vorhandenen Werthe von $k$, in der Weise, wie sie uns in diesen letzten drei Paragraphen entgegengetreten sind, je nachdem die Gruppen ein-, zwei-, dreigliedrig sind u. s. w. als ein Merkmal betrachten des wahrscheinlichen Vorhandenseins von solchen algebraischen Gleichungen des zweiten, dritten, vierten Grades u s. w., aus deren Wurzeln die Ausdrücke eben so vieler particulärer Integrale in geschlossener Form (wenn man den Ausdruck »geschlossene Form« hier in einem gewissen, etwas uneigentlichen Sinne nimmt) hervorgehen, um daraus Veranlassung zu nehmen, diese höheren algebraischen Gleichungen als vorhanden vorauszusetzen und zu suchen.

## §. 13.

## Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung entsprechend einer algebraischen, binomischen vom $n^{ten}$ Grade.

Die am meisten in die Augen fallenden Kennzeichen vorhandener Irrationalgrössen in den particulären Integralen sind, nach den Ergebnissen unserer Untersuchungen, eben diejenigen, die von reinen zweiten, dritten, vierten, ...... $n^{ten}$ Wurzeln herrühren, die als Auflösungen einer binomischen Gleichung des Grades 2, 3, 4, ..... $n$ erscheinen. Sie geben sich nämlich, wie wir bisher gesehen haben, kund durch gebrochene, rein numerische Werthe von $k$, die noch dazu gruppenweise zu zweien, dreien, vieren ..... erscheinen und um so kenntlicher sind, als die einzelnen Glieder, die zu Einer Gruppe gehören, in dem einfachen Verhältnisse der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, .... zu einander stehen. Wir haben dieses Verhalten nur einschliesslich bis zum vierten Grade dargethan und widmen den gegenwärtigen Paragraph der allgemeinen Nachweisung desselben, indem wir die Differentialgleichung construiren und der Untersuchung unterwerfen, die der allgemeinen binomischen vom $n^{ten}$ Grade entspricht und die wir, zur Vereinfachung der damit verknüpften Rechnungen, zunächst in folgender Form hinstellen:

$$\varphi^n - N^n = 0.$$

Für $n = 2$, 3 und 4 lässt sich die dieser algebraischen entsprechende Differentialgleichung ableiten aus den (72), (155) und (264), indem man in der ersten $-N^2$ anstatt $N$, in der zweiten $-N^3$ anstatt $O$, in der dritten $-N^4$ anstatt $B$ setzt. Die aus ihnen auf diese Weise hervorgehenden drei Differentialgleichungen sind folgende:

$$N.y'' - N'.y' - N^3.y = 0, \tag{305}$$

$$N^2.y''' - 3NN'.y'' + y'(3N'^2 - NN'') - N^5.y = 0, \tag{306}$$

$$N^3.y^{IV} - 6N^2N'.y''' + y''(15NN'^2 - 4N^2N'') + y'(10NN'N'' - N^2N''' - 15N'^3) - N^7.y = 0, \tag{307}$$

und es wird erspriesslich sein, den analytischen Bau derselben etwas näher ins Auge zu fassen. Zu diesem Zwecke bemerken wir fürs erste, dass, wenn man $N$, $N'$, $N''$, ..... als derselben etwa der ersten Ordnung angehörige Functionen ansieht, alle diese drei Gleichungen, mit Ausschluss ihrer letzten Glieder ins Auge gefasst, nach den $N$ homogen erscheinen, beim letzten Gliede aber präsentirt sich eine Steigung beziehlich um 2, 3 und 4 Einheiten in der Ordnungszahl. Der Grund dieser Erscheinung lässt sich angeben: Ist nämlich $N$ eine Constante, dann kommen die 2, 3 und 4 particulären Integrale die den Differentialgleichungen (305), (306) und (307) angehören, sämmtlich unter der Form: $e^{Nx}$ vor und die Differentialgleichungen, denen diese particulären Integrale zukommen, sind offenbar:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - N^2y = 0, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} - N^3y = 0, \qquad \frac{d^4y}{dx^4} - N^4.y = 0; \tag{308}$$

auf diese müssen sich daher obige Gleichungen zurückziehen, wenn man $N$ eine Constante sein lässt. Hieraus erhellet zu gleicher Zeit die Nothwendigkeit der oberwähnten Steigung bei dem letzten Gliede, wenigstens in Bezug auf das erste und das Nichtvorhandensein von Gliedern in den übrigen Coefficienten, in denen kein gestricheltes $N$ erscheint. Auch die beobachtete Homogeneität hat ihren analytischen Grund: weil nämlich die algebraische Gleichung sich nicht ändert, wenn man in derselben $\alpha N$ anstatt $N$ schreibt, unter $\alpha$ eine beliebige der $n$ Wurzeln der Gleichung $\alpha^n = 1$ verstanden, so muss dasselbe auch in der Differentialgleichung der Fall sein und ist es auch, so lange in ihr sämmtliche Glieder eine und dieselbe Ordnungszahl biethen, bis auf das letzte, das sich um $n$ Einheiten über die übrigen erhebt. Ferner bemerken wir, dass der erste und mit ihm auch alle nachfolgenden Coefficienten für $n = 2, 3, 4$ beziehlich von der ersten, zweiten, dritten Ordnung sind und dass der zweite Coefficient einen einzigen Strich, der dritte deren in einem jeden Gliede im Ganzen zwei, der vierte drei enthält und vermuthen, dass die gesuchte allgemeine Gleichung ein ähnliches Verhalten offenbaren werde. Durch diese Wahrnehmungen wird es uns möglich, die mühsame directe Construction der Differentialgleichung zu umgehen, indem wir Gebrauch machen von der Methode der unbestimmten Coefficienten, die im gegenwärtigen Falle den Vorzug der Einfachheit mit jenem der Sicherheit verbindet. Wir setzen voraus die Differentialgleichung, die der Algebraischen (304) angehört, sei:

$$\mathfrak{X}_n y^{(n)} + \mathfrak{X}_{n-1} y^{(n-1)} + \mathfrak{X}_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots\ldots + \mathfrak{X}_1 y' + \mathfrak{X}_0 y = 0 \tag{309}$$

und nehmen zugleich, auf Analogie gestützt:

$$\mathfrak{X}_n = N^{n-1} \tag{310}$$

an, betrachten überdiess sämmtliche mit $\mathfrak{X}$ bezeichnete Coefficienten, mit alleiniger Ausnahme des letzten $\mathfrak{X}_0$, als Polynome, die nach $N$ und seinen Differentialquotienten, gleich dem ersten unter ihnen,

$\mathfrak{S}$ deutet ein Summenzeichen an; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..... $\sigma$ sind lauter ganze, positive Zahlen, die Nulle mit einbegriffen, eben so viele Differentiationen erheischend; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..... $\mathfrak{s}$ sind abermals ganze, positive, von der Nulle verschiedene Zahlen und die Summe ist auszudehnen auf alle dem eingeklammerten ähnlichen Ausdrücke, beziehlich alle Werthe der $\alpha$, $\beta$, .... $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ...., für welche die unten stehende Bedingungsgleichung gilt. Wir werden diese Summe, da sie sich auf eine $r$-malige Differentiation bezieht, der Kürze wegen mit $\mathfrak{S}^{(r)}$ bezeichnen und können unsere, nach gemachter Substitution identisch gewordene Differentialgleichung so wiedergeben:

$$\mathfrak{X}_n \mathfrak{S}^{(n)} + \mathfrak{X}_{n-1} \mathfrak{S}^{(n-1)} + \mathfrak{X}_{n-2} \mathfrak{S}^{(n-2)} + \ldots\ldots + \mathfrak{X}_1 \mathfrak{S}^{(1)} + \mathfrak{X}_0 \mathfrak{S}^{(0)} = 0 \tag{315}$$

und es handelt sich jetzt nur mehr um ihre nach den Dimensionen zu veranstaltende Zerlegung in die einzelnen Bestandgleichungen. Um diesen Zweck zu erreichen bemerken wir, dass eine jede Summe $\mathfrak{S}$, kraft der angehängten Bedingungsgleichung (314), ein Polynom andeute, bei welchem in den einzelnen Gliedern die Summe der Dimensionen mehr der Summe der Striche gleich einer constanten Grösse, gleich dem Exponenten der Summe ist. Wenn wir daher ordnen wollen nach den Dimensionen, so stehen in einer Summe $\mathfrak{S}^{(r)}$ zuerst die Glieder mit $r$ Dimensionen und ohne Strich, dann die mit $r-1$ Dimensionen und Einem Striche, dann mit $r-2$ Dimensionen und zwei Strichen u. s. w. Schreiben wir also die Dimensionszahlen oben und die der Striche unten, und deuten durch das Symbol $\left.\begin{matrix} r-p \\ p \end{matrix}\right\}$ die Summe aller zu $\mathfrak{S}^{(r)}$ gehöriger Glieder an, in denen die Anzahl der Striche $p$, die Anzahl der Dimensionen aber $r-p$ ist, so erhalten wir, um die oberwähnte Zerlegung zu reguliren, folgendes Schema:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} n-3 \\ 3 \end{matrix}\right\} + \ldots\ldots + \left.\begin{matrix} 3 \\ n-3 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 2 \\ n-2 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 1 \\ n-1 \end{matrix}\right\} = \mathfrak{S}^{(n)}, \\
&\left.\begin{matrix} n-1 \\ 0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} n-3 \\ 2 \end{matrix}\right\} + \ldots\ldots + \left.\begin{matrix} 3 \\ n-4 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 2 \\ n-3 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 1 \\ n-2 \end{matrix}\right\} = \mathfrak{S}^{(n-1)}, \\
&\left.\begin{matrix} n-2 \\ 0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} n-3 \\ 1 \end{matrix}\right\} + \ldots\ldots + \left.\begin{matrix} 3 \\ n-5 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 2 \\ n-4 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 1 \\ n-3 \end{matrix}\right\} = \mathfrak{S}^{(n-2)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{316}$$

und die gesuchten Bestandgleichungen, in dieser Art der Bezeichnung niedergeschrieben, sind folgende:

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\} \mathfrak{X}_n + \mathfrak{X}_0, \\
0 &= \left.\begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix}\right\} \mathfrak{X}_n + \left.\begin{matrix} n-1 \\ 0 \end{matrix}\right\} \mathfrak{X}_{n-1}, \\
0 &= \left.\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix}\right\} \mathfrak{X}_n + \left.\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix}\right\} \mathfrak{X}_{n-1} + \left.\begin{matrix} n-2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \mathfrak{X}_{n-2}, \\
0 &= \left.\begin{matrix} n-3 \\ 3 \end{matrix}\right\} \mathfrak{X}_n + \left.\begin{matrix} n-3 \\ 2 \end{matrix}\right\} \mathfrak{X}_{n-1} + \left.\begin{matrix} n-3 \\ 1 \end{matrix}\right\} \mathfrak{X}_{n-2} + \left.\begin{matrix} n-3 \\ 0 \end{matrix}\right\} \mathfrak{X}_{n-3}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{317}$$

$$\mathfrak{X}_n = N^{n-1},$$

$$\mathfrak{X}_{n-1} = -\frac{(n-1)\,n}{2}\,N^{n-1}\,\frac{N'}{N},$$

$$\mathfrak{X}_{n-2} = N^{n-1}\left[\frac{(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)}{2\times 2^2}\,\frac{N'^2}{N^2} - \frac{(n-2)(n-1)\,n}{2.3}\,\frac{N''}{N}\right],$$

$$\mathfrak{X}_{n-3}=N^{n-1}\left[-\frac{(n-3)(n-2)\dots(n+2)}{2.3\times 2^3}\,\frac{N'^3}{N^3}+\frac{(n-3)(n-2)\dots(n+1)}{2.2.3}\,\frac{N'}{N}\,\frac{N''}{N}-\frac{(n-3)(n-2)\dots n}{2.3.4}\,\frac{N'''}{N}\right],$$

(320)

$$\mathfrak{X}_{n-4}=N^{n-1}\left[\frac{(n-4)(n-3)\dots(n+3)}{2.3.4\times 2^4}\,\frac{N'^4}{N^4}-\frac{(n-4)(n-3)\dots(n+2)}{2\times 2^2.\,2.3}\,\frac{N'^2}{N^2}\,\frac{N''}{N}+\frac{(n-4)(n-3)\dots(n+1)}{2.\,2.3.4}\,\frac{N'}{N}\,\frac{N'''}{N}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-4)(n-3)\dots(n+1)}{2\times 2^2.3^2}\,\frac{N''^2}{N^2}-\frac{(n-4)(n-3)\dots\dots n}{2.3.4.5}\,\frac{N^{IV}}{N}\right],$$

$$\mathfrak{X}_{n-5}=N^{n-1}\left[-\frac{(n-5)(n-4)\dots(n+4)}{2.3.4.5\times 2^5}\,\frac{N'^5}{N^5}+\frac{(n-5)(n-4)\dots(n+3)}{2.3\times 2^3.\,2.3}\,\frac{N'^3}{N^3}\,\frac{N''}{N}-\frac{(n-5)(n-4)\dots(n+2)}{2\times 2^2.\,2.3.4}\,\frac{N'^2}{N^2}\,\frac{N'''}{N}\right.$$
$$-\frac{(n-5)(n-4)\dots(n+2)}{2\times 2.\,2^2.3^2}\,\frac{N'}{N}\,\frac{N''^2}{N^2}+\frac{(n-5)(n-4)\dots(n+1)}{2.\,2.3.4.5}\,\frac{N'}{N}\,\frac{N^{IV}}{N}$$
$$\left.+\frac{(n-5)(n-4)\dots(n+1)}{2.3.\,2.3.4}\,\frac{N''}{N}\,\frac{N'''}{N}-\frac{(n-5)(n-4)\dots\dots n}{2.3.4.5.6}\,\frac{N^{V}}{N}\right],$$

...............................................................................

Die allgemeine Formel für $\mathfrak{X}_{n-h}$ lässt sich auch hier wieder am besten in symbolischer Weise schreiben und sieht so aus:

$$(321)\quad \mathfrak{X}_{n-h}=\frac{N^{n-1}}{(n-h-1)\,!}\,\mathbf{S}\left\{\frac{(n+\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\dots+\mathfrak{a}_\tau-1)\,!}{\mathfrak{a}_1!\;\mathfrak{a}_2!\;\dots\mathfrak{a}_\tau!}\left(\frac{-N^{(\alpha_1)}}{(\alpha_1+1)!\,N}\right)^{\mathfrak{a}_1}\left(\frac{-N^{(\alpha_2)}}{(\alpha_2+1)!\,N}\right)^{\mathfrak{a}_2}\dots\left(\frac{-N^{(\alpha_\tau)}}{(\alpha_\tau+1)!\,N}\right)^{\mathfrak{a}_\tau}\right\},$$

$$(322)\qquad \mathfrak{a}_1\,\alpha_1+\mathfrak{a}_2\,\alpha_2+\mathfrak{a}_3\,\alpha_3+\dots\dots+\mathfrak{a}_\tau\,\alpha_\tau=h.$$

Auch hier bedeutet $\mathbf{S}$ ein Summenzeichen, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\tau$ ganze, positive, von der Nulle verschiedene Zahlen, eben so $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_\tau$, jene Differentiationen, diese Potenzirungen erheischend, und die Summirung bezieht sich auf alle Glieder wie das eingeklammerte, für welche die Bedingungsgleichung (322) erfüllt wird, d. h. für welche die Gesammtanzahl der Striche $=h$ ist. Diese Formel setzt uns in den Stand, die Werthe der successiven Coefficienten $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{X}_{n-1}$, $\mathfrak{X}_{n-2}$, ... mit Ausnahme des letzten $\mathfrak{X}_0$, welcher durch die (318) gegeben ist, einzeln zu bestimmen und so die, der algebraischen (304) für irgend einen Werth von $n$ entsprechende Differentialgleichung zu finden.

Wir wünschten nun aber auch im Besitze jener Differentialgleichung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung zu sein, welcher die algebraische:

$$(323)\qquad \varphi^n - M = 0$$

angehört, und in welcher offenbar, für die speziellen Werthe $n=2, 3, 4$, die uns bereits aus dem Früheren unter (72), (155) und (264) bekannten Gleichungen, wenn man in denselben beziehungsweise $N$, $O$ und $B$ in $\div M$ verwandelt, als besondere Fälle eben so enthalten sein müssen, wie die (305), (306) und (307) in der (309). Am zweckdienlichsten dürfte es erscheinen, aus der unter (321) aufgeführten allgemeinen und der (304) und (309) entsprechenden Coefficientenform, jene andere abzuleiten, die uns auf ähnliche Weise den Werth eines beliebigen $(n-h)^{\text{ten}}$ Coefficienten der verlangten Differentialgleichung zu liefern vermag, deren particuläre Integrale nämlich den $n$ Wurzeln der algebraischen Gleichung (323) entnommen sind und die wir uns unter der Form:

$$\mathfrak{J}_n y^{(n)} + \mathfrak{J}_{n-1} y^{(n-1)} + \mathfrak{J}_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots\ldots + \mathfrak{J}_1 y' + \mathfrak{J}_0 y = 0 \tag{324}$$

denken wollen. Um diess zu leisten, wird es aber offenbar genügen, die im Werthe (321) für $\mathfrak{X}_{n-h}$ erscheinenden Grössen $\frac{N^{(\alpha_1)}}{N}$, $\frac{N^{(\alpha_2)}}{N}$, ..... vermittelst der Gleichung: $N^n = M$, für welche evident die beiden algebraischen (304) und (323) und demnach auch die ihnen beziehungsweise entsprechenden Differentialgleichungen (309) und (324), wenigstens nach Multiplication sämmtlicher Glieder der einen oder der anderen durch einen und denselben geeigneten Factor, Glied für Glied zusammenstimmen — in Function von $M$ und seiner Differentialquotienten auszudrücken, was sich voraussichtlich auf rationale Weise leisten lässt. Denkt man sich überdiess die ganze Gleichung (309) durch $N^{n-1}$ dividirt, so verschwindet der in dem Werthe von $\mathfrak{X}_{n-h}$ vor dem Summenzeichen stehende Factor $N^{n-1}$, so, dass also:

$$\frac{1}{N^{n-1}} \cdot \mathfrak{X}_{n-h} = \mathfrak{J}_{n-h} \tag{325}$$

als reine und zwar rationale Function von $M$ und der Differentialquotienten dieser Grösse hingestellt zu werden vermag. Wir bedienen uns nun, um die angedeutete Umwandlung zu bewerkstelligen, einer allgemeinen, zur independenten Aufstellung eines beliebigen $r^{\text{ten}}$ Differentialquotienten einer Potenz wie $Q^p$ brauchbaren Formel, die wir an diesem Orte gleichfalls ohne Beweis hinstellen und die so aussieht:

$$\frac{d^r}{dx^r}[Q^p] = \mathbf{S}\left\{\frac{r!\,p!}{\mathfrak{k}!\,\mathfrak{l}!\,\mathfrak{m}!\ldots\mathfrak{w}!}\left(\frac{Q^{(\varkappa)}}{\varkappa!}\right)^{\mathfrak{k}}\left(\frac{Q^{(\lambda)}}{\lambda!}\right)^{\mathfrak{l}}\left(\frac{Q^{(\mu)}}{\mu!}\right)^{\mathfrak{m}}\ldots\ldots\left(\frac{Q^{(\omega)}}{\omega!}\right)^{\mathfrak{w}}\right\} \tag{326}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} + \mathfrak{l} + \mathfrak{m} + \ldots\ldots + \mathfrak{w} &= p \\ \mathfrak{k}\varkappa + \mathfrak{l}\lambda + \mathfrak{m}\mu + \ldots\ldots + \mathfrak{w}\omega &= r. \end{aligned} \tag{327}$$

Auch hier wieder bezieht sich die Summirung $\mathbf{S}$ auf alle Glieder wie das eingeklammerte, für welche die beiden Bedingungsgleichungen (327), und zwar für ganze und positive, von der Nulle verschiedene Werthe von $\mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \ldots \mathfrak{w}$, eben so für ganze, positive Werthe von $\varkappa, \lambda, \mu, \ldots \omega$, die Nulle jedoch mit einbegriffen, erfüllt erscheinen. Setzen wir nun in dieser Formel statt der Grössen:

$$Q, \qquad p, \qquad Q^p$$

beziehungsweise:

$$N, \qquad n, \qquad N^n = M,$$

und spezialisiren wir dieselbe für die aufeinanderfolgenden Werthe:

$$r = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ldots$$

so erhalten wir, gleichzeitig durch $N^n = M$ dividirend, das nachstehende System von Gleichungen:

$$\frac{M'}{M} = n\,\frac{N'}{N},$$

$$\frac{M''}{M} = n(n-1)\,\frac{N'^2}{N^2} + n\,\frac{N''}{N},$$

$$\frac{M'''}{M} = n(n-1)(n-2)\,\frac{N'^3}{N^3} + 3n(n-1)\,\frac{N'}{N}\,\frac{N''}{N} + n\,\frac{N'''}{N},$$

$$\text{(328)}\quad \frac{M^{IV}}{M} = n(n-1)\ldots(n-3)\,\frac{N'^4}{N^4} + 6n(n-1)(n-2)\,\frac{N'^2}{N^2}\,\frac{N''}{N} + 4n(n-1)\,\frac{N'}{N}\,\frac{N'''}{N} + 3n(n-1)\,\frac{N''^2}{N^2} + n\,\frac{N^{IV}}{N},$$

$$\frac{M^{V}}{M} = n(n-1)\ldots(n-4)\,\frac{N'^5}{N^5} + 10n(n-1)\ldots(n-3)\,\frac{N'^3}{N^3}\,\frac{N''}{N} + 10n(n-1)(n-2)\,\frac{N'^2}{N^2}\,\frac{N'''}{N}$$

$$+ 15n(n-1)(n-2)\,\frac{N'}{N}\,\frac{N''^2}{N^2} + 5n(n-1)\,\frac{N'}{N}\,\frac{N^{IV}}{N} + 10n(n-1)\,\frac{N''}{N}\,\frac{N'''}{N} + n\,\frac{N^{V}}{N},$$

...........................................................................

Aus der Auflösung dieser Gleichungen gehen nun ohne Weiteres, wie wir gewünscht haben, die Grössen $\frac{N'}{N}, \frac{N''}{N}, \frac{N'''}{N}, \ldots\ldots$ in Function von $\frac{M'}{M}, \frac{M''}{M}, \frac{M'''}{M}, \ldots\ldots$ hervor, und zwar erhalten wir der Reihe nach:

$$-\frac{N'}{N} = -\frac{1}{n}\,\frac{M'}{M},$$

$$-\frac{N''}{N} = \frac{n-1}{n^2}\,\frac{M'^2}{M^2} - \frac{1}{n}\,\frac{M''}{M},$$

$$-\frac{N'''}{N} = -\frac{(n-1)(2n-1)}{n^3}\,\frac{M'^3}{M^3} + \frac{3(n-1)}{n^2}\,\frac{M'}{M}\,\frac{M''}{M} - \frac{1}{n}\,\frac{M'''}{M},$$

$$\text{(329)}\quad -\frac{N^{IV}}{N} = \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4}\,\frac{M'^4}{M^4} - \frac{6(n-1)(2n-1)}{n^3}\,\frac{M'^2}{M^2}\,\frac{M''}{M} + \frac{n-1}{n^2M^2}\,(4M'M''' + 3M''^2) - \frac{M^{IV}}{nM},$$

$$-\frac{N^{V}}{N} = -\frac{(n-1)(2n-1)\ldots(4n-1)}{n^5}\,\frac{M'^5}{M^5} + \frac{10(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4}\,\frac{M'^3}{M^3}\,\frac{M''}{M} - \frac{10(n-1)(2n-1)}{n^3}\,\frac{M'^2}{M^2}\,\frac{M'''}{M}$$

$$- \frac{15(n-1)(2n-1)}{n^3}\,\frac{M'}{M}\,\frac{M''^2}{M^2} + \frac{5(n-1)}{n^2}\,\frac{M'}{M}\,\frac{M^{IV}}{M} + \frac{10(n-1)}{n^2}\,\frac{M''}{M}\,\frac{M'''}{M} - \frac{1}{n}\,\frac{M^{V}}{M},$$

...........................................................................

$$-\frac{N^{(s)}}{N}=s!\,\Sigma\left\{\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\dots((\mathfrak{k}+\mathfrak{l}+\dots+\mathfrak{w}-1)n-1)}{\mathfrak{k}!\,\mathfrak{l}!\dots\mathfrak{w}!\;\;n^{\mathfrak{k}+\mathfrak{l}+\dots+\mathfrak{w}}}\left(\frac{-M^{(\varkappa)}}{\varkappa!\,M}\right)^{\mathfrak{k}}\left(\frac{-M^{(\lambda)}}{\lambda!\,M}\right)^{\mathfrak{l}}\dots\left(\frac{-M^{(\omega)}}{\omega!\,M}\right)^{\mathfrak{w}}\right\}, \tag{330}$$

$$\mathfrak{k}\varkappa+\mathfrak{l}\lambda+\dots\dots+\mathfrak{w}\omega=s. \tag{331}$$

**wo $\Sigma$ abermals ein Summenzeichen ist, die untenstehende Bedingungsgleichung aber für alle in die Summe eingehenden Glieder erfüllt sein muss. Wir sind nunmehr bereits in der Lage $\mathfrak{X}_{n-h}$, welches unter der Form (321) sämmtliche Coefficienten der (309) zu liefern geeignet ist, in $\mathfrak{J}_{n-h}$, d. h. in die andere, sämmtliche Coefficienten der (324) in sich begreifende Form zu verwandeln. Wir brauchen zu dem Ende nur die aus der letzterhaltenen Gleichung (330) für $s=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_\tau$ hervorgehenden Werthe in die (321) hineinzusetzen, diese noch, in Berücksichtigung der Gleichung (325), durch $N^{n-1}$ zu dividiren und erhalten sofort:**

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_{n-h}=\frac{1}{(n-h-1)!}\,\mathfrak{S}\Bigg\{&\frac{(n+\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\dots\dots+\mathfrak{a}_\tau-1)!}{\mathfrak{a}_1!\,\mathfrak{a}_2!\,\dots\dots\,\mathfrak{a}_\tau!}\times\\
\times&\left[\frac{1}{\alpha_1+1}\Sigma\left\{\frac{(n-1)(2n-1)\dots((\mathfrak{k}_1+\mathfrak{l}_1+\dots+\mathfrak{w}_1-1)n-1)}{\mathfrak{k}_1!\,\mathfrak{l}_1!\dots\mathfrak{w}_1!\;\;n^{\mathfrak{k}_1+\mathfrak{l}_1+\dots+\mathfrak{w}_1}}\left(\frac{-M^{(\varkappa_1)}}{\varkappa_1!\,M}\right)^{\mathfrak{k}_1}\left(\frac{-M^{(\lambda_1)}}{\lambda_1!\,M}\right)^{\mathfrak{l}_1}\dots\left(\frac{-M^{(\omega_1)}}{\omega_1!\,M}\right)^{\mathfrak{w}_1}\right\}\right]^{\mathfrak{a}_1}\\
\times&\left[\frac{1}{\alpha_2+1}\Sigma\left\{\frac{(n-1)(2n-1)\dots((\mathfrak{k}_2+\mathfrak{l}_2+\dots+\mathfrak{w}_2-1)n-1)}{\mathfrak{k}_2!\,\mathfrak{l}_2!\dots\mathfrak{w}_2!\;\;n^{\mathfrak{k}_2+\mathfrak{l}_2+\dots+\mathfrak{w}_2}}\left(\frac{-M^{(\varkappa_2)}}{\varkappa_2!\,M}\right)^{\mathfrak{k}_2}\left(\frac{-M^{(\lambda_2)}}{\lambda_2!\,M}\right)^{\mathfrak{l}_2}\dots\left(\frac{-M^{(\omega_2)}}{\omega_2!\,M}\right)^{\mathfrak{w}_2}\right\}\right]^{\mathfrak{a}_2}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\times&\left[\frac{1}{\alpha_\tau+1}\Sigma\left\{\frac{(n-1)(2n-1)\dots((\mathfrak{k}_\tau+\mathfrak{l}_\tau+\dots+\mathfrak{w}_\tau-1)n-1)}{\mathfrak{k}_\tau!\,\mathfrak{l}_\tau!\dots\mathfrak{w}_\tau!\;\;n^{\mathfrak{k}_\tau+\mathfrak{l}_\tau+\dots+\mathfrak{w}_\tau}}\left(\frac{-M^{(\varkappa_\tau)}}{\varkappa_\tau!\,M}\right)^{\mathfrak{k}_\tau}\left(\frac{-M^{(\lambda_\tau)}}{\lambda_\tau!\,M}\right)^{\mathfrak{l}_\tau}\dots\left(\frac{-M^{(\omega_\tau)}}{\omega_\tau!\,M}\right)^{\mathfrak{w}_\tau}\right\}\right]^{\mathfrak{a}_\tau}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{332}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}_1\varkappa_1+\mathfrak{l}_1\lambda_1+\dots\dots\dots+\mathfrak{w}_1\omega_1&=\alpha_1,\\
\mathfrak{k}_2\varkappa_2+\mathfrak{l}_2\lambda_2+\dots\dots\dots+\mathfrak{w}_2\omega_2&=\alpha_2,\\
\mathfrak{k}_3\varkappa_3+\mathfrak{l}_3\lambda_3+\dots\dots\dots+\mathfrak{w}_3\omega_3&=\alpha_3,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\
\mathfrak{k}_\tau\varkappa_\tau+\mathfrak{l}_\tau\lambda_\tau+\dots\dots\dots+\mathfrak{w}_\tau\omega_\tau&=\alpha_\tau;\\
\mathfrak{a}_1\alpha_1+\mathfrak{a}_2\alpha_2+\dots\dots\dots+\mathfrak{a}_\tau\alpha_\tau&=h.\end{aligned} \tag{333}$$

**Berechnet man nach dieser allgemeinen Formel, mit sorgfältiger Beachtung der angehängten Beziehungsgleichungen, die Coefficienten $\mathfrak{J}_n$, $\mathfrak{J}_{n-1}$, ... und setzt dieselben in die (324), so bekömmt man, nach gehöriger Wegschaffung der Brüche, diejenige Differentialgleichung, die das Ziel unserer Untersuchung ist, und die wir abermals in einem Grade der Entwicklung hinschreiben, so, dass aus ihr alle speziellen Fälle bis einschliesslich zu $n=6$ abgeleitet werden können, weil wir dem Leser den allerdings etwas lästigen Gebrauch der combinatorischen Formen ersparen wollen, was hier um so erspriesslicher erscheint, als derselbe zu stets complizirteren und grössere Zahlencoefficienten bergenden Ausdrücken führt. Die in Rede stehende Differentialgleichung aber hat folgende Gestalt:**

$$
\begin{aligned}
& n^{n-1} M^{n-1} \qquad . \, y^{(n)} \\
& - \frac{n(n-1)}{2} \; n^{n-2} M^{n-2} M' \, . \, y^{(n-1)}, \\
& + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \; n^{n-3} M^{n-3} . y^{(n-2)} \Big[ \frac{1}{4} (7n-1) M'^2 - nMM'' \Big], \\
& - \frac{n(n-1)\ldots(n-3)}{2.3.4} n^{n-4} M^{n-4} . y^{(n-3)} \Big[ \frac{1}{2} (9n^2 - 3n) \; M'^3 - (5n-1) \; nMM'M'' + n^2 M^2 M''' \Big] \\
& + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{2.3.4.5} n^{n-5} M^{n-5} . y^{(n-4)} \Big[ \frac{1}{48} (743n^3 - 398n^2 + 13n + 2) M'^4 - \frac{1}{6} (152n^2 - 63n + 1) nMM'^2 M'' \\
& \qquad + \frac{1}{2} (13n-3) n^2 M^2 M' M''' + \frac{1}{3} (14n-4) \, n^2 M^2 M''^2 - n^3 M^3 M^{IV} \Big] \\
& - \frac{n(n-1)..(n-5)}{2.3.4.5.6} n^{n-6} M^{n-6} . y^{(n-5)} \Big[ \frac{1}{16} (1075 n^4 - 790 n^3 + 65 n^2 + 10n) M'^5 - \\
& \qquad - \frac{1}{4} (579 n^3 - 362 n^2 + 21n + 2) \, nMM'^3 M'' + \frac{1}{4} (163 n^2 - 75n + 2) \, n^2 M^2 M'^2 M''' \\
& \qquad + (59n^2 - 30n + 1) n^2 M^2 M' M''^2 - (8n-2) n^3 M^3 M' M^{IV} - (15n-5) n^3 M^3 M'' M''' + n^4 M^4 M^V \Big] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad - n^{n-1} M^n . y = 0.
\end{aligned} \tag{334}
$$

Man überzeugt sich sehr leicht, dass in ihr die speziellen Gleichungen für $n = 2, 3, 4$, d. h. die Gleichungen (72), (155) und (264) als besondere Fälle enthalten seien. Für $n = 5$ und für $n = 6$ aber verwandelt sich dieselbe in die den beiden algebraischen:

$$
\varphi^5 - M = 0 \quad \text{und} \quad \varphi^6 - M = 0 \tag{335}
$$

entsprechenden, denen wir, ihres möglichen Vorkommens wegen, hier eine Stelle gönnen:

$$
\begin{aligned}
& 625 M^4 . y^V - 1250 M^3 M' . y^{IV} + (2125 M^2 M'^2 - 1250 M^3 M'') \, y''' \\
& \qquad - (2625 \, MM'^3 - 3000 \, M^2 M' M'' + 625 \, M^3 M''') \, y'' \\
& \qquad + (1729 M'^4 - 2905 MM'^2 M'' + 775 M^2 M' M''' + 550 M^2 M''^2 - 125 M^3 M^{IV}) \, y' - 625 M^5 . y = 0,
\end{aligned} \tag{336}
$$

$$
\begin{aligned}
& 648 M^5 . y^{VI} - 1620 \, M^4 M' . y^V + (3690 \, M^3 M'^2 - 2160 \, M^4 M'') \, y^{IV} \\
& \qquad - (6885 \, M^2 M'^3 - 7830 \, M^3 M' M'' + 1620 \, M^4 M''') \, y''' \\
& \qquad + (9140 \, MM'^4 - 15285 \, M^2 M'^2 M'' + 4050 \, M^3 M' M''' + 2880 \, M^3 M''^2 - 648 \, M^4 M^{IV}) \; y'' \\
& \qquad - (6380 \, M'^5 - 14020 \, MM'^3 M'' + 4065 \, M^2 M'^2 M''' + 5835 \, M^2 M' M''^2 \\
& \qquad\qquad - 828 \, M^3 M' M^{IV} - 1530 \, M^3 M'' M''' + 108 \, M^4 M^V) \, y' - 648 \, M^6 . y = 0.
\end{aligned} \tag{337}
$$

Wir achten nicht für nöthig das ohnehin in die Augen Fallende, den Bau der Coefficienten in Bezug auf ihre Ordnungszahlen Angehende, hier besonders hervorzuheben — die volle Congruenz der beiden, die algebraische und die Differentialgleichung umspannenden Polygone findet auch hier statt. Eben

Man kann diese Gleichung, indem man sie nach $k$ ordnet, auch auf folgende Form bringen:

$$
\begin{aligned}
&k^{n-1} + k^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{m+n}{n} \\
&+ k^{n-3}\frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{2.3\qquad 4}\left(\frac{m+n}{n}\right)^2 \\
&+ k^{n-4}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}\,\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{m+n}{n}\right)^3 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ 1.2.3.4.5\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (n-2)(n-1)\left(\frac{m+n}{n}\right)^{n-1} = 0,
\end{aligned}
\tag{340}
$$

In dieser Form gewahrt man an ihr die Eigenschaft, nach geschehener Substitution einer neuen Unbekannten, durch die Gleichung:

$$k = \frac{m+n}{n}\varkappa, \tag{341}$$

eine Division durch $\left(\frac{m+n}{n}\right)^{n-1}$ zuzulassen und nach derselben sich zu verwandeln in:

$$
\begin{aligned}
&\varkappa^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\varkappa^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{2.3\qquad 4}\varkappa^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}\,\frac{n(n-1)}{2}\varkappa^{n-4} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1.2.3.4.5\ldots\ldots\ldots\ldots(n-2)(n-1) = 0.
\end{aligned}
\tag{342}
$$

Allein zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man in der Gleichung (340) in $k$, anstatt $m$ die Nulle schreibt und $k$ in $\varkappa$ umsetzt. Da nun durch diese Veränderungen die ursprüngliche Gleichung in $k$, nämlich die (339), übergeht in:

$$(\varkappa+n-1)(\varkappa+n-2)(\varkappa+n-3)\ \ldots\ldots\ (\varkappa+3)(\varkappa+2)(\varkappa+1) = 0, \tag{343}$$

mit Wurzeln:

$$\varkappa = -1,\quad -2,\quad -3,\quad \ldots\ldots\quad -(n-2),\quad -(n-1), \tag{344}$$

eine Überzeugung, die man unmittelbar gewinnt, wenn man bedenkt, dass in sämmtlichen mittleren Coefficienten der Gleichung (334) keine Glieder ohne gestrichelte $M$ erscheinen, und sonach in sämmtlichen mittleren Gliedern der Gleichung (339), bei Berücksichtigung ihrer Ableitungsweise aus der (334) und der Form der Werthe (338), überall $m$ als Factor sich herausstellen wird — so sind offenbar die Wurzeln der Gleichung (339) oder (340) in $k$:

$$k = -\frac{m+n}{n},\quad -2\frac{m+n}{n},\quad -3\frac{m+n}{n},\quad \ldots\ldots\quad -(n-2)\frac{m+n}{n},\quad -(n-1)\frac{m+n}{n}, \tag{345}$$

und bilden eine $(n-1)$-gliedrige Gruppe von Brüchen mit dem Nenner $n$, die zu einander in dem einfachen Verhältnisse der natürlichen Zahlen: $1, 2, 3, \ldots\ldots, n-2, n-1$ stehen, wie sich nach unseren gemachten Erfahrungen auch voraussehen liess und wir bemerken nur noch, dass der $m$ genannte Exponent nicht nur alle möglichen ganzen und positiven Werthe annehmen könne, sondern

## §. 14.

## Über die Differentialgleichung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, welche einer beliebigen, algebraischen Gleichung des $n^{\text{ten}}$ Grades entspricht.

Wenn wir bisher die Spuren irrationaler particulärer Integrale, oder, genauer gesprochen, solcher, welche im Exponenten der Exponentielle irrationale Grössen beherbergen, mit besonderer Sorgfalt verfolgt, und zu diesem Zwecke selbst weitläufigere Rechnungsentwicklungen nicht gescheut haben, so liegt der Grund hievon grossentheils in dem gar nicht seltenen Erscheinen von Differentialgleichungen im Gebiethe der mathematischen Physik, bei denen wirklich solche Spuren und namentlich Werthe der bisher $k$ genannten Grösse auftauchen, welche negative, einfache, ganze oder gebrochene Zahlen sind und deren Vorkommen, wie wir in den bisher erörterten speziellen Fällen gesehen haben, ein charakteristisches Merkmal solcher Irrationalgrössen ist. Es wäre desshalb zu wünschen, dass man Wege der Analysis entdecken möge, die zu den bisherigen Resultaten mit ungleich leichterer Mühe führen, auf dass man in den Stand gesetzt werde, die Differentialgleichung wirklich zu construiren, die der allgemeinen, algebraischen des $n^{\text{ten}}$ Grades, mit Coefficienten, die der ersten Functionsclasse angehören, entspricht. Wir hegen indessen, in Anbetracht der Länge des Rechnungsresultates, nur geringe Hoffnung jemals zu diesem Ziele vorzudringen und sehen uns desshalb genöthigt, wenigstens diejenigen Aufschlüsse über die Natur der in Rede stehenden Differentialgleichung, zu denen man gelangen kann, ohne dieselbe wirklich zu besitzen, insoferne als sie uns kund geworden sind, auch dem Leser zu geben. — Nehmen wir also an, es sei eine algebraische Gleichung des $n^{\text{ten}}$ Grades gegeben, wie:

$$L\varphi^{n} + M\varphi^{n-1} + \ldots\ldots + Q\varphi + R = 0, \tag{346}$$

wo $L$, $M$, .... $Q$, $R$, wie oben angedeutet, als algebraische, oder allgemeiner als Functionen erster Klasse nach $x$ vorausgesetzt werden; ihre Wurzeln seien:

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi_n;$$

die hieraus durch Differentiation nach $\varphi$ erhaltene, die mit ihr zugleich erfüllt sein muss, wenn gleiche Wurzeln vorhanden sind, ist:

$$nL\varphi^{n-1} + (n-1)\,M\varphi^{n-2} + \ldots\ldots + Q = 0. \tag{347}$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen $\varphi$, so ist die erhaltene Eliminationsgleichung offenbar die Bedingungsgleichung des Vorhandenseins gleicher Wurzeln und wird somit für alle diejenigen Werthe von $x$ erfüllt sein, bei denen irgend welche Wurzeln der vorgelegten Gleichung (346) einander gleich werden, und somit auch für alle diejenigen Werthe von $x$, bei denen ein Übergang von reell in imaginär und umgekehrt stattfindet, denn dieser Übergang findet ja eben durch gleiche Wurzeln statt. Die Elimination von $\varphi$ kann man sich auf jede beliebige Weise bewerkstelligt denken, und unter anderen auch auf die folgende: Man substituire in die (347) der Reihe nach alle $n$ Wurzeln der (346), so, dass man erhält:

nicht mehr und nicht weniger, erscheinen wird. Die Quadratwurzel wird sich daher ziehen lassen und wirklich gezogen das Product:

$$(351)\quad \sqrt{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} L^n (\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_1-\varphi_3)\ldots(\varphi_1-\varphi_n)(\varphi_2-\varphi_3)\ldots(\varphi_2-\varphi_n)\ldots\ldots(\varphi_{n-1}-\varphi_n)} = G$$

als Resultat liefern. Aus der auch *a posteriori* erweislichen Zweiwerthigkeit dieser Function folgt, dass wir von ihr allenfalls Gebrauch machen können, um die ebenfalls zweiwerthigen Coefficienten der Differentialgleichung, die der algebraischen (346) entspricht, auf dem Wege der Multiplication in symmetrische zu verwandeln, was um so zweckmässiger erscheint, als diese Function $G$ selbst den ersten Bestandtheil des ersten Coefficienten, nämlich den mit noch gar keinem gestrichelten $\varphi$ verbundenen, bildet — einige Aufmerksamkeit auf den Gang der Rechnungen bei den Differentialgleichungen der zweiten und dritten Ordnung, beziehungsweise ein Vergleichen der dort vorkommenden Gleichungen (63) und (96) mit der eben erhaltenen Form (351) macht diess für $n=2$ und $n=3$ in die Augen fallend, was sich auch ganz allgemein für ein beliebiges $n$ nachweisen lässt. In der That besteht das zweiwerthige Polynom, welches den ersten Theil des ersten Coefficienten der Differentialgleichung bildet, aus lauter Gliedern von der Form:

$$\varphi_\alpha^0\, \varphi_\beta^1\, \varphi_\gamma^2\, \varphi_\delta^3 \ldots\ldots \varphi_\nu^{n-1},$$

unter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, .....$\nu$ die, durch Permutiren in alle möglichen Ordnungen gebrachten und auch in den verschiedenen Gliedern in allen möglichen Ordnungen vorkommenden Stellenzeiger 1, 2, 3, ... $n$ verstanden. Ein jedes dieser Glieder ist überdiess ein Product aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Factoren; dasselbe lässt sich aber auch von dem entwickelten Producte (351) behaupten und der Umstand, dass sich dieses, durch Änderung aller Zeichen — in $+$, offenbar in eine symmetrische Function verwandelt, überzeugt uns von dem Vorhandensein der Stellenzeiger in allen möglichen Ordnungen in seiner entwickelten Form, also von der Zusammensetzung der beiden Polynome aus genau denselben Gliedern. Dass sich endlich diese Congruenz auch auf die Zeichen erstrecke, beweist die gleiche Eigenschaft beider in Rede stehenden Functionen bei einer Vertauschung zweier der darin vorkommenden Grössen nur das Zeichen zu ändern, in Verbindung mit dem Umstande, dass die (351) die einfachste der zweiwerthigen Functionen dieser Art ist und dass zur Bildung des aus ihr hervorgehenden Polynomes ein einfaches combinatorisches Verfahren vorliege, das nur zu einem einzigen Resultate leitet, so dass also das Vorkommen des Ausdruckes (351), bis auf einen von den $\varphi$ unabhängigen Factor, als erster Bestandtheil des ersten Differentialgleichungs-Coefficienten als erwiesen zu betrachten ist.

Hat man aber das $G$ so zum allgemeinen Multiplicator erkiesen, so lässt sich darthun, dass sonst nichts als eben dieses $G$, in verschiedenen Potenzen jedoch, erscheinen werde in den Nennern der einzelnen symmetrischen Functionen, aus denen sich die Gleichungscoefficienten zusammensetzen. In der That muss man zuvörderst, wegen des Vorkommens der Differentialquotienten von $\varphi$ inclusive bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ und zur Ermittlung ihrer Werthe, die algebraische Gleichung (346) und zwar $(n-1)$-mal differenziren. Die erste dieser Differentiationen gibt den Werth von $\varphi'$, und zwar:

Diess führt, auf dem Wege der Differentiation und Substitution aus (354), zu folgender Formel:

$$\mathfrak{X}_{n-1} = -\mathfrak{X}'_n + (2h+1)\frac{GG'}{G^2}\mathfrak{X}_n + \frac{M}{L}\mathfrak{X}_n. \tag{356}$$

Die übrigen Coefficienten lassen sich, selbst ihrer Zusammensetzung nach, nur durch eine tiefer gehende, mit sehr bedeutenden Rechnungsentwicklungen verknüpfte und eben deshalb auch weniger Nutzen gewährende Analysis ableiten. Einiges lässt sich indessen über sie aus einfachen allgemeinen Betrachtungen noch sagen, und zwar:

Es kann gezeigt werden, dass dasselbe die Ordnungszahlen der Coefficienten umspannende Polygon, nach weggeschnittenen einspringenden Winkeln, und mit Rücksicht auf die an der letzten Seite gelegentlich vorhandene Unsicherheit, der algebraischen und der Differentialgleichung angehöre. Es dienen hiezu folgende Betrachtungen: Führt man in die algebraische Gleichung (346) eine neue Wurzel $\varphi_{n+1}$ durch Multiplication mit dem Wurzelfactor $(\varphi - \varphi_{n+1})$ ein, so gelangt man zu einer neuen Gleichung vom Grade $n+1$ und diese ist:

$$L.\varphi^{n+1} + (M - L\varphi_{n+1})\varphi^n + (N - M\varphi_{n+1})\varphi^{n-1} + \ldots\ldots + (R - Q\varphi_{n+1})\varphi - R\varphi_{n+1} = 0; \tag{357}$$

von ihr lässt sich durch sehr einfache Überlegung darthun, dass, in Bezug auf die Ordnungszahlen der Coefficienten, die Einführung der neuen Wurzel dieselbe Wirkung habe, wie die Einführung eines neuen particulären Integrales $e^{\int \varphi_{n+1}\,dx}$ in die entsprechende Differentialgleichung. Wenn z. B. $p$ die Ordnungszahl der Function $\varphi_{n+1}$ ist, so resultirt daraus ein Ansteigen vom ersten auf den zweiten Coefficienten um $p$ Einheiten in der Ordnungszahl, falls nicht von $L$ auf $M$ schon ursprünglich und in der alten Gleichung ein solches oder stärkeres Ansteigen vorhanden war. Im letzteren Falle ist dieses selbe Ansteigen vom zweiten auf den dritten Coefficienten bemerklich, falls nicht wieder in der alten Gleichung bereits ein solches von $M$ auf $N$ stattfand, dann aber rückt dieses Ansteigen zum nächsten, oder vielmehr zu demjenigen Coefficientenpaare, das in der alten Gleichung ein solches stärkeres Ansteigen nicht darbot. Also dasselbe Phänomen der durch Einführung neuer particulärer Integrale verursachten Ansteigungen in den Anfangscoefficienten, mit Beobachtung genau derselben Etiquette, findet in gleicher Weise statt bei der algebraischen und der ihr zugehörenden Differentialgleichung, welchem Grade auch beide angehören mögen. Die nächste Folge hievon ist die volle Congruenz der die Ordnungszahlen der Coefficienten hier und dort umspannenden Polygone und es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die Giltigkeit des eben Gesagten keineswegs an die Bedingung einer ganzen Ordnungszahl $p$ geknüpft sei, dass also $\varphi_{n+1}$, nach Belieben, gebrochen, oder auch irrational sein könne, wenn sein $p$ nur die Nulle überschreitet. Ist aber $p = 0$, so kann gezeigt werden, dass der Bereich der in Bezug auf ihre Ordnungszahlen im Niveau stehenden Glieder sich um Ein Gliederpaar vermehre. Geht aber $p$ in eine negative Zahl $-p$ über, so resultirt hieraus ein Abfallen um $p$ Einheiten in irgend einem der letzten Coefficientenpaare, welches in der algebraischen Gleichung mit voller und strenger Beobachtung der Etiquette sich jederzeit zu den übrigen gruppirt, während in der Differentialgleichung, in Fällen wo der numerische Werth von $-p$ die Einheit überschreitet, von dieser strengen Etiquette eine Ausnahme stattzufinden vermag. Gleichwohl deutet ein

stischen Werthe derjenigen Grösse, die wir mit $k$ bezeichnet haben, möglich zu machen. Andererseits darf wiederum nicht übersehen werden, dass auch die algebraische Gleichung an complizirtem Bau aller und namentlich des ersten Coefficienten, wir meinen an Factorenzahl. die Differentialgleichung übertreffen könne; denn wir wissen, dass ein Divisor von $\varphi$, wie $x-\alpha$, nur dann nothwendig als Factor im ersten Coefficienten der Differentialgleichung erscheine, wenn das ihm zugehörige $k$, respective der mit entgegengesetztem Zeichen des zugehörigen Partialbruchs von $\varphi$ genommene Zähler, endweder positiv und beliebig, oder negativ und gebrochen, oder unbestimmtes Buchstabensymbol, mit einem Worte nur nicht ganz, negativ und zugleich numerisch kleiner ist als $n$ d. h. als die Ordnungszahl der Differentialgleichung. Solche Divisoren $x-\alpha$ nämlich, denen ein ganzes, negatives und numerisch kleineres $k$ entspricht, als diese Ordnungszahl $n$, können zwar gelegentlich auch in den ersten Coefficienten der Differentialgleichung fallen, sind aber in der Regel dort nicht vorhanden. Der erste Coefficient hingegen der algebraischen Gleichung besitzt sie nothwendigerweise. Liesse sich daher auf irgend eine Art beweisen, dass eine Differentialgleichung lauter der Form $e^{\int \varphi dx}$ angehörige particuläre Integrale besitze, deren $\varphi$ als Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit algebraischen und ganzen Coefficienten nach $x$ anzusehen sind, so würde man, aus der blossen Ansicht der ersteren, auch die letztere, wenigstens ihrer Form nach, unmittelbar niederschreiben können; ja, bedenkt man, dass es gar nichts schade den ersten Coefficienten nach Belieben zu wählen, indem man demselben, durch Multiplication der Gleichung mit einem entsprechenden Factor, auch jeden beliebigen Werth wirklich ertheilen kann, so sieht man recht wohl ein, dass man berechtigt sei, der algebraischen Gleichung als ersten Coefficienten eben den der Differentialgleichung angehörigen ersten Coefficienten zuzutheilen, weil man sicher sein kann, dass, wenn ihm dadurch etwa zu viel Factoren zugetheilt worden wären, nichts weiter als eine Theilbarkeit der ganzen algebraischen Gleichung durch eben diese zugetheilten überflüssigen Factoren, also ein Umweg beim Integrationsverfahren, davon die Folge sein könnte. Man liefe aber, so vorgehend, immer noch Gefahr, dem ersten Coefficienten zu wenige Factoren zuzutheilen und namentlich die mit negativem und ganzen $k$ auszuschliessen. Die natürliche Folge hievon wäre, dass die übrigen Coefficienten in Form von unendlichen und zwar recurrirenden Reihen erschienen, man also die vorhandene algebraische Gleichung mit geschlossenen ganzen Coefficienten dennoch verfehlt hätte. Wie man sich zu benehmen habe, um den erwähnten beiden Unzukömmlichkeiten auszuweichen, d. h. um einerseits jeden Umweg, der, durch Ertheilung zu vieler Factoren an den ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung, in die Rechnung kommen könnte, möglichst zu vermeiden und andererseits auch durch Ertheilung zu weniger solcher die geschlossene Coefficientenform, wenn sie vorhanden ist, nicht zu verfehlen, wird der fünfte Abschnitt dieses Werkes lehren.

Die den ersten Coefficienten der algebraischen und der Differentialgleichung gemeinschaftlichen Factoren bilden nicht die einzige Verwandtschaft zwischen diesen beiden Functionen; auch die Werthe des stets mit $k$ bezeichneten Exponenten lassen sich, wenn auch nicht auf dieselbe, doch wenigstens auf ähnliche Weise, bei der algebraischen wie bei der Differentialgleichung rechnen. Wie wir nämlich gesehen haben, kömmt es dabei auf den Werth an, den der mit $x-\alpha$ multiplizirte zweite

Coefficient der Differentialgleichung, durch den ersten getheilt, für $x=\alpha$ liefert — ein Werth, der die Eigenschaft hat, bei jedem neu eingeführten particulären Integrale sich um die Einheit zu vergrössern und bei einer Gleichung der ersten Ordnung den zum Factor $x-\alpha$, der im Nenner vorhanden gedacht wird, zugehörigen Exponenten selbst, folglich bei einer Gleichung der $n^{ten}$ Ordnung eben diesen um $(n-1)$ Einheiten vermehrten Exponenten zu geben. Denkt man sich das particuläre Integral, welches auf diese Weise die Eigenschaft hat für $x=\alpha$ unendlich zu werden, in der Form $e^{\int\varphi dx}$, so enthält eben $\varphi$ den Divisor $x-\alpha$ und es lässt sich $\varphi=\frac{\psi}{x-\alpha}$ voraussetzen, oder, vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel, in Reihenform:

$$\varphi=\frac{\psi_\alpha}{x-\alpha}+\chi, \tag{358}$$

wo $\chi$ das Ergänzungsglied ist und sohin eine Function, die die Eigenschaft nicht mehr hat für $x=\alpha$ unendlich zu werden. Es folgt aber hieraus:

$$\int\varphi\,dx = log\,(x-\alpha)^{\psi_\alpha}+\int\chi\,dx$$

und

$$e^{\int\varphi dx}=\frac{1}{(x-\alpha)^{-\psi_\alpha}}\,e^{\int\chi dx}$$

und hieraus schliessen wir, dass der zu $x-\alpha$ gehörige Exponent $k$ gerade den Werth:

$$k=-\psi_\alpha=-(x-\alpha)\,\varphi\Big\}_\alpha \tag{359}$$

habe und diess zwar, ob es jetzt nur Ein, oder ob es mehrere particuläre Integrale gibt, denen ein ähnlicher Nenner anhängt, oder mit anderen Worten, ob im ersten Coefficienten der Differentialgleichung nur Ein solcher Factor, oder mehrere vorhanden sind, die sich dann in absteigender Ordnung auf die folgenden Coefficienten übertragen. Diess vorausgesetzt wenden wir uns zur algebraischen Gleichung (357), in der wir, analog mit dem eben beschriebenen Verfahren, den mit $x-\alpha$ multiplizirten zweiten Coefficienten durch den ersten theilend erhalten:

$$\frac{M}{L}(x-\alpha)-\varphi_{n+1}(x-\alpha).$$

Wäre nun $x-\alpha$ gerade der zu $\varphi_{n+1}$ gehörige Divisor und in $L$ nicht enthalten, so wäre für $x=\alpha$ der Werth dieses Quotienten gerade:

$$k=-\varphi_{n+1}(x-\alpha)\Big\}_\alpha. \tag{360}$$

Wäre im Gegentheile $L$ mit diesem Factor versehen und $\varphi_{n+1}$ davon frei, so wäre der Werth des Quotienten genau derselbe mit dem aus der nächstvorhergehenden Gleichung (346) erhaltenen, so dass also die Einführung einer neuen Wurzel $\varphi_{n+1}$ alle Werthe von $k$ ganz unangetastet lässt, und diess ist der wesentliche Unterschied im Verhalten der algebraischen und der Differentialgleichung; übrigens aber liefern beide die Werthe von $k$ durch dasselbe Verfahren des Zerlegens in Partialbrüche, worin wieder das Übereinstimmende in ihrem Verhalten liegt.

Dieselbe Übereinstimmung und derselbe Unterschied erstreckt sich auch auf die Fälle, wo zwei, drei, ..... $r$ particuläre Integrale mit Nennern wie $(x-\alpha)^k$ versehen sind, wo also die Differentialgleichungs-Coefficienten solcher Factoren der Reihe nach 2, 1, oder 3, 2, 1, oder allgemein $r, r-1, \ldots\ldots 2, 1$ an der Zahl enthalten. In der That bekömmt man in dem ersten dieser Fälle, zur Bestimmung der zwei Werthe von $k$, die, wenn $\varphi_1$ und $\varphi_2$ die in Rede stehenden particulären Integrale sind, offenbar:

$$k = -(x-\alpha)\,\varphi_1\Big\}_\alpha \quad \text{und} \quad -(x-\alpha)\,\varphi_2\Big\}_\alpha \tag{361}$$

heissen werden, aus der (353) folgende Gleichung (s. §. 7):

$$\left\{\frac{\mathfrak{X}_n}{(x-\alpha)^2}(k+n-1)(k+n-2) - \frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{x-\alpha}(k+n-2) + \mathfrak{X}_{n-2}\right\}_\alpha = 0. \tag{362}$$

Bildet man nun eine ähnliche Gleichung mit Hilfe der drei ersten Coefficienten der (346), nur mit dem Unterschiede, dass, mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Einführung einer neuen Wurzel $\varphi$ in die algebraische Gleichung den Werth von $k$ nicht vermehrt um Eins, sondern unverändert lässt, anstatt der Factoren $k+n-1$, $k+n-2$, überall $k$ schlechtweg zu stehen kömmt, so ist sie die folgende:

$$\left\{\frac{L}{(x-\alpha)^2}k^2 - \frac{M}{x-\alpha}k + N\right\}_\alpha = 0, \tag{363}$$

und hat dieselben zwei Wurzeln (361). Der Beweis ist leicht zu führen. Es ist nämlich, wie Jedermann weiss:

$$M = -L(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots\ldots+\varphi_n), \qquad N = L(\varphi_1\varphi_2+\varphi_1\varphi_3+\ldots\ldots+\varphi_{n-1}\varphi_n).$$

Führt man diese Werthe in die vor Augen liegende Gleichung (363) ein, erwägend, dass nur diejenigen Wurzeln $\varphi$ zu den Coefficienten derselben von der Nulle verschiedene Glieder zu liefern vermögen, welche für $x=\alpha$ unendlich werden, so erhält man:

$$\left\{\frac{L}{(x-\alpha)^2}k^2 + \frac{L}{x-\alpha}(\varphi_1+\varphi_2)\,k + L\,.\,\varphi_1\varphi_2\right\}_\alpha = 0,$$

oder durch $\dfrac{L}{(x-\alpha)^2}$ wegdividirend:

$$\left\{k^2 + (\varphi_1+\varphi_2)(x-\alpha)\,k + \varphi_1\varphi_2\,(x-\alpha)^2\right\}_\alpha = 0;$$

dass aber die Wurzeln dieser Gleichung eben die obenangedeuteten (361) sind, ist in die Augen springend. Auf dieselbe Weise verhält sichs im allgemeinen Falle, wo die Gleichungscoefficienten der Reihe nach $r, r-1, \ldots\ldots 2, 1$ Factoren $x-\alpha$ haben; auch hier kann man darthun, dass die $r$ Werthe von $k$:

$$-(x-\alpha)\,\varphi_1\Big\}_\alpha, \quad -(x-\alpha)\,\varphi_2\Big\}_\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad -(x-\alpha)\,\varphi_r\Big\}_\alpha \tag{364}$$

folgenden zwei Gleichungen als Wurzeln gemeinschaftlich sind:

Diess gibt einen neuen Aufschluss über die Beschaffenheit der Differentialgleichung; ihre Coefficienten werden nämlich, wie schon früher geäussert wurde, $G^2$ im Nenner tragen, aber höchstens $(n-2)$-mal und die Multiplication der ganzen Gleichung mit $G^{2n-4}$ wird aus ihr alle Brüche wegschaffen. Es ist wohl kaum nöthig hier zu erinnern, dass die so gewonnenen Werthe von $k$ theils ganze Zahlen, theils Brüche mit dem Nenner 2 sind, dass, da sie alle zu Factoren $x-\alpha$ des $G$ gehören, sie auch je ein Paar gleichwerdender Wurzeln andeuten, dass aber eine Änderung von reell in imaginär, so hier wie bisher immer, nur einem gebrochenen Werthe von $k$ entspreche.

Da die Gleichung $G^2=0$ mehrere Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ haben kann, und jeder ein Werth von $k$ angehört, wie wenig diese Wurzeln auch von einander verschieden sein mögen, so lässt sich folgern, dass, bei dem Gleichwerden mehrerer Wurzelpaare für sehr wenig von einander verschiedene oder gleiche Werthe von $x$, die Gleichung in $k$ zu einem höheren Grade emporsteigen und so viele Wurzeln haben wird, als Paare gleichwerdender Werthe von $\varphi$ vorhanden sind, so wie wir diess §. 12, S. 249 bei der biquadratischen Gleichung wahrgenommen haben, wo zwei aus der Gleichung (289) des zweiten Grades gezogene Werthe von $k$ eben so viele gleichwerdende Wurzelpaare der (273) andeuteten.

Da sich gelegentlich unsere allgemeine algebraische Gleichung des $n^{ten}$ Grades in mehrere rationale Factoren zerlegen lassen wird, die vom $1^{ten}$, $2^{ten}$, $3^{ten}$, u. s. w. Grade sein können, so wird man auch gelegentlich alle diejenigen Werthe von $k$, welche nach unseren Erfahrungen bei den Gleichungen der zweiten, dritten, vierten Ordnung und bei den binomischen vorkommen können, bei der allgemeinen Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung wiederfinden, also namentlich die zweigliedrigen Gruppen von Dritteln, die dreigliedrigen von Vierteln, u. s. w. und es wird ihr Vorhandensein zwar nicht nothwendigerweise hindeuten auf einen rationalen binomischen Factor, der sich aus der algebraischen Gleichung sondern lässt und auch wohl nicht nothwendigerweise auf Gruppen von entweder drei Wurzeln für $\varphi$, aus denen sich ein Factor wie $\sqrt[3]{(x-\alpha)^m}$ sondern lässt, oder vier solchen Wurzeln, aus denen ein Factor wie $\sqrt[4]{(x-\alpha)^m}$ herausgestellt werden kann, u. s. w., wohl aber auf Gruppen von drei Wurzeln, welche für $x=\alpha$ einander gleich werden, oder vieren, die eben wieder für $x=\alpha$ auf einmal durch den Zustand der Gleichheit hindurchgehen u. s. w., so dass also auch die eben erwähnten Gruppen von Dritteln, Vierteln, gerade so wie die Halben, allgemein nur Wurzelpaare andeuten, die durch den Zustand der Gleichheit hindurchgehen, mit der Bemerkung jedoch, dass die Analysis drei gleichwerdende Wurzeln betrachte als zwei Paare, vier solcher als drei Paare, allgemein $r$ gleichwerdende Wurzeln als $r-1$ Paare und jedem Paare einen Werth von $k$ widme. Wir halten nicht für passend zur Begründung dieser Bemerkungen in ein weitläufigeres Detail einzugehen, nachdem dieser Gegenstand einerseits durch den Inhalt der folgenden Paragraphe an ein helleres Licht gezogen wird, andererseits aber im innigen Zusammenhange steht mit einem bisher noch unbearbeiteten Kapitel: der Formenlehre der algebraischen Gleichungen — wir meinen solcher Gleichungen, in deren Coefficienten Buchstabenparameter vorkommen, denen wir numerische Werthe nicht beilegen können oder wollen. An dem häufigen Vorkommen solcher Gleichungen und sohin an der Nothwendigkeit der Einschaltung eines solchen Kapitels in die Analysis wird wohl Niemand zweifeln und

der in der Integration der linearen Differentialgleichungen bewanderte Analyst, der ihnen mit jedem Schritte begegnet, wie schon unsere gegenwärtigen Untersuchungen zur Genüge lehren, am allerwenigsten. Gleichwohl sind solche Untersuchungen hier nicht am rechten Orte und bilden passender den Gegenstand einer abgesonderten Denkschrift, welche dem wissenschaftlichen Publikum im Verlaufe der Herausgabe dieses Werkes übergeben werden soll.

## §. 15.

## Allgemeine Übersicht über die bisher gewonnenen Sätze der Formenlehre.

Es wird an diesem Orte erspriesslich sein, unsere Aufmerksamkeit auf den bisher befolgten Gang der Untersuchung zurückzulenken, die abgeleiteten Merkmale der verschiedenen in die Gleichung eingeführten particulären Integrale noch einmal, aber summarisch, bis an ihre Wurzel zu verfolgen, ferner nachzuforschen, inwiefern sich alle die erhaltenen Sätze umkehren lassen und was sohin der praktische Nutzen derselben beim wirklich vorgenommenen Integrationsgeschäfte sei, damit hieraus eine klarere Kenntniss entspringe derjenigen Anforderungen, die man vernünftigerweise an eine Formenlehre der linearen Differentialgleichungen zu stellen berechtiget ist.

Wir haben gleich im ersten Paragraphe dieses Abschnittes eine Eintheilung der Functionen in zwei Klassen zu Grunde gelegt: die erste Klasse enthält sämmtliche, ihrer Form nach bekannte Functionen, die folgende Eigenschaften der sogenannten algebraischen besitzen:

Erstens: Bei dem fortwährenden Wachsen der unabhängigen Veränderlichen $x$ sich dem Verhalten einer gewissen Potenz von $x$ etwa $x^p$ fortwährend zu nähern, hiebei kann $p$ positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein,

Zweitens: Differentialquotienten zu biethen, die für unendliche Werthe der unabhängigen Veränderlichen, je um die Einheit niederer in der Ordnungszahl, für unendlich machende endliche Werthe derselben aber je um die Einheit höher in der Ordnungszahl sind.

Zur zweiten Klasse zählten wir sämmtliche Functionen, gleichgiltig ob sie durch die bisher bekannten Rechnungsoperationen in geschlossener Form darstellbar sind oder nicht, welche die Eigenschaften der Exponentialgrösse $e^{\int \varphi dx}$ in Bezug auf das Verhalten ihrer successiven Differentialquotienten besitzen, unter $\varphi$ eine ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, oder, um genauer zu sprechen, eine Function der ersten Klasse nach $x$ verstanden. Wollten wir nach demselben Prinzipe die Eintheilung der Functionen fortsetzen, so müssten wir zur dritten Klasse die mit den Eigenschaften von $e^{\int \varphi dx}$ Begabten zählen, unter $\varphi$ eine Function verstanden, die nach $x$ der zweiten Klasse angehört u. s. w.

Wer nun genauer dem Gange unserer Untersuchungen gefolgt ist, wird ohne Mühe wahrgenommen haben, dass die Differentialgleichungen, von welchen wir sprachen, factisch nur vorausgesetzt wurden als begabt mit Coefficienten $X_n$, $X_{n-1}$, ....., die Functionen der ersten Klasse sind — die Voraussetzung, die der Leser vielleicht machen mochte, dass sie geschlossene, nach absteigenden Potenzen

von $x$ geordnete Polynome seien, fanden wir nirgends Gelegenheit in die Rechnung niederzulegen. Gleiches lässt sich von den Functionen $M$ und $N$ in SS. 2 u. s. f., ferner von $A$, $B$ in SS. 11 und 12, von $N$ in S. 13, von $L$, $M$, $N$, ..... in SS. 10 und 14 sagen. Von all' diesen Grössen gehen nur die oberwähnten zwei Eigenschaften ein in die Rechnung. Alle unsere gewonnenen Resultate beziehen sich also wesentlich nur auf diese Eigenschaften und alle unsere ausgesprochenen Sätze lassen sich umkehren, in der Voraussetzung, dass man nicht von algebraischen Functionen, sondern überall nur von solchen spricht, die die obenausgesprochenen zwei Eigenschaften mit den algebraischen gemeinschaftlich besitzen. Wenn z. B. dargethan ist, dass ein neu eingeführtes particuläres Integral $e^{\int\varphi dx}$ irgend ein Ansteigen in den Ordnungszahlen der Coefficienten um $m$ Einheiten, wenn $\varphi$ der ersten Klasse angehörig und von der $m^{ten}$ Ordnung ist, oder sonst eine andere Erscheinung bewirke, so wird man umgekehrt sagen können, dass ein ähnliches Ansteigen, oder sonstige andere Erscheinung, auch auf ein particuläres Integral von der Form $e^{\int\varphi dx}$, wo $\varphi$ der ersten Klasse angehörig und von der $m^{ten}$ Ordnung ist, zurückschliessen lasse. Denn, wollte man das $\varphi$ einer anderen Klasse entnehmen, etwa der zweiten, so würde man ihm ein ähnliches Verhalten wie den Exponentialgrössen zumuthen, welches sich sofort auch auf die Coefficienten der Differentialgleichung übertragen würde, die dann aufhören müsste algebraische oder, um richtiger zu sprechen, der ersten Klasse angehörige Coefficienten zu besitzen und sich in eine mit exponentiellen oder mindestens ähnliche Eigenschaften habende Coefficienten verwandeln würde. Wir überlassen es dem Leser die Umkehrung aller der bisher gewonnenen Sätze im Detail zu machen und begnügen uns, weil sie keinen Schwierigkeiten unterliegt, sie hier ein für allemal summarisch anzudeuten. Wenn wir daher auch sagen können, dass z. B. ein neu eingeführtes, algebraisches, particuläres Integral einen Abfall von Einer Einheit in der Ordnungszahl bei den letzten Coefficienten einer Differentialgleichung zur Folge habe und dass, wenn diese Coefficienten algebraische, geschlossene Polynome waren, auch die neue Gleichung nur dergleichen besitzen wird, so können wir doch, aus einem derlei stattfindenden Abfalle in einer vorgelegten Gleichung mit ganzen, algebraischen Coefficienten, durchaus nicht auf ein algebraisches particuläres Integral schliessen, sondern nur auf eines der ersten Klasse, aus der sehr einfachen Ursache, weil die Eigenschaft algebraisch zu sein, eigentlich in unsere analytischen Untersuchungen bisher gar nicht eingegangen ist. Eine, aber auch die einzige Ausnahme hievon, könnte allenfalls der erste, $L$ genannte, Coefficient in der Gleichung (346) machen, welchen wir, durch die Voraussetzung dass er eine endliche Anzahl einfacher Factoren enthalte, derjenigen Factoren nämlich, durch deren Verschwinden irgendwie ein Unendlichwerden eines der folgenden Coefficienten oder des particulären Integrals herbeigeführt werden kann, offenbar in ein geschlossenes, algebraisches Polynom umstalteten, um dadurch des Vortheils theilhaftig zu werden, alle Coefficienten betrachten zu dürfen als Functionen, die, den ganzen algebraischen analog, für endliche Werthe der unabhängigen Veränderlichen nicht mehr unendlich werden.

Die Merkmale der einzelnen particulären Integrale, die einer Differentialgleichung Genüge leisten können, lassen sich zerlegen in drei verschiedene Sorten; allen kömmt die Eigenschaft der Unverwischbarkeit zu, weil alle anderen etwa auffindbaren Spuren, die durch die Einführung eines

$$y' = \varphi . e^{\int \varphi dx}$$

ein Produkt aus zwei Factoren, Einem der ersten und Einem der zweiten Klasse angehörigen. Nun kann leicht gezeigt werden, dass ein Produkt aus beliebig vielen Factoren dasselbe Verhalten seiner Differentialquotienten, oder, mit anderen Worten, dieselbe Weise des Wachsthums annehme mit demjenigen seiner Factoren, der das Rascheste ausweist. Es sei in der That:

$$y = R.S.T \ldots\ldots W$$

ein Produkt aus einer beliebigen Anzahl, ein verschiedenes Wachsthum ausweisender Factoren, so ist:

$$y' = RST \ldots W \left(\frac{R'}{R} + \frac{S'}{S} + \frac{T'}{T} + \ldots\ldots + \frac{W'}{W}\right),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{R'}{R} + \frac{S'}{S} + \frac{T'}{T} + \ldots\ldots + \frac{W'}{W},$$

und setzt man anstatt $x$ einen unendlichen Werth $u$, so werden, der Voraussetzung nach, alle Bestandtheile des zweiten Theiles der letzten Gleichung in Grössen von verschiedenen Ordnungen verwandelt. Ist nun $\frac{R'}{R}$ der der höchsten Ordnung angehörige, d. h., ist der erste Factor $R$ der für grosse Werthe von $x$ am allerraschesten wachsende, so ist:

$$\left.\frac{y'}{y}\right\}_u = \left.\frac{R'}{R}\right\}_u,$$

oder mit anderen Worten, so trägt er die Art seines Wachsthums auf das Produkt $y$ über.

Nach diesen vorausgeschickten einfachen Bemerkungen können wir das Verhalten der successiven Differentialquotienten einer beliebigen, der ersten oder zweiten Klasse angehörenden Function $y$ ins Auge fassen. Ist namentlich

Erstens: $y$ eine Function erster Klasse, so verhalten sich ihre Differentialquotienten:

$$y, \qquad y', \qquad y'', \qquad \ldots\ldots\ y^{(n)},$$

für unendliche Werthe von $x$, der Grössenordnung nach zu welcher sie gehören, wie die Glieder einer nach absteigenden Potenzen von $x$ geordneten Reihe:

$$u^q, \qquad u^{q-1}, \qquad u^{q-2}, \qquad \ldots\ldots\ u^{q-n}, \tag{368}$$

wo $q$ die Ordnungszahl von $y$ andeutet. Ist ferner

Zweitens $y$ eine Function zweiter Klasse d. h. der Form $e^{\int \varphi dx}$ angehörig, und $\varphi$ von der Ordnung $p$, ferner $A$ dasjenige, was aus $y$ für $x = u$ wird, so gehören seine successiven Differentialquotienten beziehlich denselben Ordnungen an, wie die Glieder der folgenden nach aufsteigenden Potenzen geordneten Reihe:

$$A, \qquad Au^p, \qquad Au^{2p}, \qquad \ldots\ldots\ Au^{np}, \tag{369}$$

diess aber nur dann, wenn $p > 0$ ist. Für $p = 0$ werden die Ordnungszahlen der successiven Differentialquotienten einander gleich, für Werthe von $p$, die zwischen 0 und $-1$ liegen, gilt immer noch die

Reihe (369), ist aber schon eine fallende. Selbst für $p=-1$ gibt sie noch das Verhalten der Differentialquotienten richtig wieder, welches aber dann mit dem eines $y$ erster Klasse zusammenfällt. Für negative Werthe von $p$ aber, die numerisch die Einheit überschreiten, hört die Reihe ganz auf das fragliche Verhalten darzustellen; der Factor $\varphi$, der schon bei der ersten Differentiation auftritt, ist nämlich als rascher wachsend, oder vielmehr als minder rasch abnehmend, massgebend und führt das ihm entsprechende Verhalten, nämlich das den Functionen erster Klasse eigenthümliche, auf das $y$ über. Die Reihe der Differentialquotienten dieses $y$ ist daher, für negative, unter die Einheit fallende Werthe von $p$, von $p=-1$, bis $p=-\infty$ insofern unempfindlich, als sie die verschiedenen zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe dieser Zahl durch die Ordnungszahl ihrer Glieder nicht verräth. Analog mit diesem Ergebnisse verrathen auch die Ordnungszahlen der Coefficienten einer Differentialgleichung jedesmal die positiven und auch diejenigen negativen Werthe von $p$, welche ober $-1$ liegen und zeigen für die $p$ zwischen den Grenzen $-1$ und $-\infty$ einerlei Art des Abfalls gegen den letzten derselben.

Lassen wir nun diejenigen Fälle ausser Acht, in welchen die Ordnungszahlen $p$ auf die der Differentialquotienten von $y$ gar nicht einfliessen, und für welche auch die Differentialgleichungs-Coefficienten wenigstens keine so unmittelbar in die Augen fallende Empfindlichkeit besitzen, so lässt sich ferner zeigen, dass eben diese Coefficienten durch ihre Ordnungszahlen jene der verschiedenen $\varphi$, die den einzelnen particulären Integralen angehören, wiederzugeben genöthigt seien. Nennen wir diese Ordnungszahlen:

$$p_1\,, \qquad p_2\,, \qquad p_3\,, \quad \ldots\ldots \quad p_n\,, \tag{370}$$

voraussetzend, dass sie in ihrer natürlichen Grössenordnung vom kleinsten angefangen aufgezeichnet seien, so wird das der Gleichung Genüge leistende particuläre Integral $e^{\int \varphi_n dx}$ die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten:

$$y^{(n)}, \qquad y^{(n-1)}, \qquad \ldots\ldots \qquad y'', \qquad y', \qquad y,$$

in der Gleichung:

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = 0 \tag{371}$$

in Ausdrücke verwandeln, die für $x=u$ verschiedenen Grössenordnungen angehörige Werthe annehmen; diese Grössenordnungen sind nämlich die auch einer Reihe wie folgt zukommenden:

$$A.u^{np_n}, \quad A.u^{(n-1)p_n}, \quad \ldots\ldots \quad A.u^{2p_n}, \quad A.u^{p_n}, \quad A.$$

Der höchste Differentialquotient ist es dann auch der Ordnungszahl nach und es ist offenbar an kein Identischwerden der Gleichung (371) durch gegenseitige Aufhebung zu denken, wenn der Unterschied in den Ordnungszahlen der Differentialquotienten nicht durch einen entsprechenden Unterschied in den Ordnungszahlen der Coefficienten:

$$X_n\,, \qquad X_{n-1}\,, \qquad \ldots\ldots \quad X_2\,, \qquad X_1\,, \qquad X_0$$

dermassen ausgeglichen wird, dass wenigstens zwei Glieder mit der höchsten Ordnungszahl erscheinen, welche, aggregirt, eine Summe der nächst niedrigeren Ordnung geben, während

diese zur nächst niedrigeren Ordnung gehörigen Glieder, summirt, abermals eine Summe der nächstniedrigeren Ordnung liefern, u. s. w. bis zur gänzlichen Reduction auf Null. Eine solche Aufhebung erscheint bereits möglich, wenn nur die zwei ersten Coefficienten der Gleichung (371), nämlich $X_n$ und $X_{n-1}$, für $x=u$, denselben Ordnungen mit den Potenzen $Bu^k$ und $Bu^{k+p_n}$ angehörig sind, d. h. wenn bei ihnen ein Steigen von $p_n$ Einheiten in der Ordnungszahl vom ersten auf den zweiten stattfindet, während noch überdiess klar ist, dass, wenn eine solche Steigung nur eben bei den zwei ersten Coefficienten wahrgenommen wird, und wenn sie sich nicht auf den dritten und die folgenden fortsetzt, auch nur ein einziges particuläres Integral mit derselben höchsten Ordnungszahl $p_n$ vorhanden sein kann, weil sonst die zwei ersten Glieder der Differentialgleichung, für mehrere wesentlich von einander verschiedene $y$ und für dieselben Coefficienten, aggregirt, sich auf eine niedrigere Ordnung zurückziehen müssten, was unmöglich ist. Setzt sich hingegen das Ansteigen in der Ordnungszahl um $p_n$ Einheiten fort bis auf den dritten Coefficienten, so ist allerdings eine Reduction der Summe der drei ersten Glieder für zwei, wesentlich verschiedene, derselben höchsten Ordnung $p_n$ von $\varphi$ angehörende, particuläre Integrale auf die unmittelbar niederere Ordnung ermöglicht, allein es kann dann kein drittes solches particuläres Integral geben, wenn nicht dieselbe Ansteigung sich auf den vierten Coefficienten erstreckt, u. s. w. — mit einem Worte: wir gelangen hier beiläufig zu denselben Resultaten, zu denen der §. 6 auf einem sichereren Wege jedoch geführt hat.

Betrachten wir jetzt auch den Einfluss eines anderen particulären Integrals $y=e^{\int\varphi_r dx}$, in welchem die dem $\varphi_r$ zukommende Ordnungszahl $p_r<p_n$ ist, auf die Coefficienten der Differentialgleichung. Schreiten wir in dieser letzteren vom ersten Coefficienten $X_n$ an gegen den letzten zu durch alle diejenigen fort, die im Ganzen und collectiv genommen ein höheres Ansteigen als um $p_r$ Einheiten in der Ordnungszahl, entfallend auf das Coefficientenpaar, darbiethen, bis wir zu irgend einem Coefficienten $X_s$ gelangen, dessen Nachbar $X_{s-1}$ gerade um $p_r$ oder um weniger Einheiten in der Ordnungszahl höher ist. Denken wir uns ferner dieses particuläre Integral anstatt $y$ substituirt, so werden die Gleichungscoefficienten:

$$X_n\,, \qquad X_{n-1}\,, \qquad X_{n-2}\,, \qquad \ldots\ldots \qquad X_s\,,$$

eine in den Ordnungszahlen steigende Reihe bilden und diess zwar um mehr als $p_r$ Einheiten; dagegen werden die Differentialquotienten:

$$y^{(n)}\,, \qquad y^{(n-1)}\,, \qquad y^{(n-2)}\,, \qquad \ldots\ldots \qquad y^{(s)}\,,$$

eine fallende Reihe vorstellen und zwar gerade um $p_r$ Einheiten in der Ordnungszahl; offenbar bilden daher auch die Produkte:

$$X_n y^{(n)}\,, \quad X_{n-1} y^{(n-1)}\,, \quad X_{n-2} y^{(n-2)}\,, \quad \ldots\ldots \quad X_s y^{(s)}\,,$$

eine steigende Reihe und das seiner Ordnungszahl nach höchste ist das letzte $X_s y^{(s)}$. Es vermag sich daher seinem höchsten Bestandtheile nach mit den vorangehenden Gliedern nicht aufzuheben, sohin muss es unter den folgenden welche geben, die ihm an Ordnungszahl gleich sind und diese Aufhebung möglich machen. Diess ist zunächst dann der Fall, wenn der unmittelbar auf $X_s$ folgende Nachbarcoeffi-

cient $X_{s-1}$ mit dem früheren ein Steigen um $p_r$ Einheiten in der Ordnungszahl kundgibt, so dass $X_s y^{(s)}$ und $X_{s-1} y^{(s-1)}$ derselben Ordnung angehören, dann aber ist nur ein einziges particuläres Integral mit der Ordnungszahl $p_r$ von $\varphi$ möglich, falls sich nicht die Ansteigung um eben so viele Einheiten auch auf den nächsten Coefficienten $X_{s-2}$ erstreckt, weil das höchste Glied der Summe:

$$X_s y^{(s)} + X_{s-1} y^{(s-1)}, \qquad (\text{…}$$

für zwei oder mehr verschiedene Werthe von $y$ und dieselben Coefficienten $X$ nicht gleich Null sein kann. Biethet hingegen auch das Coefficientenpaar $X_{s-1}$ und $X_{s-2}$ dieselbe Steigung dar um $p_r$ Einheiten, so ist es allerdings möglich, dass das höchste Glied der Summe:

$$X_s y^{(s)} + X_{s-1} y^{(s-1)} + X_{s-2} y^{(s-2)}, \qquad (\text{…}$$

für zwei verschiedene $y$ und dieselben schicklich gestalteten Coefficienten $X$ der Nulle gleich wird, denn es ist klar, dass, wenn $y_1$ und $y_2$ zwei solche Werthe von $y$ bedeuten, für sehr grosse Werthe $u$ der Variablen $x$, den beiden Gleichungen:

$$X_s y_1^{(s)} + X_{s-1} y_1^{(s-1)} + X_{s-2} y_1^{(s-2)} = 0\,, \qquad X_s y_2^{(s)} + X_{s-1} y_2^{(s-1)} + X_{s-2} y_2^{(s-2)} = 0\,,$$

oder vielmehr den folgenden zweien:

$$y_1^{(s)} + \frac{X_{s-1}}{X_s} y_1^{(s-1)} + \frac{X_{s-2}}{X_s} y_1^{(s-2)} = 0\,, \qquad y_2^{(s)} + \frac{X_{s-1}}{X_s} y_2^{(s-1)} + \frac{X_{s-2}}{X_s} y_2^{(s-2)} = 0$$

Genüge geleistet werden kann, dann wird es aber auch nicht mehr als zwei solche Werthe von $y$ geben, es sei denn, dass sich diese Ansteigung in der Coefficientenreihe noch weiter erstreckt. Bei der Summe (373) und allen den mehrgliedrigen ähnlichen kann noch dazu bemerkt werden, dass es particulärer Integrale zwei, drei oder mehr an der Zahl geben könne, deren analytischer Bau gerade das Verschwinden des höchsten Gliedes eines mittleren Coefficienten wie $X_{s-1}$ erheischt, dass aber die äussersten von ihnen, hier $X_s$ und $X_{s-2}$ ein solches Verschwinden durchaus nicht gestatten. Aus diesen einfachen, auch für $p_r = 0$, $p_r = -1$ und die zwischenliegenden Werthe giltigen Betrachtungen, die man nur in dem Falle, wenn die Ordnungszahl $p_r$ von $\varphi$ unter $-1$ liegt, insofern zu modifiziren hat, als man sich dem früher Gesagten gemäss als Ordnungszahl immer die negative Einheit vorstellen wird — Betrachtungen, die im Grunde ganz elementar sind, und gar keine tiefere Kenntniss der Natur der Differentialgleichungen erheischen — geht nun unmittelbar hervor, dass die Ordnungszahl eines jeden $\varphi$, in einem jeden particulären Integrale $e^{\int \varphi dx}$ sich auf irgend ein Coefficientenpaar übertrage, welches eine Ansteigung, und zwar um eben diese Zahl darbiethet, und sich in der geordneten Differentialgleichung unmittelbar dem, die nächsthöhere Ansteigung ausweisenden Paare anschliesst und dass nur für solche Ordnungszahlen der $\varphi$, die unter der negativen Einheit liegen, in der Differentialgleichung eine gewisse Unempfindlichkeit vorhanden sei, dass man daher zur Ermittlung der Ordnungszahlen, die den verschiedenen $\varphi$ entsprechen, folgenden Weg einschlagen kann: Man errichtet auf einer gezogenen Abscissenaxe, in gleichen Abständen von einander, Ordinaten, auf diese trägt man der Reihe nach die nach einem beliebigen Massstabe abgefassten Ordnungszahlen der

Coefficienten $X_n$, $X_{n-1}$, ... $X_0$. Die geradlinig verbundenen Endpunkte dieser Ordinaten geben jetzt eine Polygonallinie, von welcher man die einspringenden Winkel, als solchen Gliedern entsprechend, die sich, wie oben dargethan wurde, zufällig aufgehoben haben, abschneidet; die sich sodann kundgebenden Ansteigungen werden hierdurch auf die einzelnen Coefficientenpaare repartirt und die gewonnenen Repartitionszahlen, respective Ordinatenunterschiede sind eben die gesuchten Ordnungszahlen der $\varphi$'s. Hiebei muss aber natürlich auf die Unsicherheit bei negativen unter der Einheit liegenden Zahlen dieser Art gehörig Rücksicht genommen werden. Um hier nicht missverstanden zu werden, bemerken wir ausdrücklich, dass wir dem Rechner keineswegs zumuthen, versehen mit Zeichenrequisiten an die Integration einer linearen Differentialgleichung zu gehen; wir beabsichtigen vielmehr bloss durch das die Ordnungszahlen der Coefficienten umspannende Polygon ein klares, dem Gedächtnisse fest eingeprägtes Bild desjenigen Vorganges hervorzurufen, durch den die Ordnungszahlen der verschiedenen Functionen $\varphi$ kund werden; der geübte Rechner aber mag immerhin, ohne Beihilfe der geometrischen Construction, auf folgende Weise an die Arbeit gehen: Er forscht, ausgehend von dem ersten Coefficienten, nach dem nächsten, zweiten Eckcoefficienten, bis zu welchem die auf das Coefficientenpaar entfallende Steigung die grösste ist und bezeichnet ihn als solchen, zugleich jene Steigung notirend. Von diesem zweiten Eckcoefficienten ausgehend forscht er eben so nach dem dritten, bis zu welchem die auf das Coefficientenpaar entfallende Steigung die grösste ist, notirt auch diese Steigung u. s. w., so sind die auf diese Weise gewonnenen Ansteigungszahlen eben die Ordnungszahlen der verschiedenen $\varphi$. Man sieht indess, dass, wenn auch die erwähnte geometrische Construction keineswegs nothwendig ist, sie doch dem an ihre Stelle tretenden Repartitionsverfahren zu Grunde liege.

So einfach und elementar nun diese Betrachtungen sind, so werfen sie doch auf den Coefficientenbau der linearen Differentialgleichungen bereits ein helles Licht, und sind ganz geeignet, die Grundlage zu bilden von einer ganz allgemeinen, auf alle möglichen, beliebigen Klassen angehörigen Coefficienten ausgedehnten Formenlehre, deren Aufstellung der Zweck dieses Werkes nicht ist. Ohne sehr in die Tiefe zu gehen, sieht man z. B. allsogleich ein, dass ein particuläres Integral der dritten Klasse $e^{\int \varphi dx}$, wo $\varphi$ in sich Functionen der zweiten Klasse, wie etwa $e^x$ birgt, einer Differentialgleichung mit Coefficienten der ersten Klasse durchaus nicht angehören könne; denn die successiven Differentialquotienten eines solchen particulären Integrales:

$$y^{(n)}, \qquad y^{(n-1)}, \qquad \dots\dots\dots\dots \qquad y', \qquad y$$

würden sich, den Ordnungen nach zu denen sie gehören, wie die Glieder der Reihe:

$$Ae^{nx}, \qquad Ae^{(n-1)x}, \qquad \dots\dots\dots\dots \qquad Ae^{x}, \qquad A$$

verhalten, und es wäre zum Identischwerden der Gleichung unumgänglich nöthig, dass irgend zwei, etwa die beiden ersten Coefficienten im Verhältnisse wie: $B$ zu $Be^x$ zu einander stünden. Es müsste sonach offenbar eine Function zweiter Klasse wie $e^x$ in den Coefficienten selber erscheinen. Man sieht also ohne Mühe ein, dass in der Differentialgleichung Coefficienten der ersten Klasse auf particuläre Integrale der zweiten und ersten Klasse, Coefficienten der zweiten Klasse auf particuläre Integrale der drit-

ten, zweiten und ersten Klasse, allgemein: Coefficienten der $m^{ten}$ Klasse auf particuläre Integrale den Schluss verstatten, die zur $(m+1)^{ten}$, $m^{ten}$, ... $1^{ten}$ Klasse der Functionen gehören können.

Derjenige, der die Zusammensetzung der Gleichungscoefficienten aus den particulären Integralen, die im I. Abschnitte, §. 4, gelehrt worden ist, kennt, kömmt auch auf einem anderen Wege zu den hier erhaltenen Resultaten. Wir werden denselben in diesem Paragraphe nicht betreten, um seinen Zusammenhang nicht zu beeinträchtigen, er soll aber im folgenden Paragraphe darum ausführlich zur Sprache kommen, weil die hiezu dienlichen Betrachtungen bei der Aufstellung einer ganz allgemeinen Formenlehre von Nutzen sein können.

Wenn nun aber die Ordnungszahlen der Coefficienten nichts als das Verhalten der einzelnen particulären Integrale für unendliche Werthe der unabhängigen Veränderlichen $x$ wiedergeben, so liefert hinwiederum die Zusammensetzung derselben Coefficienten aus einfachen Factoren wie $x-\alpha$ das Verhalten der particulären Integrale und ihrer Differentialquotienten der Ordnungszahl nach für endliche Werthe $x=\alpha$, für die sie unendlich werden, oder, richtiger gesprochen, für die sie verschiedenen Grössenordnungen angehörige Werthe annehmen. Um diess einzusehen, stelle man sich das particuläre Integral, das einer linearen Differentialgleichung Genüge leistet, vor unter der Form:

$$y = e^{\int \frac{\varphi dx}{(x-\alpha)^m}},$$

und lasse zuvörderst $m$ eine die positive Einheit überschreitende Zahl, oder diese Einheit selbst sein, so ist klar, dass die successiven Differentialquotienten:

$$y\,, \qquad y'\,, \qquad y''\,, \qquad \ldots\ldots \qquad y^{(n-1)}\,, \qquad y^{(n)}\,,$$

für solche endliche Werthe von $x$, die nahe gleich $\alpha$ sind, zu verschiedenen Grössenordnungen gehörige Werthe annehmen und ein Verhalten kundgeben wie die Glieder einer Reihe:

$$A\,, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^m}\,, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^{2m}}\,, \quad \ldots\ldots \quad \frac{A}{(x-\alpha)^{(n-1)m}}\,, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^{nm}}. \qquad (\ldots$$

Ist dagegen $m$ gebrochen und enthalten zwischen 1 und 0, so tritt gleich nach der ersten Differentiation ein Factor $x-\alpha$ im Nenner auf, dem das überwiegende Wachsthum zukömmt, und damit auch das Recht die Art der ferneren Zunahme des Produktes zu bestimmen. Hierdurch wird nun aber das den algebraischen Functionen eigenthümliche Verhalten auf die Reihe der Differentialquotienten übertragen, die sich daher jetzt so verhalten, wie die Grössen:

$$A\,, \quad \frac{A}{x-\alpha}\,, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^2}\,, \quad \ldots\ldots \quad \frac{A}{(x-\alpha)^{n-1}}\,, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^n}, \qquad (\ldots$$

gleichgiltig, welchen zwischen 1 und 0 liegenden Werth $m$ haben mag, so dass also hier wieder eine ähnliche Unempfindlichkeit auftritt für so beschaffene Werthe von $m$, wie früher für die Werthe einer gewissen Ordnungszahl $p$ unter der negativen Einheit. Hiemit in Übereinstimmung haben wir uns auch §. 8, S. 186 von einer gewissen Indifferenz der Differentialgleichung, in Bezug auf die Factorenzusammensetzung ihrer Coefficienten, in Fällen wo $m$ zwischen 0 und 1 liegt, überzeugt — sie zeigen dann,

wie wir wissen, auf den ersten Anblick wenigstens, die der Voraussetzung $m=1$ angehörigen Erscheinungen. Dasselbe findet aus demselben Grunde auch bei Werthen von $m$ statt, die gebrochen sind und negativ; ganze und negative Werthe aber biethen, wie leicht einzusehen ist, keine hervorragenden Eigenthümlichkeiten.

Diejenigen Werthe von $m$ nun ausser Acht gelassen, für welche die Differentialgleichung keine unmittelbar in die Augen fallende Empfindlichkeit besitzt, lässt sich zeigen, dass die übrigen, sich in der Reihe (374) auf die vorerwähnte Weise abbildenden, auch einen unmittelbaren Einfluss auf die Zusammensetzung der Coefficienten aus Factoren $x-\alpha$ nehmen. Es ist in der That leicht einzusehen, dass, weil die Differentialquotienten sich für $x=\alpha$ in Grössen von verschiedenen Ordnungen verwandeln, so dass der höchste von ihnen auch der höchste der Ordnungszahl nach ist, an ein Identischwerden der Gleichung gar nicht gedacht werden kann, wenn nicht, durch Hinzufügen eines in die Nulle übergehenden Factors $x-\alpha$, wenigstens bei zweien der höchsten Glieder eine Gleichheit der Ordnungszahlen und hiemit die Fähigkeit sich theilweise aufzuheben herbeigeführt wird. Hieraus lässt sich auf das Vorhandensein eines Factors $(x-\alpha)^m$ im ersten Coefficienten, oder, bei mehreren particulären Integralen dieser Art, auf eine abnehmende Reihe von solchen Factoren in den ersten Coefficienten der Schluss machen. Es ist nur noch übrig, dass wir uns über die Folge, in der diese Factoren in den Coefficienten vorkommen, belehren. — Zu diesem Zwecke stellen wir uns vor, dass der so gestalteten particulären Integrale $r$ an der Zahl vorhanden seien, so, dass wir haben:

$$y = e^{\int\frac{\varphi_1 dx}{(x-\alpha)^{m_1}}}, \qquad e^{\int\frac{\varphi_2 dx}{(x-\alpha)^{m_2}}}, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad e^{\int\frac{\varphi_r dx}{(x-\alpha)^{m_r}}},$$

denken wir uns Eines derselben, etwa:

$$y = e^{\int\frac{\varphi_r dx}{(x-\alpha)^{m_r}}},$$

in die Differentialgleichung substituirt, fassen ferner die Coefficienten, vom ersten derselben $X_n$ dem letzten $X_0$ zuschreitend, ins Auge. Sie sind bereits mit Factoren $x-\alpha$ dem früher Gesagten nach nothwendigerweise versehen. Bei demjenigen Coefficientenpaare, bei dem, in Bezug auf die Anzahl von Factoren $x-\alpha$, ein Abfallen von $m_r$, oder weniger Einheiten wahrzunehmen ist, während die vorangegangenen zusammengenommen ein stärkeres Abfallen auf das Coefficientenpaar zeigten, bleiben wir stehen — es sei diess das Paar:

$$X_s, \qquad X_{s-1},$$

so werden die Differentialquotienten:

$$y^{(n)}, \qquad y^{(n-1)}, \qquad y^{(n-2)}, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad y^{(s)},$$

für $x=\alpha$ eine abnehmende Reihe darstellen und diess zwar um je $m_r$ Einheiten in der Ordnungszahl; die Coefficienten dagegen:

$$X_n, \qquad X_{n-1}, \qquad X_{n-2}, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad X_s,$$

eine steigende Reihe unendlich kleiner Werthe, und zwar je um mehr als $m_r$ Einheiten in der Ordnungs-

eine steigende Reihe; das letzte von ihnen gehört zugleich der höchsten Ordnung an und eine Aufhebung desselben durch die vorhergehenden ist nicht denkbar; folglich muss sie stattfinden mit einem der folgenden Glieder der Differentialgleichung. Ist diess das nächste $X_{s-1} y^{(s-1)}$, so muss offenbar $X_{s-1}$ gerade um $m_r$ Factoren $x - \alpha$ weniger haben als $X_s$, dann kann aber nur ein einziges particuläres Integral mit dem Exponenten $m_r$ des $x - \alpha$ vorhanden sein, es sei denn, dass auch der nächste Coefficient $X_{s-2}$ um $m_r$ solche Factoren weniger hat als $X_{s-1}$, in welchem Falle zwei solche particuläre Integrale möglich sind, u. s. w. mit Einem Worte: wir gelangen hier zu ähnlichen Ergebnissen, wie die aus den Ordnungszahlen der Coefficienten kurz zuvor abgeleiteten und erhalten auch die verschiedenen Werthe für $m$, wie sie den einzelnen particulären Integralen entsprechen, durch folgende, der früher erwähnten ähnliche geometrische Construction:

Man errichte auf einer gezogenen Abscissenaxe, in gleichen Abständen von einander, Ordinaten, und trage darauf die Anzahlen von Factoren $x - \alpha$, die sich in absteigender Reihe in den Coefficien- $X_n$, $X_{n-1}$, ... vorfinden, verbinde die Endpunkte derselben geradlinig und schneide von dem so erhaltenen Polygone alle ausspringenden Winkel weg; die hierdurch gemachte Repartition der Absteigungen auf die einzelnen Coefficientenpaare liefert Zahlen, respective Ordinatenunterschiede, welche eben die Werthe sind, die den Exponenten $m_1$, $m_2$, ... $m_r$ in den einzelnen particulären Integralen zukommen. Auch hier darf man nicht vergessen, dass für solche $m$, die zwischen 1 und 0 liegen, die Gleichung keine Empfindlichkeit habe und dass sie dieselben genau so wie den speziellen Fall $m = 1$ behandle. Auch diese geometrische Construction soll, wie die frühere, gar nichts sein, als ein klares Bild des vorzunehmenden Repartitionsverfahrens, dessen Besitz die geometrische Construction selbst in den meisten Fällen entbehrlich macht. Der Rechner wird nämlich, vom ersten Coefficienten ausgehend, nach dem zweiten Eckcoefficienten fragen, bis zu welchem der allerstärkste auf das Coefficientenpaar entfallende Abfall in der Anzahl wiederholter Factoren $x - \alpha$ stattfindet. Von diesem zweiten Eckcoefficienten an wird er ebenso nach dem dritten forschen, von diesem nach dem vierten u. s. w. Die auf diese Weise gewonnenen, den einzelnen Coefficientenpaaren angehörigen Repartitionszahlen sind dann eben die Werthe der Exponenten $m_1$, $m_2$, ... $m_\nu$.

Auch aus dem Coefficientenbaue der Differentialgleichung, so wie er in §. 4 des I. Abschnittes dargelegt worden ist, lässt sich zu denselben Folgerungen gelangen und es wird auch diess durch den folgenden Paragraph anschaulich gemacht.

Wir hätten jetzt nur noch denjenigen Erscheinungen, welche die Werthe des *k* genannten Exponenten biethen, unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden, um auch sie so viel möglich auf eine einfache analytische Grundursache zurückzuführen. Die allervornehmste dieser Erscheinungen ist das Vorkommen von Gruppen negativer und gebrochener Werthe für *k*. Hat man es nämlich mit einer Differentialgleichung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung zu thun, und setzt man allgemein ein particuläres Integral derselben unter der Form: $e^{\int \varphi dx}$ voraus, und es trifft sich, dass $\varphi$ einen Factor $\sqrt[\nu]{(x-\alpha)^m}$ besitzt und deshalb irrational wird, so erscheinen in der Differentialgleichung *n* solche

irrationale particuläre Integrale; die verschiedenen $\varphi$ hängen durch eine algebraische Gleichung zusammen, vom $n^{ten}$ Grade, die gelegentlich die binomische:

$$\varphi^n = M \tag{376}$$

sein kann, allwo $M$ den Factor $(x-\alpha)^m$ besitzt, also die Form:

$$M = (x-\alpha)^m \mathfrak{M} \tag{377}$$

trägt. Bezeichnet man nun mit $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\ldots \theta_n$ die $n$ Wurzeln der binomischen Gleichung: $\theta^n = 1$, so sieht das allgemeine Integral der Differentialgleichung, der die algebraische (376) zu Grunde liegt, aus, wie folgt:

$$y = C_1 e^{\theta_1 \int dx \sqrt[n]{(x-\alpha)^m \mathfrak{M}}} + C_2 e^{\theta_2 \int dx \sqrt[n]{(x-\alpha)^m \mathfrak{M}}} + \ldots\ldots + C_n e^{\theta_n \int dx \sqrt[n]{(x-\alpha)^m \mathfrak{M}}}; \tag{378}$$

zugleich sind aber, wie unsere diessfallsigen, §. 13, durchgeführten Untersuchungen zeigen, in den successiven Differentialgleichungs-Coefficienten vom ersten angefangen $n-1$, $n-2$, ..... 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ vorfindig, was auch $m$ für eine ganze Zahl bedeuten mag, wenn sie nur die Ordnungszahl $n$ nicht erreicht — eine Erscheinung, welche auch auf $(n-1)$ particuläre Integrale mit Nennern wie $(x-\alpha)^k$ deuten könnte. Forscht man nach den Werthen von $k$, so findet man dafür eine Gruppe negativer Brüche, die in dem einfachen Verhältnisse der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ......, $n-1$ zu einander stehen, nämlich:

$$k = -\frac{m+n}{n},\quad -2\,\frac{m+n}{n},\quad -3\,\frac{m+n}{n},\quad \ldots\ldots,\quad -(n-1)\,\frac{m+n}{n}, \tag{379}$$

also gerade dasselbe, als wenn es einen $(n-1)$-gliedrigen Genüge leistenden Werth für $y$ gäbe, unter der Form:

$$y = B_1 (x-\alpha)^{\frac{m+n}{n}} \eta_1 + B_2 (x-\alpha)^{\frac{2(m+n)}{n}} \eta_2 + \ldots\ldots + B_{n-1} (x-\alpha)^{\frac{(n-1)(m+n)}{n}} \eta_{n-1}, \tag{380}$$

wo $B_1, B_2, \ldots\ldots B_{n-1}$, willkürliche Constanten, $\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots \eta_{n-1}$ aber Functionen von $x$ sind, die den Factor $x-\alpha$ nicht mehr in sich enthalten. Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$y = B_1\, e^{\int\left(\frac{m+n}{n(x-\alpha)}+\frac{\eta'_1}{\eta_1}\right)dx} + B_2\, e^{\int\left(\frac{2(m+n)}{n(x-\alpha)}+\frac{\eta'_2}{\eta_2}\right)dx} + \ldots\ldots + B_{n-1}\, e^{\int\left(\frac{(n-1)(m+n)}{n(x-\alpha)}+\frac{\eta'_{n-1}}{\eta_{n-1}}\right)dx} \tag{381}$$

und in dieser Gestalt ist ihr Unterschied von der früheren Form des allgemeinen Integrals (378) erst recht in die Augen fallend; während nämlich die (378) in Bezug auf $x-\alpha$ irrational ist, sieht die gegenwärtige Gleichung nach demselben $x-\alpha$ rational aus. Man könnte nun billig fragen, woher es komme, dass diese beiden, anscheinend so wesentlich von einander verschiedenen Formen einerlei Gestalt der Differentialgleichung bewirken? Auf diese Frage dient nun die einfache Antwort: dass diess eben darum geschehe, weil diese beiden Formen, die irrationale und die rational aussehende, von einander nicht verschieden sind — die eine vielmehr in der anderen enthalten ist. Um diess genau einzusehen, werden wir die Eine dieser Formen, die (378) nämlich, wirklich auf die andere zurückzuführen suchen und bemerken zu diesem Behufe, dass sich die Function $\sqrt[n]{\mathfrak{M}}$, weil in $\mathfrak{M}$ das

$x-\alpha$ als Factor nicht enthalten ist, nach aufsteigenden Potenzen dieser Differenz in eine Reihe entwickeln lasse, wie folgt:

$$\sqrt[n]{\mathfrak{M}} = \mathfrak{R} + \mathfrak{R}'(x-\alpha) + \mathfrak{R}''\frac{(x-\alpha)^2}{2} + \ldots\ldots, \tag{382}$$

wo $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$. ..... die bekannten Coefficienten der Mac-Laurin'schen Formel sind. Wir multipliziren hier mit $(x-\alpha)^{\frac{m}{n}}dx$ und integriren, so bekommen wir:

$$\int dx\,\sqrt[n]{(x-\alpha)^m\,\mathfrak{M}} = (x-\alpha)^{\frac{m+n}{n}}\,\Psi, \tag{383}$$

wobei:

$$\Psi = \frac{n\mathfrak{R}}{m+n} + \frac{n\mathfrak{R}'}{m+2n}(x-\alpha) + \frac{n\mathfrak{R}''}{2(m+3n)}(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots \tag{384}$$

eine bestimmte, in Form einer convergirenden Reihe erscheinende Function von $x$ ist. Das allgemeine Integral (378) wird sich sohin auch auf folgende Weise schreiben lassen:

$$y = C_1\,e^{\theta_1\Psi(x-\alpha)^{\frac{m+n}{n}}} + C_2\,e^{\theta_2\Psi(x-\alpha)^{\frac{m+n}{n}}} + \ldots\ldots + C_n\,e^{\theta_n\Psi(x-\alpha)^{\frac{m+n}{n}}}. \tag{385}$$

Entwickeln wir jetzt die einzelnen Exponentialgrössen, aus welchen dieser $n$-theilige Ausdruck zusammengesetzt ist, nach den aufsteigenden Potenzen der Exponenten in Reihen, so bekommen wir, weil allgemein, und mit Rücksicht auf die Relation $\theta^n = 1$, folgende Gleichung besteht:

$$C.e^{\theta.\Psi(x-\alpha)^{\frac{m+n}{n}}} =$$

$$= C + C.\theta.\Psi\,(x-\alpha)^{\frac{m+n}{n}} + \ldots\ldots + \frac{C.\theta^{n-1}.\Psi^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}(x-\alpha)^{\frac{(n-1)(m+n)}{n}}$$

$$+ (x-\alpha)^{m+n}\left[\frac{C.\Psi^n}{2.3\ldots n} + \frac{C.\theta.\Psi^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)}(x-\alpha)^{\frac{m+n}{n}} + \ldots\ldots + \frac{C.\theta^{n-1}.\Psi^{2n-1}}{2.3\ldots(2n-1)}(x-\alpha)^{\frac{(n-1)(m+n)}{n}}\right]$$

$$+ (x-\alpha)^{2(m+n)}\left[\frac{C.\Psi^{2n}}{2.3\ldots 2n} + \frac{C.\theta.\Psi^{2n+1}}{2.3\ldots(2n+1)}(x-\alpha)^{\frac{m+n}{n}} + \ldots\ldots + \frac{C.\theta^{n-1}.\Psi^{3n-1}}{2.3\ldots(3n-1)}(x-\alpha)^{\frac{(n-1)(m+n)}{n}}\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

in welcher wir uns die Grössen $C$ und $\theta$ der Reihe nach mit den Stellenzeigern $1, 2, 3, \ldots n$ versehen denken, was so viele Gleichungen gibt als Stellenzeiger, durch Summirung derselben und zwar spaltenweise einen Werth von $y$, der so aussieht: (386)

$$y = B_0\eta_0 + B_1(x-\alpha)^{\frac{m+n}{n}}\eta_1 + B_2(x-\alpha)^{\frac{2(m+n)}{n}}\eta_2 + \ldots\ldots + B_{n-1}(x-\alpha)^{\frac{(n-1)(m+n)}{n}}\eta_{n-1}$$

und bis auf das Anfangsglied mit der früher erwähnten Form (380) vollständig übereinstimmt. Man erhält hiebei für die die Bedeutung von willkürlichen Constanten besitzenden $B$ in Function der früheren $C$ folgende Werthe:

$$
(387)\quad \begin{aligned}
B_0 &= C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n \\
B_1 &= C_1\,\theta_1 + C_2\,\theta_2 + \ldots\ldots + C_n\,\theta_n \\
B_2 &= C_1\,\theta_1^2 + C_2\,\theta_2^2 + \ldots\ldots + C_n\,\theta_n^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{n-1} &= C_1\,\theta_1^{n-1} + C_2\,\theta_2^{n-1} + \ldots\ldots + C_n\,\theta_n^{n-1},
\end{aligned}
$$

und überdiess in Reihenform:

$$
(388)\quad \begin{aligned}
\eta_0 &= 1 + \frac{\psi^n}{2.3\ldots n}(x-\alpha)^{m+n} + \frac{\psi^{2n}}{2.3\ldots\ldots 2n}(x-\alpha)^{2(m+n)} + \ldots\ldots \\
\eta_1 &= \psi + \frac{\psi^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)}(x-\alpha)^{m+n} + \frac{\psi^{2n+1}}{2.3\ldots(2n+1)}(x-\alpha)^{2(m+n)} + \ldots\ldots \\
\eta_2 &= \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^{n+2}}{2.3\ldots(n+2)}(x-\alpha)^{m+n} + \frac{\psi^{2n+2}}{2.3\ldots(2n+2)}(x-\alpha)^{2(m+n)} + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_{n-1} &= \frac{\psi^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)} + \frac{\psi^{2n-1}}{2.3\ldots(2n-1)}(x-\alpha)^{m+n} + \frac{\psi^{3n-1}}{2.3\ldots(3n-1)}(x-\alpha)^{2(m+n)} + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Wir sehen somit, dass, wenn die Analysis, bei einer vorhandenen Gruppe irrationaler particulärer Integrale, $n$ an der Zahl, $(n-1)$ rationale solche anzudeuten scheint, diess keineswegs eine Abnormität zu nennen sei; vielmehr lassen sich diese irrationalen particulären Integrale, durch Multiplication mit gewissen Constanten und Addition so gruppiren, dass wirklich die von der Analysis angedeutete Gestalt (380) zum Vorscheine kömmt, so dass es am Ende gleichgiltig zu sein scheint, ob man beim Integrationsgeschäfte die eine oder die andere der beiden Formen postulirt, oder mit anderen Worten: ob man die einzelnen particulären Integrale sucht, die der allgemeine Ausdruck (380) in sich enthält, oder nach der algebraischen Gleichung forscht, die der differentialen zu Grunde liegt. Letzteres bleibt demungeachtet allemal das Natürlichere, den Fall etwa ausgenommen, wo wir das Erstehen der gruppenweise vorkommenden Werthe von $k$ selber veranlasst haben, etwa durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen vermittelst einer irrationalen Substitution, wie etwa $x^m = \xi^n$, durch welche offenbar $m^{te}$ Wurzeln mit ihren $(m-1)$-gliedrigen Gruppen von Werthen für $k$ eingeführt zu werden vermögen, so oft, als eine solche neu eingeführte Veränderliche die Gleichungs-Coefficienten rational lässt.

Es wird nun wohl nach diesen Erörterungen jedem scharfsinnigen Leser beifallen die Frage zu stellen, wozu wohl eine solche Formenlehre nützlich sein solle, deren Sätze sich nicht direct umkehren lassen, in der Art, dass aus der algebraischen Beschaffenheit der Differentialgleichungs-Coefficienten auch allsogleich die algebraische Beschaffenheit der Elemente erschlossen werden kann, aus denen das particuläre Integral zusammengefügt ist, und welche praktischen Vortheile der gestattete Rückschluss gewähre auf Functionen die der ersten Klasse angehören, die sich durch geschlossene Polynome vielleicht gar nicht ausdrücken lassen, ja vielleicht nicht einmal durch nach absteigenden

Potenzen der Veränderlichen geordnete und convergirende Reihen, wo die Rechnungsoperationen, die sie in geschlossener Form wiederzugeben geeignet erscheinen, grösstentheils nicht einmal bekannt sind, und, wenn aufgefunden, vielleicht ein dermassen undurchsichtiges Resultat liefern, dass das Naturgesetz, dessen Ausdruck das particuläre Integral sein sollte, gerade so unverständlich bleibt wie die Differentialgleichung selbst, oder ihr in Reihenform nach aufsteigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen geordnetes Integral?

Wir müssen zugeben, dass in den meisten Fällen die geschlossene Form d. h. diejenige, die besagt, durch welche endliche Reihe von Rechnungsoperationen die Function selbst erhalten werden könne, illusorisch sei und überhaupt nur geringen Werth besitze, wenn ihr die Eigenschaft der Durchsichtigkeit abgeht, oder mit anderen Worten die Eigenschaft, mit geringer Mühe geometrisch construirt vor das Auge des Geistes treten zu können. Jede neu erfundene und in die Analysis eingeführte Rechnungsoperation, alle neu gerechneten Tabellen u. s. w. sind vielleicht geeignet die Zahl derjenigen Transcendenten zu vermehren, welche in die Integrale unserer Differentialgleichungen eingehen können, ohne desshalb nothwendig auf den Gegenstand mehr Licht zu werfen, ja, wenn es unsere Aufgabe wäre die versteckten Merkmale solcher Transcendenten, derjenigen, die schon da sind und der anderen, die es noch nicht sind, gleich nach ihrem Erscheinen aufzusuchen, so würden wir eine Formenlehre erhalten, die für sich eine Bibliothek wäre. Es ist aber auch von der anderen Seite wohl zu erwägen, dass, wenn wir durch eine Differentialgleichung, die aufzustellen uns beliebt hat, ein gewisses, gelegentlich das mannigfaltigste, ganz beliebige Verhalten der Differentialquotienten der Genüge leistenden Functionen statuiren und dann verlangen, die Analysis möchte uns belehren, durch welche Rechnungsoperationen in endlicher Zahl die Function für jedes $x$ wiedergegeben werden kann, wir ja offenbar die Darlegung von gewissen Feinheiten verlangen, zu denen unsere analytischen Hülfsmittel nicht zureichen können, während uns andererseits am Ende an all' diesen Feinheiten, wenn ihnen ein geringer numerischer Werth zukömmt, wie complizirt auch ihr analytischer Ausdruck sein mag, gar nichts gelegen ist. Unser Bedürfniss ist ja nicht das einer geschlossenen Form, sondern, geometrisch betrachtet, das derjenigen Curve, vollständig, mit allen Ästen, deren Ordinaten der Differentialgleichung Genüge leisten und auch hier geht es uns, wie mit den Curven überhaupt; wir sind mit der Kenntniss ihrer Gleichung nicht zufrieden, sondern wünschen entweder eine einfache Constructionsweise derselben, oder legen die einfachsten geometrischen Gebilde: die gerade Linie, den Kreis, die Parabel u. s. w. an sie an, um zu sehen, mit welchen derselben sie in endlicher oder unendlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten Ähnlichkeit haben. Wenn wir nun unsere Bedürfnisse in Bezug auf Differentialgleichungen recht ins Auge fassen, so sind sie von den eben ausgesprochenen nicht verschieden und alle Ansprüche, die wir, an eine Formenlehre sowohl, als auch an eine durch sie begründete Integrationsmethode der linearen Differentialgleichungen, vernünftigerweise machen können, reduziren sich in die geometrische Sprache übersetzt auf folgende Punkte:

Erstens. Wie sehen die Curven, deren Ordinaten der Differentialgleichung Genüge leisten, überhaupt aus und welche sind, um ihre Gestalt zu beurtheilen, vor Allem anderen ihre geradlinigen, oder parabolischen, reellen oder imaginären Assymptoten?

**Zweitens.** Welche ist unter den einfachsten, dem menschlichen geometrischen Vorstellungsvermögen am allerleichtesten zugängigen Curven, diejenige, die der gesuchten am nächsten kömmt?

**Drittens.** Durch welches analytische Verfahren kann man die grösst mögliche Congruenz der zwei in Rede stehenden Curven, in der Nähe einer beliebigen Stelle und allda wo möglich mit jeder beliebigen Genauigkeit, realisiren?

Den ersten dieser drei Punkte erledigt die Formenlehre. Der zweite ist etwas mehr Gegenstand der Transformationslehre und der dritte fällt ganz der Integrationsmethode anheim, die im fünften Abschnitte dieses Werkes enthalten ist.

Aus dieser Darstellung ergeben sich auch die Grenzen, in welche sich eine Formenlehre einzuschliessen hat. Sie hat nämlich keineswegs alle Kennzeichen von allen nur möglichen denkbaren Formen zum Gegenstande ihrer Untersuchungen zu machen, sondern nur diejenigen, die dem Rechner einen entschiedenen praktischen Nutzen gewähren, indem sie ihn entweder vor missrathenden Voraussetzungen schützen, oder zu einer Form führen, welche die schätzbare Eigenschaft besitzt, so wie nach den Ergebnissen des II. Abschnittes die des bestimmten Integrals, in mehrere andere mit Leichtigkeit verwandelt werden zu können, deren jede wieder für sich lehrreich ist. Der Leser möge daher nicht erwarten, dass wir in Bezug auf ihre Kennzeichen alle möglichen Transcendenten erschöpfen werden, weil wir consequenter Weise nur diejenigen Formen, deren Nützlichkeit bei einer ausgedehnten Klasse linearer Differentialgleichungen durch eine vorhergegangene analytische Erfahrung ausser allen Zweifel gesetzt ist, zum Gegenstande unserer Untersuchungen machen können. Hieher gehören aber: bestimmte Integrale, Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl und unbestimmte Integrale. Hieraus erhellet noch endlich die Nothwendigkeit in diesem Werke die Formenlehre nach denjenigen Theorien folgen zu lassen, die den Gegenstand des II. Abschnittes bildeten, weil wir die dort gewonnenen analytischen Erfahrungen hier unumgänglich benöthigen.

Es wird wohl kaum nöthig sein zu bemerken, dass unsere bisherigen Untersuchungen keineswegs unvollständig seien, weil sie Summen mehrerer von einander verschiedener Transcendenten, etwa Exponentialgrössen, als particuläre Integrale anzunehmen, und ihren Einfluss auf die Differentialgleichung zu erörtern unterlassen; denn es fällt in die Augen, dass all' diese Transcendenten, weil die Differentialgleichungs-Coefficienten von ihnen keine Spur tragen, auf irgend einem Wege zu eliminiren seien, und dass man, welcher auch immer dieser Weg wäre, genau auf dieselbe Weise auch die mit einer willkürlichen Constante multiplizirte Transcendente eliminiren könnte, woraus dann wieder folgt, dass jeder der irgend einer Transcendenten proportionalen Theile der oberwähnten Summe für sich ein particuläres Integral vorzustellen vermöchte. Es wird z. B. der Ausdruck:

$$y = e^x + e^{-x}$$

nur dann ein Integral einer Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten vorstellen können, wenn $e^x$ für sich und $e^{-x}$ wieder für sich Genüge leistende Werthe sind.

## §. 16.

## Allgemeine Übersicht aus dem Standpunkte des Coefficientenbaues.

Die Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphes werden, ihrer ausnehmenden Einfachheit ungeachtet und vielleicht eben wegen dieser Einfachheit umsomehr, den Leser von der Wichtigkeit einer Formenlehre der linearen Differentialgleichungen als desjenigen Theiles der Theorie überzeugt haben, dem vorzugsweise obliegt das Dunkel aufzuhellen, das bisher über die Hieroglyphenschrift der Differentialgleichungen lagerte und derselben jene Durchsichtigkeit zu ertheilen, die mehr frommt als die expeditesten zur Auffindung des Integrals aufzustellenden Rechnungsmethoden. Dieser Theil unserer analytischen Untersuchungen scheint desshalb der vollsten Aufmerksamkeit werth, und um so würdiger zu sein, als seiner Entwicklung noch ein weites Feld geöffnet ist, da der Fall einer Differentialgleichung mit algebraischen und rationalen Coefficienten offenbar nur als ein sehr spezieller einer allgemeinen Gleichung erscheint, deren Coefficienten beliebigen Classen der Functionen angehören. Es steht darum zu erwarten, dass, in künftigen Zeiten und bei fortgeschrittenerer Wissenschaft, die Aufstellung einer ganz allgemeinen Formenlehre Bedürfniss wird und es liegt uns hier ob, eine solche, so viel in unseren Kräften steht, vorzubereiten. Hiezu ist aber wohl nichts mehr dienlich, als die Betrachtung des Gegenstandes von allen Seiten und Nachweisung des Zusammenhanges, in dem die verschiedenen Lehren der Theorie der Differentialgleichungen unter einander stehen, und der Art, wie sie sich gegenseitig unterstützen und ergänzen. Es ist nun im vorhergehenden Paragraphe gesagt worden, dass man zu den allda aus populären Betrachtungen gezogenen Resultaten auch auf einem anderen Wege gelangen könne, die in §. 4 des I. Abschnittes erörterte Zusammensetzung der Coefficienten aus den particulären Integralen ins Auge fassend. Die hiezu führenden Betrachtungen verbreiten über den Gegenstand im Allgemeinen wieder einiges Licht, und können bei der Aufstellung einer allgemeinen Formenlehre von Nutzen sein; sie mögen daher hier in derselben Weise folgen, in der sie vom Herrn J. Derffel angestellt worden sind:

Nach dem im §. 4 des I. Abschnittes durchgeführten Untersuchungen stellt sich jeder Coefficient einer linearen Differentialgleichung von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung wie:

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + X_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots\ldots + X_1 y' + X_0 y = 0, \tag{389}$$

unmittelbar nach Ableitung derselben aus ihren particulären Integralen und vor geschehener Wegdivision durch irgend einen gemeinschaftlichen, variablen Factor, dar, als eine Summe von Producten aus je $n$ Factoren, die aus den $n$ particulären Integralen:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ldots\ldots\ y_{n-1},\ y_n$$

der vorgelegten Gleichung durch 0-, 1-, 2-, ...... bis $n$-malige Differentiation abgeleitet werden, und es sind alle Factoren eines und desselben Productes je mit einem anderen Stellenzeiger, und einem anderen Differentiations- oder Strich-Exponenten versehen. Es erscheinen somit in einem jeden

Gliede der erwähnten Summe alle $n$ Stellenzeiger, eben so alle Strichexponenten, mit Ausnahme eines einzigen, und zwar erscheinen in den Gliedern für $X_n$ keine $n^{\text{ten}}$, in jenen für $X_{n-1}$ $(n-1)^{\text{ten}}$, ..... in den Gliedern für $X_0$ keine $0^{\text{ten}}$ Differentialquotienten. Denkt man sich sämmtliche zu einem bestimmten Coefficienten gehörigen Glieder nach den $n$ Stellenzeigern der in enthaltenen Factoren geordnet, so erscheinen die zugehörigen Strichexponenten dieser letzteren i möglichen Permutationen und nimmt man noch schliesslich an, dass die Aneinanderreihung der ein Glieder in der Art geschehen sei, dass die Aufeinanderfolge jener Permutationen dem bekannte mutationsgesetze entspricht, so lassen sich auch die Zeichen der einzelnen Glieder nach einem ein Gesetze bestimmen, welches im §. 4 des I. Abschnittes des Näheren auseinandergesetzt ist. Die so deten Coefficienten aber sind zweiwerthige Functionen der particulären Integrale $y_1, y_2, \ldots$ haben die Eigenschaft bei Vertauschung beliebiger zweier unter ihnen nur das Zeichen zu ändern. wir nun die Zusammensetzung irgend eines Differentialgleichungs-Coefficienten in der angegebenen durch Hinstellen einiger seiner Glieder an, so erhalten wir, etwa für $X_n$:

$$
\begin{aligned}
X_n = & + y_1 \; y'_2 \; y''_3 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; y^{(n-3)}_{n-2} \; y^{(n-2)}_{n-1} \; y^{(n-1)}_{n} \\
& - y_1 \; y'_2 \; y''_3 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; y^{(n-3)}_{n-2} \; y^{(n-1)}_{n-1} \; y^{(n-2)}_{n} \\
& - y_1 \; y'_2 \; y''_3 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; y^{(n-2)}_{n-2} \; y^{(n-3)}_{n-1} \; y^{(n-1)}_{n} \\
& + y_1 \; y'_2 \; y''_3 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; y^{(n-2)}_{n-2} \; y^{(n-1)}_{n-1} \; y^{(n-3)}_{n} \\
& + y_1 \; y'_2 \; y''_3 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; y^{(n-1)}_{n-2} \; y^{(n-3)}_{n-1} \; y^{(n-2)}_{n} \\
& - y_1 \; y'_2 \; y''_3 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; y^{(n-1)}_{n-2} \; y^{(n-2)}_{n-1} \; y^{(n-3)}_{n} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{390}
$$

und es würde durchaus nicht schwer fallen, aus den hier aufgeschriebenen Gliedern die entsprec einem beliebigen anderen Coefficienten angehörigen zu finden. Namentlich genügte, zur Aufstellu entsprechenden Glieder für $X_{n-1}$, eine Verwandlung des Strichexponenten $(n-1)$ in den $(n)$ u allgemeine Zeichenänderung, zur Ermittlung der entsprechenden Glieder für $X_{n-2}$ aus den letzter für $X_{n-1}$ eben so eine Verwandlung von $(n-2)$ in $(n-1)$ und eine abermalige an alle Gliede brachte Zeichenänderung, u. s. w.

Nachdem wir uns nun diese Gesetzmässigkeiten ins Gedächtniss zurückgerufen haben, gen wir unsere Untersuchung über die Erscheinungen am Coefficientenbaue einer Differentialglei deren particuläre Integrale sämmtlich der Form $e^{\int \varphi dx}$ angehören, zu beginnen und setzen daher:

$$
y_1 = e^{\int \varphi_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int \varphi_2 dx}, \quad \ldots\ldots \quad y_{n-1} = e^{\int \varphi_{n-1} dx}, \quad y_n = e^{\int \varphi_n dx}
\tag{391}
$$

als die $n$ particulären Integrale der zu construirenden Gleichung (389) voraus. wobei wir vore etwas Bestimmtes vor Augen zu haben:

$$
\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varphi_{n-1}, \quad \varphi_n
$$

als algebraische Polynome von beliebiger Gradzahl nach $x$ betrachten. Vor Allem müssen wir,

Bildung der Differentialgleichungs-Coefficienten $X$ zu effectuiren, die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten der einzelnen particulären Integrale (391) ableiten, wozu uns am bequemsten die Formel (313) in §. 13 dienlich ist, zufolge welcher wir, ohne Rücksicht auf einen etwaigen Stellenzeiger, erhalten:

$$\frac{d^r}{dx^r}\left[e^{\int\varphi dx}\right]=e^{\int\varphi dx}\mathfrak{S}\left\{\frac{r!}{\mathfrak{a}!\mathfrak{b}!\mathfrak{c}!\ldots\mathfrak{s}!}\left(\frac{\varphi^{(\alpha)}}{(\alpha+1)!}\right)^{\mathfrak{a}}\left(\frac{\varphi^{(\beta)}}{(\beta+1)!}\right)^{\mathfrak{b}}\left(\frac{\varphi^{(\gamma)}}{(\gamma+1)!}\right)^{\mathfrak{c}}\cdots\left(\frac{\varphi^{(\sigma)}}{(\sigma+1)!}\right)^{\mathfrak{s}}\right\}=e^{\int\varphi dx}\mathfrak{S}^{(r)} \quad (392)$$

$$(\alpha+1)\,\mathfrak{a}+(\beta+1)\,\mathfrak{b}+(\gamma+1)\,\mathfrak{c}+\ldots\ldots+(\sigma+1)\,\mathfrak{s}=r. \quad (393)$$

Die Betrachtung dieser Formel, mit Berücksichtigung des früher Gesagten über die Gestaltung der einzelnen Glieder, aus denen sich die Coefficienten $X$ zusammensetzen, überzeugt uns zunächst unmittelbar von der Möglichkeit der Ausscheidung eines nach den particulären Integralen symmetrischen exponentiellen Factors:

$$e^{\int(\varphi_1+\varphi_2+\ldots\ldots+\varphi_n)dx}$$

aus allen Differentialgleichungs-Coefficienten, und denken wir uns die ganze Gleichung (389) durch eben diesen exponentiellen Factor wegdividirt, so stellen die neuen Coefficienten — die wir abermals mit $X$ bezeichnen wollen — nach den $\varphi$ ebenfalls zweiwerthige, aber rein algebraische Functionen dar. Wir können uns nun diese Division einfach durch Verwandlung des Symbols $y^{(r)}$ in $\mathfrak{S}^{(r)}$ bewerkstelligt denken und erhalten sonach, den Gliedern (390) entsprechend:

$$\begin{aligned}X_n = &+\mathfrak{S}_1^{(0)}\,\mathfrak{S}_2^{(1)}\,\mathfrak{S}_3^{(2)}\,\ldots\ldots\ldots\,\mathfrak{S}_{n-2}^{(n-3)}\,\mathfrak{S}_{n-1}^{(n-2)}\,\mathfrak{S}_n^{(n-1)}\\ &-\mathfrak{S}_1^{(0)}\,\mathfrak{S}_2^{(1)}\,\mathfrak{S}_3^{(2)}\,\ldots\ldots\ldots\,\mathfrak{S}_{n-2}^{(n-3)}\,\mathfrak{S}_{n-1}^{(n-1)}\,\mathfrak{S}_n^{(n-2)}\\ &-\mathfrak{S}_1^{(0)}\,\mathfrak{S}_2^{(1)}\,\mathfrak{S}_3^{(2)}\,\ldots\ldots\ldots\,\mathfrak{S}_{n-2}^{(n-2)}\,\mathfrak{S}_{n-1}^{(n-3)}\,\mathfrak{S}_n^{(n-1)}\\ &+\mathfrak{S}_1^{(0)}\,\mathfrak{S}_2^{(1)}\,\mathfrak{S}_3^{(2)}\,\ldots\ldots\ldots\,\mathfrak{S}_{n-2}^{(n-2)}\,\mathfrak{S}_{n-1}^{(n-1)}\,\mathfrak{S}_n^{(n-3)}\\ &+\mathfrak{S}_1^{(0)}\,\mathfrak{S}_2^{(1)}\,\mathfrak{S}_3^{(2)}\,\ldots\ldots\ldots\,\mathfrak{S}_{n-2}^{(n-1)}\,\mathfrak{S}_{n-1}^{(n-3)}\,\mathfrak{S}_n^{(n-2)}\\ &-\mathfrak{S}_1^{(0)}\,\mathfrak{S}_2^{(1)}\,\mathfrak{S}_3^{(2)}\,\ldots\ldots\ldots\,\mathfrak{S}_{n-2}^{(n-1)}\,\mathfrak{S}_{n-1}^{(n-2)}\,\mathfrak{S}_n^{(n-3)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \quad (394)$$

Erinnern wir uns nun an die schon S. 258 erörterte Zusammensetzung des Symbols $\mathfrak{S}^{(r)}$. Dasselbe stellt, zufolge der (392) eine Summe von Gliedern dar, welche Functionen sind von $\varphi$ und von Differentialquotienten dieser Grösse, und in welchen, kraft der angehängten Bedingungsgleichung (393) die Summe der Dimensionen mehr der Summe der Striche gleich einer constanten Grösse, gleich dem Strichexponenten des Symbols ist, und nehmen wir die ebenfalls S. 258 beliebte Bezeichnungsweise an, indem wir unter $\left.{r-p \atop p}\right\}$ die Gesammtheit aller Glieder von $\mathfrak{S}^{(r)}$ verstehen, in denen überall die Summe der Dimensionen gleich $r-p$, die Summe der Striche aber gleich $p$ ist, so lässt sich letzteres Symbol auch folgendermassen schreiben:

$$\mathfrak{S}^{(r)}=\left.{r \atop 0}\right\}+\left.{r-1 \atop 1}\right\}+\left.{r-2 \atop 2}\right\}+\ldots\ldots+\left.{2 \atop r-2}\right\}+\left.{1 \atop r-1}\right\} \quad (395)$$

und es kann die Bedeutung und Bildung der einzelnen Bestandsymbole auf S. 259 unter (319) nachgesehen werden.

Bei der bekannten Ableitungsweise der aufeinanderfolgenden einzelnen Glieder in $X_n$ und eben so in den übrigen Coefficienten aus dem jedesmaligen ersten, genügt es nun, etwa zum Behufe der Bildung von $X_n$, das Product:

$$\mathfrak{S}_1^{(0)}\,\mathfrak{S}_2^{(1)}\,\mathfrak{S}_3^{(2)}\,\ldots\ldots\ldots\,\mathfrak{S}_{n-1}^{(n-2)}\,\mathfrak{S}_n^{(n-1)} \tag{396}$$

vollständig zu entwickeln, und es ist offenbar, dass jedes einzelne der so erhaltenen Glieder Veranlassung geben wird zu einer eigenen Gruppe von Gliedern, bei denen dasselbe Gesetz der Ableitung auseinander stattfinden muss, wie in den Gliedern (390) oder (394). Es lässt sich nun weiters leicht einsehen, dass eine jede solche Gruppe für sich zweiwerthig sei, und dass verschiedenen Gruppen im Allgemeinen verschiedene Grade nach $\varphi$, und mittelbar nach $x$, angehören werden. Diejenige Gruppe, welche die mit der höchsten Gradzahl nach $\varphi$ versehenen Glieder von $X_n$ enthält, stammt aber offenbar aus dem Produkte:

$$\left.\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}_1 \left.\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}_2 \left.\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right\}_3 \left.\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right\}_4 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, \left.\begin{matrix}n-2\\0\end{matrix}\right\}_{n-1} \left.\begin{matrix}n-1\\0\end{matrix}\right\}_n ,$$

welches sich uns bei der Entwicklung von (396) zuerst darbiethet; da aber einfach $\left.\begin{matrix}r\\0\end{matrix}\right\} = \varphi^r$ ist, so lässt sich ebenbesagte Gruppe unmittelbar hinstellen, und wir erhalten daher, als ersten, mit der höchsten Gradzahl nach $\varphi$ versehenen Bestandtheil von $X_n$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_n = &+ \varphi_1^0\,\varphi_2^1\,\varphi_3^2\,\ldots\ldots\ldots\,\varphi_{n-2}^{n-3}\,\varphi_{n-1}^{n-2}\,\varphi_n^{n-1}\\ &- \varphi_1^0\,\varphi_2^1\,\varphi_3^2\,\ldots\ldots\ldots\,\varphi_{n-2}^{n-3}\,\varphi_{n-1}^{n-1}\,\varphi_n^{n-2}\\ &- \varphi_1^0\,\varphi_2^1\,\varphi_3^2\,\ldots\ldots\ldots\,\varphi_{n-2}^{n-2}\,\varphi_{n-1}^{n-3}\,\varphi_n^{n-1}\\ &+ \varphi_1^0\,\varphi_2^1\,\varphi_3^2\,\ldots\ldots\ldots\,\varphi_{n-2}^{n-2}\,\varphi_{n-1}^{n-1}\,\varphi_n^{n-3}\\ &+ \varphi_1^0\,\varphi_2^1\,\varphi_3^2\,\ldots\ldots\ldots\,\varphi_{n-2}^{n-1}\,\varphi_{n-1}^{n-3}\,\varphi_n^{n-2}\\ &- \varphi_1^0\,\varphi_2^1\,\varphi_3^2\,\ldots\ldots\ldots\,\varphi_{n-2}^{n-1}\,\varphi_{n-1}^{n-2}\,\varphi_n^{n-3}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{397}$$

Mit gleicher Leichtigkeit lassen sich die ersten Bestandtheile höchsten Grades nach $\varphi$ in den Coefficienten:

$$X_{n-1},\quad X_{n-2},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad X_1,\quad X_0$$

angeben, die wir beziehungsweise mit:

$$\mathfrak{X}_{n-1},\quad \mathfrak{X}_{n-2},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \mathfrak{X}_1,\quad \mathfrak{X}_0$$

bezeichnen wollen, wenn man die, oben, S. 296 auseinandergesetzte Ableitungsweise der Glieder ebengenannter Coefficienten aus den Gliedern von $X_n$ in Erwägung zieht.

Es drängt sich hier zuvörderst die Bemerkung auf, dass in diesen ersten Bestandtheilen $\mathfrak{X}$ der successiven Coefficienten keine gestrichelten $\varphi$ vorkommen, während offenbar in allen anderen Gliedergruppen Differentialquotienten der $\varphi$ erscheinen müssen, woraus weiter folgt, dass sich die Differential-

gleichungs-Coefficienten $X$ ausschliesslich auf eben diese ersten Bestandtheile $\mathfrak{X}$ zurückziehen müssen in all denjenigen Fällen, in welchen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_n$ sämmtlich constante Grössen bedeuten. So oft aber alle $\varphi$ constant sind, gehören sämmtliche $n$ particuläre Integrale (391) der Form $e^{\theta x}$ an, unter $\theta$ eben eine constante Grösse verstanden, und wir wissen aus den Untersuchungen des II. Abschnittes, §. 1, dass man, um diejenige Differentialgleichung zu bilden, welche die $n$ Functionen:

$$e^{\theta_1 x}, \quad e^{\theta_2 x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad e^{\theta_n x}$$

als particuläre Integrale besitzt, nur diejenige algebraische Gleichung:

$$A_n \theta^n + A_{n-1} \theta^{n-1} + A_{n-2} \theta^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_1 \theta + A_0 = 0$$

zu construiren brauche, der die $n$ Grössen $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots \theta_n$ als Wurzeln zukommen, indem dann eben:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_1 y' + A_0 y = 0$$

die gewünschte Differentialgleichung darstellt. Da nun aber:

$$\begin{aligned}
A_{n-1} &= - A_n (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \theta_n) \\
A_{n-2} &= + A_n (\theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \ldots\ldots + \theta_{n-1} \theta_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_0 &= \pm A_n . \theta_1 \theta_2 \theta_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \theta_{n-1} \theta_n
\end{aligned}$$

sind, so erhalten wir für unsere ofterwähnten ersten Bestandtheile $\mathfrak{X}$, auf analoge Weise, folgende Werthe:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_n &= + \mathfrak{X}_n \\
\mathfrak{X}_{n-1} &= - \mathfrak{X}_n (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots\ldots\ldots + \varphi_{n-1} + \varphi_n) \\
\mathfrak{X}_{n-2} &= + \mathfrak{X}_n (\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_{n-1} \varphi_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{X}_0 &= \pm \mathfrak{X}_n \cdot \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi_{n-1} \varphi_n
\end{aligned} \tag{398}$$

Was den Werth (397) von $\mathfrak{X}_n$ speziell betrifft, so ist uns derselbe auch schon aus den Untersuchungen des §. 14 als jene zweiwerthige Function von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_n$ bekannt, die wir ebendaselbst und in den Rechnungen der §§. 11, 12 mit dem Buchstaben $G$ bezeichnet haben; es ist nämlich:

$$\mathfrak{X}_n = (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_3) \cdots (\varphi_1 - \varphi_n)(\varphi_2 - \varphi_3) \cdots (\varphi_2 - \varphi_n) \ldots\ldots\ldots (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = G. \tag{399}$$

Nach all diesen Erwägungen hat nunmehr die Angabe der Ansteigungen in den Gradzahlen nach $x$ für die aufeinanderfolgenden Coefficientenpaare durchaus keine Schwierigkeit. Bezeichnen wir nämlich die Grade nach $x$, die den Functionen:

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varphi_{n-1}, \quad \varphi_n$$

zukommen, auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphe beziehungsweise mit:

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad p_{n-1}, \quad p_n,$$

voraussetzend, dass diese Werthe in ihrer natürlichen Gruppe... zeichnet seien, und nehmen wir, einstweilen noch, dieselben als sämmtlich von einander ... und die negative Einheit überschreitend an, so wird der Grad von $\mathfrak{F}_n$ offenbar durch das in den Gliedern (397) obenanstehende:

$$\varphi_1^0 \; \varphi_2^1 \; \varphi_3^2 \; \ldots\ldots\ldots \; \varphi_{n-2}^{n-3} \; \varphi_{n-1}^{n-2} \; \varphi_n^{n-1} \tag{400}$$

bestimmt und hat sonach den Werth:

$$p_2 + 2p_3 + 3p_4 + \ldots\ldots\ldots + (n-2)\,p_{n-1} + (n-1)\,p_n = q. \tag{401}$$

Bei den übrigen Coefficienten lassen sich die Werthe der ihnen zugehörigen Gradzahlen unmittelbar aus der Betrachtung der Gleichungen (398) entnehmen, indem die Grade der dort ersichtlichen eingeklammerten Polynome, respective Multiplicatoren von $\mathfrak{F}_n$, unter den gemachten Voraussetzungen, offenbar jedesmal ausschliesslich durch deren letzte Glieder bestimmt werden. Es erhalten somit die Gradzahlen nach $x$ für die successiven Differentialgleichungs-Coefficienten:

$$X_n\,, \qquad X_{n-1}\,, \qquad X_{n-2}\,, \qquad \ldots\ldots \qquad X_1\,, \qquad X_0$$

beziehungsweise folgende Werthe:

$$q, \qquad q+p_n, \qquad q+p_n+p_{n-1}, \qquad \ldots\ldots \qquad q+p_n+\ldots+p_2, \quad q+p_n+\ldots+p_1, \tag{402}$$

woraus sich nachstehende Wachsthume dieser Gradzahlen bei dem Übergange von jedem Coefficienten zum nächstfolgenden, respective Ansteigungen in den successiven Coefficientenpaaren ergeben:

$$p_n >, \qquad p_{n-1} >, \qquad p_{n-2} >, \ldots\ldots \qquad p_1. \tag{403}$$

Wir sehen also, dass das bereits durch die Untersuchungen der §§. 6 und 15 festgestellte Etiquette-Gesetz auch auf dem hier eingeschlagenen Wege sich bewahrheite, wenigstens für den Fall, wenn die $p$ genannten Grössen sämmtlich von einander verschieden sind, und — mit Ausnahme von $p_1$ das jeden beliebigen Werth besitzen kann — beliebige positive oder solche negative Zahlen bedeuten, deren numerische Werthe kleiner sind als 1. In der That gilt das Bisherige nur unter den ebenausgesprochenen Beschränkungen, indem namentlich die Voraussetzung zu Grunde gelegt wurde, dass in einer Summe wie $\mathfrak{S}^{(r)}$ jedesmal $\left.{r \atop 0}\right\} = \varphi^r$, als das Glied höchsten Grades nach $\varphi$, auch mit der höchsten Gradzahl nach $x$ versehen sei, was nicht mehr stattfindet, wenn $p$ eine negative Zahl bedeutet, deren numerischer Werth $\gtreqless 1$ ist. Für $p = -1$ nämlich besitzen alle Glieder von $\mathfrak{S}^{(r)}$ dieselbe Gradzahl $-r$, und für $p < -1$ ist in derselben Summe $\mathfrak{S}^{(r)}$ nicht das erste Glied $\left.{r \atop 0}\right\} = \varphi^r$, sondern das letzte $\left.{1 \atop r-1}\right\} = \varphi^{(r-1)}$ mit der höchsten Gradzahl nach $x$ versehen.

Wir dehnen nun unsere Untersuchung zuvörderst auf denjenigen Fall aus, wo unter den genannten Werthen einander gleiche vorhanden sind und nehmen zu dem Ende, ganz allgemein, eine Gleichheit im Grade nach $x$ bei der nachstehenden Reihe von Functionen an:

$$\varphi_{h+1}\,, \quad \varphi_{h+2}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi_{h+r-1}\,, \quad \varphi_{h+r}\,,$$

voraussetzend, dass:

$$-1 < p_1 < p_2 < \ldots\ldots < p_h < p_{h+1} = p_{h+2} = \ldots\ldots = p_{h+r} < p_{h+r+1} < \ldots\ldots < p_{n-1} < p_n \quad (404)$$

sei. Diess festgehalten, fassen wir die mehrgliedrigen Multiplicatoren von $\mathfrak{F}_n$ in den $\mathfrak{F}$ genannten Bestandtheilen (398) und zwar zuvörderst für die Coefficienten der Gruppe:

$$X_{h+r}, \quad X_{h+r-1}, \quad X_{h+r-2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X_{h+2}, \quad X_{h+1}, \quad X_h$$

ins Auge, so erkennen wir ohne Schwierigkeit, dass in $X_{h+r}$ und $X_h$, jetzt wie im früheren Falle, ein einziges Glied höchsten Grades nach $x$ vorhanden sein wird, was eben so bei allen, der vor Augen liegenden Coefficientengruppe vorausgehenden und nachfolgenden Coefficienten stattfindet. Bei den mittleren Gliedern derselben Gruppe dagegen erscheinen in jenen polynomischen Factoren ihrer ersten Bestandtheile mehrere Glieder, die nach $x$ dem höchsten Grade angehören und es stellen, wie leicht einzusehen, in:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{F}_{h+r} \\ \mathfrak{F}_{h+r-1} \\ \mathfrak{F}_{h+r-2} \\ \ldots\ldots \\ \mathfrak{F}_{h+1} \\ \mathfrak{F}_h \end{array}\right\} \text{bezüglich} \left\{\begin{array}{l} \varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_{h+r+1} \\ \varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_{h+r+1} (\varphi_{h+r} + \varphi_{h+r-1} + \ldots\ldots + \varphi_{h+2} + \varphi_{h+1}) \\ \varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_{h+r+1} (\varphi_{h+r} \varphi_{h+r-1} + \varphi_{h+r} \varphi_{h+r-2} + \ldots\ldots + \varphi_{h+2} \varphi_{h+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_{h+r+1} (\varphi_{h+r} \varphi_{h+r-1} \cdots \varphi_{h+2} + \ldots\ldots + \varphi_{h+r-1} \varphi_{h+r-2} \cdots \varphi_{h+1}) \\ \varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_{h+r+1} \varphi_{h+r} \varphi_{h+r-1} \cdots\cdots \varphi_{h+3} \varphi_{h+2} \varphi_{h+1} \end{array}\right. \quad (405)$$

die Gesammtheit jener Glieder dar. Wir sehen also, dass eine zufällige Aufhebung der Glieder höchsten Grades lediglich bei den mittleren Coefficienten der obenstehenden Gruppe, d. h. in den Coefficienten:

$$X_{h+r-1}, \quad X_{h+r-2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X_{h+2}, \quad X_{h+1}$$

vorkommen kann, wogegen derlei Aufhebungen bei allen übrigen Coefficienten unmöglich erscheinen, wenigstens so lange, als das in allen $\mathfrak{F}$ als Factor auftretende $\mathfrak{F}_n$ keine Verminderung seiner Gradzahl $q$ erfährt.

Eine solche Eventualität kann nun hier, wo mehrere $\varphi$ von gleichem Grade gegeben sind, zufolge (399) allerdings Platz greifen, und führt, wenn sie wirklich eintritt, sofort bei sämmtlichen $\mathfrak{F}$ eine gleichmässige Herabdrückung der entsprechenden Gradzahlen um eine gewisse Anzahl Einheiten herbei; es mag daher auf den ersten Anblick scheinen, als ob unter solchen Umständen, möglicherweise, andere als die $\mathfrak{F}$ genannten Gliedergruppen mit der höchsten Gradzahl nach $x$ begabt sein könnten, was die Ausdehnung unserer Analysis, welche sich lediglich um die Grade jener ofterwähnten ersten Coefficienten-Bestandtheile kümmert, auf den in Rede stehenden Fall, als unstatthaft erscheinen liesse. Diese Bedenken lassen sich nun bei näherer Beleuchtung des Sachverhalts auf höchst einfache Weise beseitigen. Denn, angenommen, es wäre etwa $p_{h+1} = p_{h+2}$, so kann zwar allerdings die Differenz $\varphi_{h+1} - \varphi_{h+2}$, welche im Werthe (399) von $\mathfrak{F}_n$ als Factor vorkommt, eine Erniedrigung ihres Grades, etwa um $\varkappa$ Einheiten, erleiden, andererseits aber wird jeder Coefficient $X$, oder auch jede einzelne Gliedergruppe in einem solchen, in Gemässheit ihrer Zweiwerthigkeit nach $\varphi_{h+1}$ und $\varphi_{h+2}$ und der Art ihrer Zusammen-

setzung aus den $\varphi$ und deren Differentialquotienten, eine Darstellung in folgender Form verstatten müssen:

$$(\varphi_{k+1} - \varphi_{k+2}) L + (\varphi'_{k+1} - \varphi'_{k+2}) M + (\varphi''_{k+1} - \varphi''_{k+2}) N + \ldots\ldots,$$

wo $L$, $M$, $N$, ..... als nach $\varphi_{k+1}$ und $\varphi_{k+2}$ symmetrisch zu denken sind. Es folgt hieraus unmittelbar, dass jede Verminderung des Grades von $\mathfrak{X}_n$ um $\varkappa$ Einheiten, nicht nur in allen $\mathfrak{X}$, sondern gleichzeitig auch in jeder anderen Gliedergruppe die nämliche Erniedrigung der Gradzahl herbeiführen müsse, so zwar, dass in der That der $\mathfrak{X}$ genannte Coefficienten-Bestandtheil jederzeit die Entscheidung über den Grad desjenigen $X$, dem er angehört, behaupten wird.

Es wäre nun die Gültigkeit unseres Etiquette-Gesetzes, aus dem hier eingehaltenen Gesichtspunkte des Coefficientenbaues, auch für die beiden früher bezeichneten Ausnahmsfälle zu erweisen, in denen nämlich unter den particulären Integralen der zu construirenden Gleichung einige vorkommen, für welche die Werthe der $p$ genannten Grössen gleich oder kleiner sind als die negative Einheit; wir finden uns aber umsoweniger veranlasst, durch eine detaillirtere Besprechung dieser beiden speziellen Fälle, die Übersichtlichkeit der hier vorgetragenen Analysis zu beeinträchtigen, als die dabei in Anwendung kommende Methode der Untersuchung, um deren Darlegung es uns hauptsächlich zu thun ist, da der Inhalt der zu erwartenden Resultate ohnediess bekannt ist, von der im Vorigen auseinandergesetzten nicht wesentlich abweicht. Es kommt nämlich bei Behandlung dieser beiden Ausnahmsfälle — deren erstem die Annahme des Vorhandenseins von $k$ particulären Integralen, für welche alle $p = -1$ ist, also die Voraussetzung:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots\ldots = p_k = -1 < p_{k+1} < p_{k+2} < \ldots\ldots < p_n \tag{406}$$

zu Grunde liegt, wogegen der zweite Ausnahmsfall von der Voraussetzung:

$$p_1 < p_2 < p_3 < \ldots\ldots < p_k < -1 < p_{k+1} < p_{k+2} < \ldots\ldots < p_n \tag{407}$$

ausgeht — immer nur darauf an, in einem jeden Coefficienten alle Glieder ausfindig zu machen, die nach $x$ dem höchsten Grade angehören, um sodann auf den Werth der Gradzahl nach $x$, die dem betreffenden Coefficienten selbst zukömmt, einen Schluss zu ziehen. Man wird hiebei die Gesammtheit aller Glieder höchsten Grades, die zu irgend einem und demselben Coefficienten $X_r$ gehörig sind, Analogie halber mit $\mathfrak{X}_r$ bezeichnen können, nur werden dann eben diese Coefficientenbestandtheile $\mathfrak{X}$ eine andere als die unter (398) ersichtliche Zusammensetzung darbiethen, was aber dennoch auf den ferneren Gang der Untersuchung keinen wesentlich abändernden Einfluss nimmt.

In derselben Weise, in welcher die vorgetragene Untersuchungsmethode geeignet ist uns alle Gesetzmässigkeiten zu offenbaren, die auf die Grade der successiven Coefficienten einer Differentialgleichung Bezug nehmen, deren particuläre Integrale unter der Form $e^{\int \varphi dx}$ gedacht werden, und in der S. 169 hingestellten geometrischen Construction ihren allgemeinsten Ausdruck finden, vermag uns dieselbe auch zur Kenntniss derjenigen Criterien zu verhelfen, welche die Zusammensetzung der successiven Coefficienten einer Gleichung aus einfachen Factoren, zur Erkennung gewisser auf die Form der particulären Integrale Einfluss nehmender Umstände, biethet, und die in §§. 7, 8 und 15 dieses Abschnit-

tes ausführlich auseinandergesetzt worden sind. Da uns aber die dortselbst durchgeführten Untersuchungen gelehrt haben, dass aus dem Vorhandensein einzelner oder wiederholter einfacher Wurzelfactoren, wie $x-\alpha$, im ersten oder in einigen der ersten Differentialgleichungs-Coefficienten im Allgemeinen auf das Vorhandensein einfacher oder wiederholter solcher Factoren geschlossen werden könne, die in Einem oder mehren particulären Integralen, im Zähler oder Nenner des Exponenten der Exponentielle oder des algebraischen Bestandtheils auftreten, so wollen wir an diesem Orte diejenigen Erscheinungen ins Auge fassen, die sich in der Zusammensetzung der successiven Coefficienten einer Gleichung aus einfachen Factoren mit Nothwendigkeit bemerkbar machen müssen, unter der Voraussetzung, dass die Exponenten der Exponentiellen sämmtlicher particulärer Integrale als gebrochene Functionen gedacht werden — mit andern Worten: wir nehmen uns vor diejenige Differentialgleichung zu construiren, welche die particulären Integrale:

$$y_1 = e^{\int \frac{\varphi_1}{(x-\alpha)^{m_1}} dx}, \quad y_2 = e^{\int \frac{\varphi_2}{(x-\alpha)^{m_2}} dx}, \quad \ldots\ldots \quad y_n = e^{\int \frac{\varphi_n}{(x-\alpha)^{m_n}} dx} \tag{408}$$

besitzt, unter $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_n$ entweder ganze Polynome oder solche algebraische Brüche verstanden, die den Factor $x-\alpha$ im Nenner nicht enthalten. Hiezu sind nun die im ersten Theile dieses Paragraphes durchgeführten Entwicklungen in fast unveränderter Weise verwendbar. Namentlich gelangen wir hier wie dort genau zu denselben Werthen (394) für die Differentialgleichungs-Coefficienten, in denen wir uns abermals die Symbole $\mathfrak{S}^{(r)}$ in vollständiger Entwicklung hingestellt zu denken haben. Die einzelnen Entwicklungsglieder von $\mathfrak{S}^{(r)}$ erscheinen nun aber hier offenbar sämmtlich als gebrochene Functionen, indem allgemein anstatt $\varphi$ überall gesetzt werden muss $\frac{\varphi}{(x-\alpha)^m}$ und wir sehen, dass in Folge dessen alle einzelnen Glieder der Coefficienten und somit auch diese selbst als Brüche dastehen, in deren Nennern $x-\alpha$ zu gewissen Potenzen erhoben vorkommen wird. Wir wünschen nun erklärtermassen schliesslich immer zu Differential-Gleichungen mit algebraischen, rationalen und ganzen Coefficienten zu gelangen, und werden uns zu dem Ende im vorliegenden Falle auf die Weise benehmen, dass wir zuvörderst, in jedem einzelnen Coefficienten für sich, alle Glieder auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen, der offenbar nur aus Factoren $x-\alpha$ zusammengesetzt sein kann, schliesslich aber alle Coefficienten mit dem grössten der so erhaltenen Nenner multipliziren, wodurch in der Gleichung alle Brüche verschwinden. Hiezu bedürfen wir nun zunächst der Kenntniss desjenigen Gliedes der Entwicklung in $\mathfrak{S}^{(r)}$, das mit der höchsten Potenz von $x-\alpha$ im Nenner versehen ist, was uns, mit Rücksicht auf die Formel (392), alsbald auch im Vorliegenden zur Unterscheidung dreier Fälle nöthigt:

Erstens: wo die Werthe sämmtlicher $m$ positive und die Einheit überschreitende Zahlen vorstellen,

Zweitens: wo unter den Werthen dieser $m$ mehre, etwa $k$ an der Zahl, der positiven Einheit gleich sind,

Drittens: wo unter den $m$ genannten Werthen $k$ an der Zahl entweder positiv und zwischen 1 und 0 enthalten sind, oder aber negative Zahlen bedeuten. — Im ersten dieser Fälle, wo also:

$$+1 < m_1 < m_2 < \ldots\ldots\ldots < m_{n-1} < m_n \tag{409}$$

vorausgesetzt wird, ist in einer jeden Summe $\mathfrak{S}^{(r)}$ offenbar $\left.\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{\varphi^r}{(x-\alpha)^{rm}}$ das mit der höchsten Potenz von $x-\alpha$ im Nenner verknüpfte Glied, was allein hinreicht, die vollständige Übereinstimmung des für diesen Fall einzuhaltenden Entwicklungsganges mit demjenigen darzulegen, der bei dem gleichfalls zuerst behandelten Falle im ersten Theile unserer Untersuchungen in Anwendung gekommen ist. Wir wenden uns daher auch hier wieder an die $\mathfrak{J}$ genannten Coefficienten-Bestandtheile (398) und erhalten demgemäss auch, dem dortigen (400) analog:

$$\frac{\varphi_1^0 \; \varphi_2^1 \; \varphi_3^2 \; \varphi_4^3 \; \ldots\ldots\ldots \; \varphi_{n-1}^{n-2} \; \varphi_n^{n-1}}{(x-\alpha)^{m_2+2m_3+3m_4+\ldots\ldots+(n-1)m_n}}$$

als dasjenige Glied in $\mathfrak{J}_n$, welches mit der höchsten Potenz von $x-\alpha$ im Nenner versehen ist und setzen wir kürzehalber:

$$q = m_2 + 2m_3 + 3m_4 + \ldots\ldots + (n-2)\, m_{n-1} + (n-1)\, m_n, \tag{410}$$

so erhalten wir evident in den Coefficienten:

$$X_n, \qquad X_{n-1}, \qquad X_{n-2}, \qquad \ldots\ldots \qquad X_1, \qquad X_0,$$

als Werthe der Exponenten von $(x-\alpha)$, die den gemeinschaftlichen Nennern ihrer sämmtlichen Entwicklungsglieder zukommen, beziehungsweise die Zahlen:

$$q, \qquad q+m_n, \qquad q+m_n+m_{n-1}, \qquad \ldots\ldots \qquad q+m_n+\ldots+m_2, \quad q+m_n+\ldots+m_1.$$

Multipliziren wir jetzt in der Gleichung sämmtliche Coefficienten mit:

$$(x-\alpha)^{q+m_n+m_{n-1}+\ldots+m_1},$$

so verschwinden offenbar in derselben alle Brüche und es erhalten die successiven Coefficienten, von $X_n$ anzufangen, nach der Reihe, beziehungsweise:

$$m_n+m_{n-1}+\ldots m_1, \quad m_{n-1}+\ldots+m_1, \quad m_{n-2}+\ldots+m_1, \quad \ldots\ldots \qquad m_1, \qquad 0 \tag{411}$$

Factoren $x-\alpha$ an der Zahl, was offenbar ganz und gar in Übereinstimmung steht mit dem für die anfängliche Voraussetzung (409) geltenden Theile des bekannten Etiquette-Gesetzes.

In derselben Weise lassen sich auch alle übrigen im ersten Theile unserer Untersuchung durchgeführten Entwicklungen benützen, wenn wir uns nur immer, wie gesagt, in denselben statt $\varphi$ geschrieben denken $\frac{\varphi}{(x-\alpha)^m}$. Wird namentlich angenommen, dass unter den $m$ genannten Grössen mehre einander gleiche gegeben seien, so dass etwa:

$$+1 < m_1 < m_2 < \ldots < m_h < m_{h+1} = m_{h+2} = \ldots\ldots = m_{h+r} < m_{h+r+1} < \ldots < m_{n-1} < m_n \tag{412}$$

wäre, so kann einerseits, ganz wie S. 301 gezeigt werden, dass in einem jeden einzelnen Coefficienten jederzeit der $\mathfrak{J}$ genannte Bestandtheil über den Werth des Exponenten von $x-\alpha$ im gemeinschaftlichen Nenner sämmtlicher Entwicklungsglieder entscheide, trotz dem, dass unter der Voraussetzung (412) in den Nennern der $\mathfrak{J}$ zufällige Verringerungen der Anzahlen von Factoren $x-\alpha$ möglich sind. Derlei Verringerungen aber vermögen einzutreten:

Erstens: in Folge des Umstandes, dass $\mathfrak{F}_n$, welches zufolge (398) in allen übrigen $\mathfrak{F}$ als Factor erscheint, weniger als $q$ Factoren $x-\alpha$ in seinem Nenner enthalten kann. In der That: wäre etwa $m_{h+1}=m_{h+2}$, so kommen im Zähler der Differenz $\frac{\varphi_{h+1}-\varphi_{h+2}}{(x-\alpha)^{m_{h+1}}}$, respective in Einem Factor von $\mathfrak{F}_n$ wenigstens zwei Glieder vor, die kein $(x-\alpha)$ enthalten, und die sich sonach in speziellen Fällen aufzuheben im Stande sind. Hierdurch aber wird der Zähler jener Differenz, und sonach auch der Zähler von $\mathfrak{F}_n$ selbst durch Einen oder mehre Factoren $x-\alpha$ theilbar, was wieder, nach vorgenommener Abkürung zu einer Verkleinerung des Exponenten $q$ im Nenner von $\mathfrak{F}_n$ Veranlassung gibt;

Zweitens: in den gemeinschaftlichen Nennern der mehrgliedrigen Ausdrücke, welche in den Verthen (398) als Multiplicatoren von $\mathfrak{F}_n$ erscheinen und in deren Zählern, aus demselben eben angeührten Grunde, gelegentlich gleichfalls eine Theilbarkeit durch Einen oder mehre Factoren $x-\alpha$ enttehen kann.

Das Wegfallen von Factoren $(x-\alpha)$ in den Nennern der $\mathfrak{F}$ aus dem erstangeführten Grunde, ermag nun evident, zufolge (398), in den gemeinschaftlichen Nennern der successiven Coefficienten nur die absoluten Anzahlen solcher Factoren, nicht aber die Unterschiede dieser Anzahlen zu verändern; Aufhebungen aus der zweiterwähnten Ursache aber vermögen in Gemässheit der (405) nur in den mittleren Coefficienten der Gruppe:

$$X_{h+r}, \quad X_{h+r-1}, \quad X_{h+r-2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X_{h+2}, \quad X_{h+1}, \quad X_h$$

einzutreten, in welchem Falle dann die Coefficienten $X_{h+r-1}$, $X_{h+r-2}$ ..... $X_{h+1}$ weniger Factoren $x-\alpha$, als ihnen sonst nach der Regel zukämen, in ihren Nennern beherbergen würden. Diess gäbe nun, nach Wegschaffung aller Brüche aus der Gleichung, Veranlassung zur Entstehung von ausspringenden Winkeln, die wir bekanntlich nach unserem verallgemeinerten, §§. 8 und 15, auseinandergesetzten Etiquette-Gesetze als Zufälligkeiten zu betrachten und wegzuschneiden haben; die Polygonallinie aber, die wir hierdurch erhalten, ist eben diejenige, die wir durch Anwendung unserer geometrischen Constructionsmethode auf die gegebene Gleichung unmittelbar gewonnen hätten, wenn in dieser letzteren die zufälligen Aufhebungen der erwähnten Art nicht vorgekommen wären, und es ist daher zuletzt immer nur diese Polygonallinie, aus deren Betrachtung wir die entsprechenden, auf die Form der particulären Integrale Bezug nehmenden Folgerungen ziehen.

Wir glauben zur Genüge angedeutet zu haben, in welcher Weise die im ersten Theile unserer Untersuchungen durchgeführten Betrachtungen auf die vorliegenden anzuwenden seien, so dass wir einer detaillirten Besprechung der beiden hier noch nicht erörterten Fälle überhoben zu sein vermeinen. Es dürfte hinreichen zu bemerken, dass der nun an die Reihe kommende zweite Fall, wo:

$$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots\ldots\ldots = m_k = 1 \qquad ($$

angenommen wird, in seiner Behandlungsweise demjenigen im ersten Theile dieses Paragraphes entspreche, dem die Voraussetzung (406) zu Grunde gelegt wurde. Denn so wie an jenem Orte eine jede Summe wie $\mathfrak{S}^{(r)}$, sobald dieselbe mit einem der Stellenzeiger 1, 2, 3, ..... $k$ verknüpft erschien, lauter Entwicklungsglieder von demselben Grade $-r$ besass, so liefert hier eine jede solche Summe $\mathfrak{S}^{(r)}$

unter derselben Bedingung lauter Glieder, denen allen der Nenner $(x-\alpha)^r$ zukommen wird, so dass hier wie dort alle Glieder von $\mathfrak{S}^{(r)}$ zu berücksichtigen sind.

Endlich entspricht der dritte und letzte der zu erörternden Fälle, der nämlich, wo:

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots\ldots\ldots < m_k < 1 \tag{414}$$

angenommen wird, rücksichtlich der auf ihn anzuwendenden Betrachtungsweise, vollständig demjenigen im ersten Theile dieses Paragraphes, der von der in (407) niedergelegten Voraussetzung ausgeht, denn es ist für beide in einer jeden Summe wie $\mathfrak{S}^{(r)}$, so oft eine solche mit dem Stellenzeiger $1, 2, 3, \ldots k$ verknüpft erscheint, immer nur das letzte Entwicklungsglied, als dort den höchsten Grad, hier aber die grösste Anzahl von Factoren $x-\alpha$ im Nenner ausweisend, zu berücksichtigen.

## §. 17.

## Zusammenhang der bisherigen Lehren mit den gangbaren geometrischen Anschauungsweisen.

Unklarheit in Bezug auf den Zweck den man zu erreichen wünscht, ist bekanntlich eines der vorzüglichsten Hemmnisse der Wissenschaftsforschung sowohl, als auch des Studiums ihrer bereits aufgefundenen Lehren und der Verfasser dieses Werkes muss selbst bekennen, dass er auf dem Felde der Integration der Differentialgleichungen so lange nur geringe Fortschritte machte, als er mit dem Worte »Integriren« nur den Begriff verknüpfte des Aufsuchens einer wo möglich geschlossenen, Genüge leistenden analytischen Form, gleichgiltig ob diese mit der nöthigen Durchsichtigkeit begabt ist oder nicht. Es ist daher schon in §. 1 dieses Abschnittes gesagt worden und kann nicht genug wiederholt werden, dass man vernünftiger Weise nichts anderes wünschen könne, als das vollkommene Verständniss des inhaltreichen Lapidarstyls, den die Differentialgleichungen sprechen; dass somit das Integriren nicht Zweck sei, sondern nur Mittel zum Zwecke, und dass eine aufgefundene, die Differentialgleichung erfüllende Form desto mehr Werth habe, je durchsichtiger sie ist, je bereitwilliger sie geometrisch construirt vor das Auge des Geistes tritt und auch gelegentlich gar keinen Werth haben könne, wenn sie über die in der Differentialgleichung enthaltenen Naturgesetze gar nichts lehrt, was z. B. der Fall ist bei einigen Integralen gewisser im II. Abschnitte dieses Werkes betrachteten Differentialgleichungen und namentlich der (95), Seite 57, so dass man also wirklich integrirt haben kann, und demungeachtet zuweilen genöthigt ist, das Integral in anderer Form von neuem aufzusuchen. Wir haben nun bisher die analytische Erfahrung gemacht, dass einer Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten, oder, richtiger gesprochen, mit Coefficienten erster Klasse, particuläre Integrale von der Form $e^{\int \varphi dx}$ angehören, allwo $\varphi$ ebenfalls eine Function erster Klasse andeutet. Man wird daher hier die Frage aufwerfen: Ist diess wohl eine unserem Vorstellungsvermögen mit Leichtigkeit zugängliche Form, und wie wird man es anfangen, um hievon ein geometrisches Bild zu bekommen? Wir tragen hier nicht im Sinne die sämmtlichen geometrischen Eigenschaften aller so aussehenden Functionen des Breiten und erschöpfend zu erörtern, denn diess ist Sache des Wissenschaftsforschers in jedem speciellen Falle und zumeist schwer genug; wir beabsichtigen vielmehr hier nur oberflächlich den Zusammenhang darzuthun zwischen der

werden, als mit den Bedingungen, unter welchen die lineare Differentialgleichung zu Recht besteht, im Widerspruche stehend, man sich daher auch nicht die Mühe gibt nach dem geometrischen Bilde eines solchen unbrauchbaren particulären Integrales zu streben. Es liegt daher nahe, sich $x$ unendlich gross werdend zu denken und nach derjenigen einfachen Curve zu forschen, der sich die in Untersuchung stehende desto mehr nähert, je grösser $x$ wird, die offenbar die Rolle einer Assymptote spielt. Da nun die Functionen $\psi(x)$ und $f(x)$ der ersten Klasse angehören, so nähern sie sich, beim unendlichen Wachsen der unabhängigen Veränderlichen $x$, fortwährend einer gewissen Potenz derselben, also $\psi(x) = -ax^p$, in ähnlicher Weise $f(x) = bx^q$, so dass also die Assymptotengleichung:

$$y = e^{-ax^p} \, . \, bx^q \tag{418}$$

ist. Sie kann noch einfacher geschrieben werden, in den beiden hier denkbaren Fällen $p > 0$ und $p < 0$: da nämlich $x$ sehr gross gedacht werden muss, so geht sie im ersten Falle über in:

$$y = e^{-ax^p}, \tag{419}$$

im zweiten Falle aber, wo die Exponentielle für sehr grosse $x$ gegen die Einheit convergirt, in:

$$y = bx^q. \tag{420}$$

Es ist daher, für Werthe von $p$, welche die Nulle überschreiten und die man bekanntlich aus der Differentialgleichung selber gewinnt, als um die Einheit vermehrte Repartitionszahlen der Ansteigungen und derjenigen Abfälle, welche kleiner sind als Eins, eine exponentielle Assymptote vorhanden, für solche $p$ hingegen, die unter der Nulle, also negativ sind, tritt eine algebraische Assymptote auf, deren Beschaffenheit vom Exponenten $q$ abhängig ist. Man kann sie für $q = 1$ geradlinig, für $q > 0$ im Allgemeinen parabolisch, für $q < 0$ hingegen hyperbolisch nennen. Es drängt sich uns hier die Bemerkung auf, dass das geometrische Anschauungsvermögen sich um den Werth von $p$, wenn er negativ ist, gar nicht kümmere, sondern für die verschiedensten negativen $p$ ein und dieselbe algebraische Assymptote statuire, gerade so, wie es auch die Differentialgleichung macht, die bekanntlich gar keinen stärkeren Abfall als charakteristisch anerkennt, als den um die Einheit in der Ordnungszahl, so dass also objective und subjective Formenlehre sich hier in der schönsten Harmonie befinden, indem, was die Eine nicht beachtet auch der anderen nicht wesentlich erscheint und man mit Einem Worte sagen kann: Der Bau der Differentialgleichung in Bezug auf die Ordnungszahl der Coefficienten gebe nicht mehr und auch nicht weniger als die Assymptoten derjenigen Curven, welche die particulären Integrale darstellen.

Diese Assymptoten sind aber keineswegs alle überhaupt existirenden, es fehlen nämlich diejenigen, die den Factoren von der Form $x - \alpha$ im ersten Coefficienten entsprechen und in den particulären Integralen irgendwo als Nenner vorhandener Brüche vorkommen; sie sind sämmtlich zur Coordinatenaxe der $y$ parallele Gerade; diese also liefert die Zusammensetzung des ersten Coefficienten aus einfachen Factoren, während die anderen, früher erwähnten, aus den Ordnungszahlen sämmtlicher Coefficienten hervorgehen, so dass also die Gesammtzahl aller einer Differentialglei-

chung entsprechenden Assymptoten der ersten und der zweiten Art gleich der Ordnungszahl der Gleichung mehr der Gradzahl des ersten Coefficienten sein kann, aber, wegen der Möglichkeit solcher Factoren in demselben, deren Verschwinden kein Unendlichwerden des Integrales veranlasst, nicht sein muss. Es ist gut ein geometrisches Bild aller dieser Assymptotenformen vor Augen zu haben; die Fig. 1 der dieser Lieferung angefügten Tafel zeigt einige der parabolischen, nämlich die:

$$y = x, \qquad y^2 = px, \qquad y^3 = p^2 x, \qquad y^4 = p^3 x; \qquad ($$

ebendaselbst sind auch einige hyperbolische verzeichnet, und zwar namentlich die:

$$y = \frac{p^2}{x}, \qquad y^2 = \frac{p^3}{x}, \qquad y^3 = \frac{p^4}{x}, \qquad y^4 = \frac{p^5}{x}. \qquad ($$

Die Fig. 2 hingegen stellt einige der exponentiellen Assymptoten bildlich dar, nämlich die:

$$y = pe^{-\frac{p}{x}}, \qquad y = pe^{-\sqrt{\frac{x}{p}}}, \qquad y = pe^{-\frac{x}{p}}, \qquad y = pe^{-\frac{x^2}{p^2}}; \qquad ($$

sie sind, so zu sagen, die Ausläufer der ebenerwähnten, in der Gleichung (416) enthaltenen Gerüstcurve und dienen, wenigstens mit denjenigen ihrer Äste, die sich der Axe der $x$, oder einer in endlichem Abstande von dieser Axe befindlichen parallelen Geraden, etwa der $y=p$ fortwährend nähern, die particulären Integrale zu veranschaulichen.

Will man, zur genaueren Einsicht in die Natur eines solchen particulären Integrales und seiner Eigenschaften, nicht bloss für grosse, sondern auch für kleinere $x$ dasselbe wirklich geometrisch construiren, so fängt man am besten mit der Gerüstcurve (416) an und um diese darzustellen dienen die beiden algebraischen Curven:

$$y = \psi(x) \qquad \text{und} \qquad y = f(x).$$

Zur Verzeichnung irgend einer derselben, z. B. der ersten, sucht man zuvörderst diejenigen $x$, die der Gleichung $\psi(x) = 0$ Genüge leisten — sie sind die Abscissen der Durchnittspunkte mit der Axe der $x$; dann diejenigen, welche die Gleichung $\psi(x) = \infty$ erfüllen und zur Axe der $y$ parallele Assymptoten liefern. Eben so gibt ferner die aufgelöste Gleichung $\psi'(x) = 0$ die Orte der Maxima und Minima der Ordinaten und $\psi'(x) = \infty$ die Spitzen, ferner $\psi''(x) = 0$ die Wendepunkte u. s. w. Hat man auf diese Weise und mit den so gewonnenen geometrischen Daten diese erste Curve verzeichnet, so macht man es mit der zweiten $y=f(x)$ eben so. — Wir wollen diese Zeichnungen als fertig voraussetzen.

Aus der dargestellten krummen Linie $y=\psi(x)$ leitet man nun die Exponentielle $z=e^{\psi(x)}$ ab. was mit Hilfe der unter den Assymptoten vorkommenden $y=e^{-x}$ geschehen kann, auf folgende Weis und Punkt für Punkt: Unter der Voraussetzung, dass die Abscissen $x$ beiden Curven, der algebraische und der exponentiellen, gemeinschaftlich sind, dass man also etwa beide über derselben Abscissenax construire, wird man, um aus dem vorhandenen $y$ das $z$ abzuleiten, das $y$ abfassen und in die Curve $y=e^x$ als Abscisse auftragen; die dieser Abscisse entsprechende Ordinate ist eben das gesuchte $z$.

Nach vollendeter Verzeichnung der beiden krummen Linien $z=e^{\psi(x)}$ und $u=f(x)$ kann man zur Verzeichnung des Produktes $uz$, d. h. der Gerüstcurve übergehen. Denkt man sich die beiden

ersteren abermals über einerlei Abscissenaxe, so gehören sämmtliche Durchschnitte mit der Axe der $x$ der einen und der anderen auch zur Gerüstcurve. Eben so hat letztere auch alle verticalen Assymptoten mit den ersteren gemeinschaftlich und man wird offenbar die Ordinaten $y$ der übrigen Punkte der Gerüstcurve aus den entsprechenden und auf dieselbe Ordinatenlinie fallenden $z$ und $u$ durch folgende einfache geometrische Construction ableiten können: Von dem gemeinschaftlichen Fusspunkte der drei Ordinaten $z$, $u$, $y$ aus, trägt man auf die Axe der $x$ und zwar auf die positive Seite die Einheit des Masses und zugleich auch die Ordinate $z$ oder auch die $u$, wenn man Letzteres für besser findet, diese Ordinate jedoch nach der positiven oder negativen Seite, je nachdem sie selbst positiv ist oder negativ; den Endpunkt der aufgetragenen Einheit verbindet man mit dem Endpunkte der auf die Abscissenaxe nicht getragenen Ordinate durch eine gerade Linie und zieht zu dieser durch den Endpunkt der auf die Abscissenaxe getragenen Ordinate eine Parallele. Ihr Durchschnitt mit der gemeinschaftlichen Ordinatenlinie ist der gesuchte Punkt der Gerüstcurve.

Hat man sich auf diese Weise Punkt für Punkt die Gerüstcurve verschafft, so wird man daraus die durch den Zusatz des Factors $Cos\,\chi(x)$ entstehende wellenförmige, das eigentliche Bild des particulären Integrals darstellende krumme Linie (415) auf folgende Weise ableiten: Man construirt die Gerüstcurve nicht bloss über, sondern auch unter der Abscissenaxe, sie gewissermassen umlegend um die Drehungsaxe der $x$, d. h. man denkt sich nicht nur die Curve $y = + e^{\psi(x)} f(x)$ sondern auch die $y = - e^{\psi(x)} f(x)$ über denselben Axen verzeichnet, sucht sodann die Wurzeln der Gleichung: $Cos\,\chi(x) = 0$, oder, was dasselbe ist, der Gleichung: $\chi(x) = \frac{2r+1}{2}\pi$, unter $r$ eine beliebige ganze Zahl verstanden; es sind diess Abscissen neuer Durchschnittspunkte mit der Axe der $x$, die, der wirklichen, wellenförmigen, das particuläre Integral bildlich darstellenden krummen Linie eigenthümlich, zu jenen der Gerüstcurve noch hinzutreten, sodann verschafft man sich auch die Wurzeln der Gleichung $Cos\,\chi(x) = \pm 1$, oder auch der $\chi(x) = r\pi$ und erhält die Abscissen der Punkte, in denen die wirkliche Curve ihr oberes oder unteres Gerüste berührt, je nachdem $r$ gerade ist oder ungerade. Nach diesen erhobenen geometrischen Daten, die sich, wenn man will, durch fernere Erhebungen noch vervollständigen lassen, ergibt sich die wellenförmige Curve ohne Schwierigkeit. Der Abstand zweier nächster aus ihren Durchschnittspunkten mit der Axe der $x$, oder die Länge einer Welle hängt von dem mehr oder minder raschen Wachsthume der Function $\chi(x)$ ab — je rascher das Wachsthum, desto kürzer die Welle. Ist $\chi(x)$ eine Function von der Ordnung Null, so nähert sich die Wellenlänge bei dem unendlichen Wachsen von $x$ einer constanten Grösse, ist die Ordnungszahl von $\chi(x)$ positiv, dann kürzen sich die Wellen ins Unendliche, ist sie negativ, dann verlängern sie sich ebenfalls ins Unendliche. Gibt es einen endlichen Werth $\alpha$, für den $\chi(x) = \infty$ wird, so kürzen sich die Wellen in der Nähe von $x = \alpha$ plötzlich und so, dass die Wellenlinie eng zusammengeschoben auf- und abschreitend zwischen ihrem oberen und unteren Gerüste den ganzen Raum zu erfüllen scheint, und von dieser so gestalteten Curve biethet der Bau der Differentialgleichung in Bezug auf die Gradzahlen der Coefficienten die Assymptote, oder, bestimmter gesprochen, er biethet die Ordnungszahl derjenigen aus den drei

sie numerisch die Einheit überschreitet, und mag in diesem Falle durch die negative Einheit ersetzt werden, weil diese, wenn auch nicht die in Rede stehende Ordnungszahl, doch wenigstens die algebraische Assymptote vollkommen richtig bekundet. Sind die in angezeigter Weise ermittelten Repartitionszahlen, respective Ordnungszahlen der $\varphi$, die wir der Reihe nach mit:

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varphi_{n-1}, \quad \varphi_n$$

bezeichnen wollen, beziehungsweise und vom grössten angefangen:

$$p_1 >, \quad p_2 >, \quad p_3 >, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad p_{n-1} >, \quad p_n,$$

so trägt das allgemeine Integral die Gestalt:

$$y = C_1 e^{\int \varphi_1 dx} + C_2 e^{\int \varphi_2 dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n e^{\int \varphi_n dx} \tag{425}$$

und es repräsentirt jeder Bestandtheil desselben eine bestimmte Curve, die ihre eigene Assymptote besitzt, um die es sich hier zunächst handelt. Weil nun aber der Voraussetzung nach die $\varphi$ genannten Functionen, nach absteigenden Potenzen von $x$ geordnet, Anfangsglieder besitzen wie:

$$a_1 x^{p_1}, \quad a_2 x^{p_2}, \quad a_3 x^{p_3}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a_n x^{p_n},$$

und folglich die Werthe von $\int \varphi \, dx$ mit Gliedern anheben wie:

$$b_1 x^{p_1+1}, \quad b_2 x^{p_2+1}, \quad b_3 x^{p_3+1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad b_n x^{p_n+1},$$

und diess zwar mit alleiniger Ausnahme des unter den Repartitionszahlen meist vorfindigen Werthes $-1$, für den offenbar ein Logarithmus an die Stelle der $(p+1)^{\text{ten}}$ Potenz tritt, so sind die Gleichungen der gesuchten Assymptoten enthalten in folgender einzigen:

$$y = C_1 e^{b_1 x^{p_1+1}}, \quad C_2 e^{b_2 x^{p_2+1}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C_n e^{b_n x^{p_n+1}}; \tag{426}$$

unter ihnen gestalten sich diejenigen, für welche $p$ von der negativen Einheit verschieden ist, exponentiell, die anderen, wo $p = -1$ ausgefallen oder angenommen worden ist, algebraisch und zwar, nach Massgabe der Umstände, geradlinig, parabolisch oder hyperbolisch. Die Werthe der Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ haben wir zwar noch nicht aufzufinden gelehrt, bemerken aber hier, dass sie in der Regel Wurzeln seien einer höheren algebraischen Gleichung, welche Gleichung man, ohne Rechnung, aus der blossen Ansicht der Differentialgleichung unmittelbar aufschreibt. Der nächste, IV. Abschnitt bringt hierüber das Nähere.

Nach der Ermittlung der Assymptoten kann man zur vollständigen **Integration der Differentialgleichung** auf doppeltem Wege schreiten, nämlich: man benützt entweder die **Assymptote als Unterscheidungszeichen** und fordert der Analysis dasjenige particuläre **Integral ab, welches eben diese bestimmte Assymptote besitzt**, oder man sucht die algebraische Gleichung, welche die Wurzeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ hat. Von dieser algebraischen Gleichung ist uns aber bisher nur erst Folgendes bekannt:

Erstens: Das den Coefficientenbau umspannende Polygon ist dasselbe wie bei der Differentialgleichung, oder, mit anderen Worten, die Repartitionszahlen $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ haben hier und dort einerlei Werth, diess jedoch mit Ausnahme derjenigen, welche unter die negative Einheit fallen;

Zweitens: die Glieder höchsten Grades nach $x$ sind in beiden Gleichungen dieselben und

Drittens: die ersten Coefficienten in beiden Gleichungen haben gewisse Factoren und vorzugsweise die wiederholten gemeinschaftlich. Da diese aber hier und dort in verschiedener Anzahl vorkommen können, da ferner jede der beiden Gleichungen ihr eigenthümliche enthalten kann, so ist man doch nicht im Stande aus dem ersten Coefficienten der Einen jenen der Anderen unmittelbar abzuleiten. Gleichwohl soll im fünften Abschnitte eine Methode beigebracht werden, die Differentialgleichungen auf diesem Wege zu integriren und zwar, wenn möglich, mit geschlossenen Coefficienten — wir wollen dieselbe weiter unten durch einige praktische Bemerkungen vorbereiten. Wir können aber auch den Coefficientenbau der Differentialgleichung, in Bezug auf die Zusammensetzung aus einfachen Factoren von der Form $x-\alpha$, ins Auge fassen und zur Integration derselben auf Grundlage dieses Baues schreiten; nachdem wir wissen, dass jedesmal der erste und, bei vorkommender Wiederholung, auch die folgenden Coefficienten alle diejenigen Factoren $x-\alpha$ in sich enthalten, bei deren Verschwinden ein Unendlichwerden, eine Unterbrechung der Stetigkeit, ja oft sogar ein Nullwerden des particulären Integrales oder eines seiner Differentialquotienten stattfindet, so können wir fragen: Welches ist dasjenige particuläre Integral, das unendlich oder unstetig wird für $x=\alpha$, oder für $x=\beta$, wenn $x-\alpha$, $x-\beta$, ..... im ersten Coefficienten vorkommende Factoren sind? Offenbar frägt man hier wieder nach Assymptoten, die jedoch geradlinig und der Axe der $y$ parallel sind. Die Integration der Gleichung in diesem Sinne lässt sich auf folgende Weise vorbereiten: Man zählt die Factoren $x-\alpha$, die in den successiven Coefficienten der Differentialgleichung, vom ersten angefangen, vorhanden sind und forscht, gegen den letzten zuschreitend, nach dem grössten auf das Coefficientenpaar entfallenden Abfalle in der Anzahl dieser Factoren und dem Coefficienten, bis zu welchem er stattfindet. Von diesem angefangen nach dem nächstniedrigeren Abfalle und dem Coefficienten, bis zu welchem er stattfindet u. s. w., repartirt ferner diese Abfälle auf die einzelnen Coefficientenpaare, so, dass man eine Reihe von in absteigender Ordnung aneinandergereihten Repartitionszahlen:

$$m_1 >, \quad m_2 >, \quad m_3 >, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad m_{r-1} >, \quad m_r$$

gewinnt, die so lange ganz verlässlich sind, als sie die positive Einheit überschreiten und sogar für $m=1$ in einem gewissen Sinne noch ihre Verlässlichkeit behaupten — andere Werthe von $m$ haben wegzubleiben, und aus diesen Erhebungen schliesst man jetzt auf eine vorhandene Gruppe von particulären Integralen $r$ an der Zahl, wie folgt:

$$y = D_1\, e^{\int \frac{\psi_1 dx}{(x-\alpha)^{m_1}}}, \quad D_2\, e^{\int \frac{\psi_2 dx}{(x-\alpha)^{m_2}}}, \quad \ldots\ldots, \quad D_r\, e^{\int \frac{\psi_r dx}{(x-\alpha)^{m_r}}}.$$

Von diesen könnte man sich allenfalls die Gleichung befreit denken, dadurch auf die $(n-r)^{te}$ Ordnung

herabgesetzt und integrirt. Es seien $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots\ldots y_n$ die ihr Genüge leistenden Werthe, die für $x=\alpha$ nicht mehr unendlich werden, so erscheint das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung auch noch in folgender anderen Gestalt:

$$(427)\qquad y = D_1\, e^{\int \frac{\psi_1 dx}{(x-\alpha)^{m_1}}} + D_2\, e^{\int \frac{\psi_2 dx}{(x-\alpha)^{m_2}}} + \ldots\ldots + D_r\, e^{\int \frac{\psi\, dx}{(x-\alpha)^{m_r}}} + \\ + D_{r+1}\, y_{r+1} + D_{r+2}\, y_{r+2} + \ldots\ldots + D_n\, y_n.$$

Man könnte aber auch das den Coefficientenbau aus Factoren $x-\beta$ umspannende Polygon der Integration zu Grunde legen und würde das allgemeine Integral erhalten in der folgenden, ähnlichen Gestalt:

$$(428)\qquad y = E_1\, e^{\int \frac{\chi_1 dx}{(x-\beta)^{\mu_1}}} + E_2\, e^{\int \frac{\chi_2 dx}{(x-\beta)^{\mu_2}}} + \ldots\ldots + E_s\, e^{\int \frac{\chi_s dx}{(x-\beta)^{\mu_s}}} + \\ + E_{s+1}\, \eta_{s+1} + E_{s+2}\, \eta_{s+2} + \ldots\ldots + E_n\, \eta_n$$

u. s. w. Jeder Werth 1 des Exponenten $m$ oder $\mu$ gibt Veranlassung zu einem Divisor $(x-\alpha)^k$ des betreffenden particulären Integrals und zugleich verschwindet aus dem Exponenten der Exponentielle das $x-\alpha$ oder $x-\beta$ ganz. Grösseren Werthen von $m$ oder $\mu$ gehören wohl auch solche Divisoren an, nur mit dem Unterschiede, dass $x-\alpha$ oder $x-\beta$ im Exponenten bleibt.

Welcher Zusammenhang besteht denn jetzt zwischen den verschiedenen Formen des allgemeinen Integrales (425), (427) und (428)? ist wohl die natürlichste, nächste und wichtigste Frage, die sich hier stellen lässt und die vermuthlich der angehende Wissenschaftsforscher noch etwas bestimmter formuliren wird. Er wird nämlich die erste und auch ohne Widerrede nützlichste dieser drei Formen speziell ins Auge fassen, fragend: Welche der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ hat denn den Divisor $(x-\alpha)^{m_1}$? und es ist keinem Zweifel unterworfen, dass, wenn man die Divisoren unter die $\varphi$ nach einer bestimmten Regel so recht hübsch vertheilen könnte, diess kein unbedeutender Schritt zu nennen wäre zur Kenntniss des Integrales. Dem ist aber nicht so. Bei den algebraischen Gleichungen gehört nämlich ein ermittelter Factor oder Divisor wohl in der Regel einer bestimmten Wurzel an, welcher? — bestimmen die Werthe der constanten, in der Gleichung vorhandenen Parameter, so dass, wenn man diese letzteren unbestimmt lässt, es in der Regel auch unentschieden bleibt, welche Wurzel für $x=\alpha$ unendlich werde, indem der Divisor $x-\alpha$, bei vorgenommener Änderung dieser Parameter zwar von einer Wurzel zur anderen wandern kann, aber für bestimmte Werthe derselben immer nur einer einzigen bestimmten Wurzel angehört. Bei den Differentialgleichungen dagegen kann man Ähnliches höchst selten von den particulären Integralen behaupten; hier besitzen die Divisoren $x-\alpha$ nebst der eben zur Sprache gebrachten Freizügigkeit noch andere in dem Umstande ihre Erklärung findende Freiheiten, dass das allgemeine Integral auf unendlich viele verschiedene Arten geschrieben werden kann; wir können nämlich nur folgende Grundregel aufstellen:

Wenn man mehrere Gruppen von particulären Integralen, je $n$ an der Zahl, hat, aus denen das allgemeine zusammengesetzt ist, so lassen sich die einzelnen Glieder einer jeden Gruppe, aus den einzelnen Gliedern einer jeden

anderen durch Multiplication mit bestimmten Constanten, die auch Functionen constanter Parameter sein können, und Addition ableiten. — Wir haben z. B.:

$$e^{\int \frac{\psi_1 dx}{(x-\alpha)^{m_1}}} = c_1 e^{\int \varphi_1 dx} + c_2 e^{\int \varphi_2 dx} + \ldots\ldots + c_n e^{\int \varphi_n dx}; \tag{429}$$

unter $c_1, c_2, \ldots c_n$ werden hier keine willkürlichen, sondern bestimmte constante Coefficienten verstanden, die im Allgemeinen Functionen sind der in der Differentialgleichung vorkommenden constanten Parameter und es lässt sich nicht sagen, zu welchem $\varphi$ ein bestimmter Divisor gehöre; er gehört, je nach Umständen, zu Einem, zu zweien, sogar zu allen. Da hier Beispiele am meisten geeignet sind Klarheit über den Gegenstand zu verbreiten, so kehren wir zur Gleichung (161), Seite 79, des II. Abschnittes zurück:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - a\frac{dy}{dx} - b^2 x . y = 0, \tag{430}$$

deren allgemeines Integral alldort unter anderen zufolge (165) enthalten ist in folgender Form:

$$\begin{aligned} y = \quad & G_1 e^{bx}\left\{x^{\frac{a}{2}} - \frac{a(a+2)}{2^2 b} x^{\frac{a}{2}-1} + \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)}{2.2^4 b^2} x^{\frac{a}{2}-2} - \ldots\ldots\right\} \\ & + G_2 e^{-bx}\left\{x^{\frac{a}{2}} + \frac{a(a+2)}{2^2 b} x^{\frac{a}{2}-1} + \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)}{2.2^4 b^2} x^{\frac{a}{2}-2} + \ldots\ldots\right\}. \end{aligned} \tag{431}$$

Der Factor $x$ im ersten Coefficienten deutet, kraft unserer Formenlehre, auf Ein particuläres Integral mit dem Nenner $x^k$; der Werth von $k$, der bekanntlich allgemein aus folgender Gleichung hervorgeht:

$$k = \frac{X_{n-1}}{X_n}(x-\alpha)\Big\}_\alpha - (n-1),$$

in der jetzt, $n=2$, $\alpha=0$, $X_{n-1}=-a$, $X_n=x$ gesetzt werden muss, um zu erhalten:

$$k = -a - 1, \tag{432}$$

deutet auf Ein vorhandenes particuläres Integral mit dem Factor $x^{a+1}$. Wenn man nun frägt, bei welchem der beiden particulären Integrale (431), bei dem mit der Exponentielle $e^{bx}$, oder mit der $e^{-bx}$ der genannte Factor erscheine, so lehrt die Ansicht: bei gar keinem. Gleichwohl hat die Differentialgleichung in ihrer Behauptung Recht, dass es Ein der Potenz $x^{a+1}$ proportionales particuläres Integral und auch nur ein einziges gebe. Diess wird aber aus den beiden in der Formel (431) ersichtlichen assymptotischen Integralen durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition zusammengesetzt. Wir wollen diess, der Einfachheit wegen, nur für den speziellen Fall $a=2$ darthun, d. h. für die Gleichung:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - b^2 xy = 0, \tag{433}$$

deren zwei particuläre Integrale die folgenden sind:

$$G_1 y_1 = G_1 e^{bx}\left(x - \frac{1}{b}\right), \qquad G_2 y_2 = G_2 e^{-bx}\left(x + \frac{1}{b}\right) \tag{434}$$

Nun, der der Potenz $x^3$ proportionale, Genüge leistende Ausdruck ist weder $y_1$ noch $y_2$, wohl aber $y_1+y_2$. Hievon überzeugt man sich leicht durch Entwicklung der in $y_1$ und $y_2$ erscheinenden Exponentialgrössen in Reihen, aus der sich:

$$y_1 + y_2 = x^3 \left[\frac{2b^3}{3} + \frac{b^5}{15} x^2 + \frac{b^6}{420} x^4 + \ldots\ldots\right]$$

ergibt. Um ein anderes eben so einfaches Beispiel zu haben, setzen wir $a=-2$ voraus, so dass es sich jetzt um die Gleichung:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - b^2 xy = 0 \tag{435}$$

handelt, deren Integral:

$$y = \frac{G_1}{x} e^{bx} + \frac{G_2}{x} e^{-bx} \tag{436}$$

ist. Hier soll $k=1$ sein. Es wäre demnach ein einziges particuläres Integral vorhanden mit dem Divisor $x$. Fragen wir hier, welcher Exponentielle, ob der $e^{bx}$ oder der $e^{-bx}$ dieser Divisor $x$ angehöre, so belehrt uns der Augenschein, dass beiden und doch ist nur ein einziges particuläres Integral vorhanden, welches für $x=0$ unendlich wird. Es leistet nämlich der Differentialgleichung (435) offenbar auch folgender Ausdruck Genüge:

$$y = H_1 \frac{e^{bx} + e^{-bx}}{x} + H_2 \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{x}, \tag{437}$$

wo $H_1$ und $H_2$ willkürliche Constanten bedeuten. Nur der erste Bestandtheil wird unendlich für $x=0$, der zweite behält einen endlichen Werth. Es könnte hier im ersten Augenblicke befremdend auffallen, dass zwei particuläre Integrale, jedes mit $x$ im Nenner, nämlich $\frac{G_1}{x} e^{bx}$ und $\frac{G_2}{x} e^{-bx}$ Einer Differentialgleichung angehören können mit dem Factor $x$ im ersten Coefficienten, während, nach den Ergebnissen unserer Formenlehre, die Einführung zweier solcher particulären Integrale in Eine Gleichung im ersten und zweiten Coefficienten beziehungsweise die Factoren $x^2$ und $x$ zur Folge haben sollte. Letzteres ist auch allgemein richtig und leidet nur eine Ausnahme im vorliegenden Falle, weil in beiden particulären Integralen der (435) derselbe für $x=0$ unendlich werdende und für sich Genüge leistende Bestandtheil, d. h. $\frac{1}{x}(e^{bx}+e^{-bx})$ vorkömmt und es ist ganz klar, dass wenn man in die Gleichung (435) noch ein drittes eben so zusammengesetztes particuläres Integral:

$$y = C\left[y_2 + \frac{h}{x}(e^{bx}+e^{-bx})\right] \tag{438}$$

einführen würde, wo $y_2$ eine für $x=0$ nicht unendlich werdende Function andeutet, das Einführungsresultat kein anderes sein könnte als das dem $y=Cy_2$ Entsprechende, weil:

$$y = \frac{Ch}{x}(e^{bx} + e^{-bx})$$

ein der Gleichung (435) für sich Genüge leistender Werth ist, woraus folgt, dass diese Einführung des particulären Integrals (438) eben so wenig einen neuen Factor $x$ in den ersten Coefficienten zu werfen ver-

mag, als die Einführung von $y = Cy_2$, und so wird man in beliebiger Anzahl für $x = 0$ unendlich werdende particuläre Integrale einführen können, ohne in der Wesenheit und nach dem Zeugnisse der Differentialgleichung deren mehr zu besitzen als Eines. Diese sehr einfachen Beispiele belehren uns nun zu Genüge, dass man, die Form (425) im Auge habend, nicht fragen könne, zu welcher der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ ein gewisser Divisor $x - \alpha$ gehöre. Ist nämlich $\alpha$ ein Nullmachender Werth, so ist die natürliche Antwort: »vermuthlich zu gar keiner;« ist's ein Unendlichmachender, so dient zur Antwort: »zu einer, zu mehreren, vielleicht zu allen — wie's kömmt.« Die richtige Fragestellung aber ist folgende: Welcher ist der in Einem, einigen oder allen particulären Integralen der Formel (425) enthaltene, für sich Genüge leistende, gelegentlich allen gemeinschaftliche, für $x = \alpha$ Null, oder Unendlich, oder unstetig werdende Bestandtheil?

Ungemein belehrend dürfte es an dieser Stelle sein, und der Leser möge es daher nicht unterlassen, zurückzukehren zu §. 8 dieses Abschnittes, und nach den dort, S. 181, entwickelten Vorschriften, die Einführung der beiden particulären Integrale: $\frac{G_1}{x} e^{bx}$ und $\frac{G_2}{x} e^{-bx}$ vorzunehmen. Die Differentialgleichung der ersten Ordnung, welcher das erste von ihnen Genüge leistet, ist offenbar:

$$x \frac{dy}{dx} - (bx - 1)\, y = 0. \tag{439}$$

Führen wir nun, um zu sehen wie es komme, dass der erste Coefficient der (435) nur $x$ in der ersten Potenz hat, das zweite ein, so gelangen wir zum Substitutionsresultate, das an der obangedeuteten Stelle mit $P_1$ bezeichnet ist:

$$P_1 = -2bx \,.\, e^{\int -\left(b + \frac{1}{x}\right) dx}. \tag{440}$$

Dieser Werth mit dem allgemeinen, an demselben Orte durch die Formel:

$$P_1 = e^{\int \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m} dx} \frac{R}{(x-\alpha)^\mu} \tag{441}$$

gegebenen verglichen, zeigt, dass, gegenwärtig und in dem vorliegenden speziellen Beispiele:

$$\varphi(x) = -(bx + 1), \quad \alpha = 0, \quad m = 1, \quad \mu = -1, \quad R = -2b \tag{442}$$

sei, man sohin:

$$\frac{P_1'}{P_1} = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m} + \frac{R'}{R} - \frac{\mu}{x-\alpha} = -\frac{bx+1}{x} + \frac{1}{x} = -b = \frac{M}{N} \tag{443}$$

habe, woraus dann unmittelbar die Differentialgleichung (435) vermittelst der (12) des §. 2 hervorgeht. Hiemit ist aber das Räthsel gelöst: das eingeführte zweite, obgleich auch für $x = 0$ unendlich werdende particuläre Integral, wirft keinen neuen Factor $x$ in den ersten Coefficienten, weil der aus $\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m}$ auszusondernde Partialbruch mit dem Nenner $(x - \alpha)$, hier $-\frac{1}{x}$ gerade der $\frac{\mu}{x-\alpha}$ ist — und jetzt wird man sich den analytischen Gang der Einführung der zwei, in (431) in der Form von unendlichen

Reihen erscheinenden particulären Integrale schon ohne Mühe vorstellen können. Es wird nämlich bei Einführung des zweiten particulären Integrals das Substitutionsresultat eine besondere Abkürzungsfähigkeit: Divisibilität von Zähler und Nenner durch mehrere Factoren $x-\alpha$ zeigen, in Folge deren das sonst positive $\mu$ sich in ein negatives verwandelt, und von dem numerisch gleichen und mit entgegengesetzten Zeichen behafteten Zähler des zu $\frac{\varphi(x)}{x-\alpha}$ gehörigen Partialbruches aufgehoben wird. Man wird hiebei nicht umhin können die Bemerkung anzuknüpfen, dass eine solche Tilgung jedweder Spur von $x-\alpha$ in der Gleichung (443) nur dann stattfinden kann, wenn $m=1$ ist, dass somit für Werthe von $m$, welche die Einheit überschreiten, ein abweichendes Verhalten eintreten könne. Diess steht mit dem analytischen Umstande in Verbindung, dass, wenn man $m=1$ hat, und wenn diess zu einem Divisor $(x-\alpha)^k$ des particulären Integrales Veranlassung gibt, in Folge dessen dasselbe unendlich wird für $x=\alpha$, der unendlich werdende Theil als geschlossener, algebraischer und gebrochener Ausdruck davon abgesondert werden kann, so zwar, dass der Rest, welcher nach Abzug dieses unendlich werdenden Theiles vom particulären Integrale zurückbleibt, nicht mehr unendlich wird für $x=\alpha$ — ein Umstand, der nicht mehr vorhanden ist, wenn $m$ von der Einheit verschieden ausfällt. In der That: Nehmen wir an, um diesen zwar längst bekannten und schon von Cauchy in den *Exercices de mathématique* und namentlich in seinem *Calcul des résidus* erschöpfend zur Sprache gebrachten und auch zur Zerlegung gebrochener Functionen in Partialbrüche benutzten, hier aber sehr wichtigen analytischen Umstand klar vor Augen zu haben, Ein particuläres Integral erscheine unter der Form: $\frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^k}$, allwo $\psi(x)$ eine beliebige, wenn man will auch transcendente Function von $x$ sein kann, begabt nur mit der Eigenschaft für $x=\alpha$ stetig zu bleiben, und sohin entwickelbar zu sein vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$. Ist nun $k$ reell und positiv, und bezeichnet man mit $h$ die kleinste derjenigen ganzen positiven Zahlen, welche $k$ dem Werthe nach überschreiten, oder das $k$ selbst, falls es eine ganze Zahl wäre, so hat man, kraft der erwähnten Mac-Laurin'schen Formel:

$$(444)\quad \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^k}=\frac{\psi(\alpha)}{(x-\alpha)^k}+\frac{\psi'(\alpha)}{(x-\alpha)^{k-1}}+\cdots+\frac{\psi^{(h-1)}(\alpha)}{(h-1)!(x-\alpha)^{k-h+1}}+\frac{\psi^{(h)}\big(\alpha+\theta(x-\alpha)\big)}{h!}(x-\alpha)^{h-k},$$

und überzeugt sich durch den unmittelbaren Anblick, dass es möglich sei, von den in Rede stehenden, für $x=\alpha$ unendlich werdenden particulären Integralen eine Reihe von algebraischen Brüchen, $h$ an der Zahl, nämlich die:

$$(445)\quad \frac{\psi(\alpha)}{(x-\alpha)^k}+\frac{\psi'(\alpha)}{(x-\alpha)^{k-1}}+\frac{\psi''(\alpha)}{2(x-\alpha)^{k-2}}+\cdots\cdots+\frac{\psi^{(h-1)}(\alpha)}{(h-1)!(x-\alpha)^{k-h+1}}$$

zu subtrahiren, so dass der Rest, d. h. das Ergänzungsglied:

$$(446)\quad \frac{\psi^{(h)}\big(\alpha+\theta(x-\alpha)\big)}{h!}(x-\alpha)^{h-k},$$

welches eine Function von $x$ ist, die die algebraische oder transcendente Beschaffenheit mit $\psi(x)$ theilt, nicht mehr unendlich wird für $x=\alpha$, man also eben die vorliegende Summe (445) algebraischer Brüche als den in der gelegentlich transcendenten Function $\frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^k}$ unendlich werdenden summanden Theil

anzusehen hat. Man findet keine Schwierigkeit das Ähnliche auch von imaginären Werthen von $k$, die ihrer Natur nach paarweise vorhanden sein müssen, nachzuweisen.

Besitzt man nun nicht Eines, sondern mehre particuläre Integrale, mit einem Nenner $(x-\alpha)^k$, während die Differentialgleichung durch einen einzigen, im ersten Coefficienten vorhandenen Factor $x-\alpha$ auch nur einen einzigen, Genüge leistenden und für $x=\alpha$ unendlich werdenden Werth bekundet, so geht dem Gesagten nach, dieser letzterwähnte Werth als aggregativer Bestandtheil in alle erstgenannten particulären Integrale mit dem gemeinschaftlichen Nenner $(x-\alpha)^k$ ein. Aus ihnen allen wird sich der unendlich werdende Theil in Form einer Summe von algebraischen Brüchen $h$ an der Zahl sondern lassen, und es müssen offenbar alle so gesonderten Summen, respective unendlich werdenden Bestandtheile bis auf einen constanten Factor identisch dieselben sein. Erscheint daher unter den gemachten Voraussetzungen das assymptotische allgemeine Integral etwa unter der Form:

$$y=\frac{C_1\psi_1(x)}{(x-\alpha)^k}+\frac{C_2\psi_2(x)}{(x-\alpha)^k}+\ldots\ldots+\frac{C_{n-1}\psi_{n-1}(x)}{(x-\alpha)^k}+\frac{C_n\psi_n(x)}{(x-\alpha)^k}, \tag{447}$$

so können sich die für $x=\alpha$ unendlich werdenden Bestandtheile seiner verschiedenen Glieder, d. h. die algebraischen Summen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\psi_1(\alpha)}{(x-\alpha)^k}+\frac{\psi'_1(\alpha)}{(x-\alpha)^{k-1}}+\frac{\psi''_1(\alpha)}{2(x-\alpha)^{k-2}}+\ldots\ldots+\frac{\psi_1^{(h-1)}(\alpha)}{(h-1)!(x-\alpha)^{k-h+1}}\\
&\frac{\psi_2(\alpha)}{(x-\alpha)^k}+\frac{\psi'_2(\alpha)}{(x-\alpha)^{k-1}}+\frac{\psi''_2(\alpha)}{2(x-\alpha)^{k-2}}+\ldots\ldots+\frac{\psi_2^{(h-1)}(\alpha)}{(h-1)!(x-\alpha)^{k-h+1}}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\psi_n(\alpha)}{(x-\alpha)^k}+\frac{\psi'_n(\alpha)}{(x-\alpha)^{k-1}}+\frac{\psi''_n(\alpha)}{2(x-\alpha)^{k-2}}+\ldots\ldots+\frac{\psi_n^{(h-1)}(\alpha)}{(h-1)!(x-\alpha)^{k-h+1}}
\end{aligned} \tag{448}$$

nur in constanten Factoren unterscheiden — ein Unterschied, den man auch ganz in die Integrationsconstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ zu werfen berechtigt ist, wodurch die vor Augen liegenden Summen in das Verhältniss der Identität treten und man somit zwischen den Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ folgende Relations-Gleichungen gewinnt:

$$\begin{aligned}
\psi_1(\alpha)&=\psi_2(\alpha)=\ldots\ldots\ldots=\psi_n(\alpha)\\
\psi'_1(\alpha)&=\psi'_2(\alpha)=\ldots\ldots\ldots=\psi'_n(\alpha)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\psi_1^{(h-1)}(\alpha)&=\psi_2^{(h-1)}(\alpha)=\ldots\ldots\ldots=\psi_n^{(h-1)}(\alpha)
\end{aligned} \tag{449}$$

d. h., wenn der erste Coefficient der Differentialgleichung nur Einen Factor $(x-\alpha)$ besitzt, so können demungeachtet mehrere, ja alle assymptotischen particulären Integrale einen gemeinschaftlichen Divisor $(x-\alpha)^k$ ausweisen, nur müssen dann die zu diesem gemeinschaftlichen Nenner gehörigen Zähler — wir meinen die Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ die ersten Differentialquotienten, vom 0ten angefangen $h$ an der Zahl, für den speziellen Werth $x=\alpha$ gemeinschaftlich besitzen. Ganz anders verhält sich die Sache,

wenn ein particuläres Integral in der Form $e^{\int\frac{\varphi . dx}{(x-\alpha)^m}}$ erscheint und wenn $m$ die Einheit überschreitet: auch dieses wird nämlich für $x=\alpha$ unendlich werden können, man wird aber nicht im Stande sein, den aggregativen unendlich werdenden Bestandtheil zu sondern, weil, wie wir noch etwas später zu zeigen gedenken, dieser Fall auf den unmittelbar früher betrachteten zurückgeführt $h=\infty$ und somit eine vollkommene Identität der $\psi$ genannten Functionen voraussetzen würde.

Wir wollen unsere beiden einfachen Beispiele noch nicht verlassen, ohne den entsprechenden Nutzen in Bezug auf einen anderen Weg des Integrirens daraus gezogen zu haben: die Aufstellung nämlich der algebraischen Gleichung, die der differentialen zu Grunde liegt und die Wurzeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ besitzt. Wir bringen zu diesem Zwecke die vier Functionen, respective particulären Integrale:

$$e^{bx}\left(x-\frac{1}{b}\right), \qquad e^{-bx}\left(x+\frac{1}{b}\right), \qquad \frac{1}{x}e^{bx}, \qquad \frac{1}{x}e^{-bx} \tag{450}$$

auf die Form $e^{\int\varphi dx}$, wodurch sie bezüglich den vier Ausdrücken:

$$e^{\int\frac{b^2x\,dx}{bx-1}}, \qquad e^{\int-\frac{b^2x\,dx}{bx+1}}, \qquad e^{\int\frac{dx}{x}(bx-1)}, \qquad e^{\int-\frac{dx}{x}(bx+1)} \tag{451}$$

identisch gleichwerden, und sehen sohin, dass für die Gleichung (433):

$$\varphi_1=\frac{b^2x}{bx-1}, \qquad \varphi_2=-\frac{b^2x}{bx+1} \tag{452}$$

sei, somit die algebraische Gleichung in $\varphi$, welche die Wurzeln $\varphi_1$ und $\varphi_2$ hat, nämlich:

$$\varphi^2-(\varphi_1+\varphi_2)\,\varphi+\varphi_1\,\varphi_2=0,$$

d. h. diejenige, die der differentialen (433) zu Grunde liegt, in entwickelter Form:

$$(b^2x^2-1)\,\varphi^2-2b^3x\,.\,\varphi-b^4x^2=0 \tag{453}$$

heisse. Vergleicht man sie mit der Differentialgleichung, so gewahrt man alsobald dasselbe den Coefficientenbau umspannende Polygon in beiden; selbst die Glieder höchsten Grades nach $x$ sind beiderseits dieselben. In den Factoren jedoch des ersten Coefficienten ist keine Übereinstimmung ersichtlich. Der Factor $x$ der Differentialgleichung ist in der algebraischen nicht vorhanden. Die Ursache hievon lässt sich angeben: es ist nämlich $x$ kein Unendlich-, sondern ein Null-machender Werth, und das ihm entsprechende $k$ eine bestimmte, ganze Zahl. Ferner hat die algebraische ein Paar Factoren im ersten Coefficienten, nämlich $bx-1$ und $bx+1$, die offenbar darum vorhanden sind, weil sie sich in den Nennern der beiden Wurzeln befinden. In der Differentialgleichung sieht man von ihnen keine Spur. Die Ursache lässt sich abermals angeben: das ihnen entsprechende $k$ ist nämlich gleich der negativen Einheit, also ganz, negativ und numerisch kleiner als die Ordnungszahl der Gleichung, und wir wissen, dass die Differentialgleichung sich nicht für verbunden halte Factoren wie $(x-\alpha)^h$ der particulären Integrale durch den Coefficientenbau zu verrathen, wenn $h$ eine ganze positive Zahl ist, die die Ordnungszahl der Gleichung nicht erreicht.

Wenden wir uns jetzt zur (435); für sie ist:

$$\varphi_1 = \frac{bx-1}{x}, \qquad \varphi_2 = -\frac{bx+1}{x}, \tag{454}$$

also die ihr entsprechende algebraische, mit den Wurzeln $\varphi_1$ und $\varphi_2$:

$$x^2.\varphi^2 + 2x.\varphi - (b^2x^2 - 1) = 0. \tag{455}$$

Hier verhält sich die Sache anders. Das den Coefficientenbau in Bezug auf die Ordnungszahlen umspannende Polygon ist gemeinschaftlich, aber auch in den Factoren der ersten Coefficienten stimmen die Gleichungen überein. Die Ursache liegt auf der Hand: $x=0$ ist nämlich ein unendlich machender Werth, den sowohl die algebraische, als auch die Differentialgleichung nothwendig anzeigen muss, nur mit dem Unterschiede, dass, im ersten und zweiten Coefficienten der ersteren, Factoren $x$ beziehungsweise Zwei und Einer an der Zahl vorhanden sind, letztere aber nur Einen solchen im ersten Coefficienten besitzt, was einfach daher rührt, dass erstere zwei unendlich werdende Wurzeln, letztere aber nur Ein unendlich werdendes particuläres Integral anzudeuten hat.

Um die angeführten einfachen Beispiele zu erschöpfen, machen wir endlich noch darauf aufmerksam, dass die Gleichung (435) auch durch bestimmte Integrale im zweiten Abschnitte integrirt worden sei, und namentlich ist es die Formel (61), Seite 49, die, für den speziellen Werth $a=2$ hingeschrieben, das Integral gibt in folgender Form:

$$y = C_1 \int_{-b}^{+b} e^{ux}\, du + C_2 \int_{b}^{\infty} e^{-u\sqrt{x^2}}\, du$$

oder, was dasselbe ist:

$$y = C_1 \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{x} + C_2 \frac{e^{-bx}}{x}. \tag{456}$$

Das sind nun aber offenbar wieder die der Gleichung (435) angehörigen assymptotischen particulären Integrale, aber wieder anders gruppirt, nämlich weder so wie in (436), noch so wie in (437). Das für $x=0$ unendlich Werdende derselben ist von dem anderen verschieden und wir ziehen hieraus den Schluss, dass **jede andere Methode des Integrirens in der Regel auch zu einer anderen Form des Integrales führen wird**, insoferne wenigstens, als man andere stets und andere Gruppen derselben particulären Werthe erhält.

Diese, wiewohl sehr einfachen Betrachtungen werfen auf den Gegenstand kein unbedeutendes Licht. Sie belehren uns nämlich, dass man, bei der Integration einer beliebigen Differentialgleichung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, z. B. der (424), verschiedene Wege gehen könne, indem man andere stets und andere aus der Gleichung selbst ersichtliche Eigenschaften der particulären Integrale zu Grunde legt, einmal nämlich das Verhalten derselben für sehr grosse Werthe von $x$, was zu der in den meisten Fällen wichtigsten, nämlich der hier so genannten assymptotischen Form führt, ein andermal das Verhalten derselben für bestimmte endliche Werthe von $x$, die die particulären Integrale entweder gleich Unendlich oder gleich Null machen, oder bei welchen eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt. Ein jeder solcher

Werth kann angesehen werden als eine eigene Gruppe gebend und das allgemeine Integral in einer anderen Form liefernd, und man muss es als einen zwar möglichen, jedoch speziellen und selten vorkommenden Fall erklären, wenn Ein Glied der einen Gruppe irgend Einem Gliede der anderen Gruppe identisch gleich ist. Wenn man daher frägt: welche der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ in (425) den Nenner $(x-\alpha)$ trage, daher unendlich werde für $x=\alpha$, so dient zur Antwort: ein jedes beliebige der dort vorkommenden particulären Integrale wird aus den in der Gleichung (427) vorkommenden zusammengesetzt durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition. Es ist also:

$$
(457) \qquad e^{\int \varphi_\rho dx} = g_1 . e^{\int \frac{\psi_1 dx}{(x-\alpha)^{m_1}}} + g_2 . e^{\int \frac{\psi_2 dx}{(x-\alpha)^{m_2}}} + \ldots\ldots + g_r . e^{\int \frac{\psi_r dx}{(x-\alpha)^{m_r}}}
$$
$$
+ g_{r+1}\, y_{r+1} + g_{r+2}\, y_{r+2} + \ldots\ldots + g_n\, y_n
$$

wo $g_1, g_2, \ldots g_n$ bestimmte Constanten sind, die gelegentlich auch Null werden können, im Allgemeinen aber als Functionen der constanten Parameter dastehen, die in der Differentialgleichung erscheinen. Hieraus folgt, dass jedes der assymptotischen particulären Integrale für $x=\alpha$ unendlich werden könne, dass also in jeder der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ der Nenner $(x-\alpha)$ vorhanden zu sein vermöge; nur in einer höheren Potenz, als in der mit dem Exponenten $m_1$, kann $x-\alpha$ nicht erscheinen. Frägt man ferner nach der Beschaffenheit der algebraischen Gleichung, so ist es klar, dass, wenn der erste Coefficient $X_n$ der Differentialgleichung nur Einen Factor $x-\alpha$ birgt, im Allgemeinen in den Coefficienten der algebraischen, vom ersten angefangen, Factoren $x-\alpha$ bezüglich:

$$
n, \quad (n-1), \quad (n-2), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1, \quad 0,
$$

vorkommen können aber nicht müssen, und dass, bei beliebiger Beschaffenheit des Baues der Coefficienten der Differentialgleichung aus Factoren $x-\alpha$, ein zu complizirtes Verhalten der Algebraischen eintrete, als dass man ihm in der Formenlehre eine Stelle anweisen könnte. Der Exponent also, zu dem $x-\alpha$ im ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung erhoben erscheint, ist nicht bekannt — wir kennen nur eine Gränze, die er nicht überschreitet, ja, wir sind sogar nicht immer berechtigt seine Existenz allda anzunehmen; wenn nämlich $m_1 = 1$ ist, und der Werth von $k$ eine negative, ganze oder gebrochene Zahl, so kann der Factor $x-\alpha$ im ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung auch ganz fehlen. Diess ist z. B. dann der Fall, wenn $x=\alpha$ ein, zwei oder mehrere Wurzeln der Gleichung gleichmachender Werth ist. Dagegen können hinwiederum andere Factoren vorhanden sein, von denen die Differentialgleichung nicht die geringste Spur trägt, solche einfache Divisoren nämlich von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$, aus denen, durch Zerlegen in Partialbrüche und Integriren, ein Factor wie $(x-\alpha)^h$ des particulären Integrals hervorgeht, unter $h$ eine ganze positive Zahl verstanden, die kleiner ist als $n$, so dass also der erste Coefficient der algebraischen Gleichung die Factoren des ersten Coefficienten der differentialen bald besitzt bald nicht besitzt und umgekehrt, und die etwa vorhandenen gemeinschaftlichen überdiess noch in einer anderen Anzahl.

Man wird nun keine Schwierigkeit mehr finden, auch folgende Frage beiläufig auf dieselbe Weise zu beantworten: Sind die zwei particulären Integrale: das für $x=\alpha$ und das

für $x=\beta$ unendlich Werdende dieselben, oder von einander verschieden? Es ist diess eine Frage, die man auch der Differentialgleichung selber stellen zu können vermeinen kann, indem man, wo diess angeht, $\alpha=\beta$ setzt und die im Substitutionsresultate liegende Antwort analysirt. Wir werden diesen Weg verfolgen, reduziren ihn aber des leichteren Verständnisses wegen auf den einfachsten Fall, annehmend, dass jeder der Factoren $x-\alpha$ und $x-\beta$ nur im ersten Coefficienten und da nur Einmal, im zweiten aber nicht mehr erscheine. Die Gleichsetzung von $\alpha$ und $\beta$ wird dann entweder **Erstens**: dem ersten Coefficienten den Factor $(x-\alpha)^2$ ertheilen, während im zweiten gar kein Factor $x-\alpha$ vorkömmt, und diess ist dasjenige, was im Allgemeinen und gewöhnlich geschehen wird, oder **Zweitens**: der zweite Coefficient gewinnt durch die Gleichsetzung von $\alpha$ und $\beta$ zugleich die Eigenschaft für $x=\alpha$ zu verschwinden, d. h. mit anderen Worten er gewinnt Einen oder mehrere Factoren $x-\alpha$, so etwa, dass nun der erste und zweite Coefficient solcher Factoren bezüglich zwei und wenigstens Einen haben, oder endlich **Drittens**: die ganze Gleichung wird durch $x-\alpha$ oder durch mehrere solche Factoren theilbar, und es bleibt im ersten Coefficienten, nach verrichteter Division, entweder nur Ein oder gar kein solcher Factor übrig. — Im ersten, also im gewöhnlichen Falle, müssen, nach dem Zeugnisse der Analysis, die Divisoren $x-\alpha$ und $x-\beta$ in einem und demselben particulären Integrale vorhanden gewesen sein, weil durch ihre Gleichstellung kein Unendlichwerden zweier particulärer Integrale für $x=\alpha$, sondern nur eines einzigen angedeutet wird, und noch dazu eine Verwandlung eines algebraischen Bruches in eine Exponentialgrösse, oder mindestens einer Form wie $\frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^h(x-\beta)^k}$ in $e^{\frac{A}{x-\alpha}+\chi(x)}$. Wie diese Verwandlung vor sich gehe, werden wir sogleich aus der Differentialgleichung selber sehen; sie beruht nämlich darauf, dass $h$ und $k$ zusammenhängende, aus einer und derselben höheren Gleichung gefolgerte Werthe sind, die von $\alpha$ und $\beta$ abhängen und für $\alpha=\beta$ durch Unendlich durchgehen. Im zweiten Falle sind, nach dem Zeugnisse der Analysis, die Divisoren $x-\alpha$ und $x-\beta$ in zweien particulären Integralen vorhanden, im dritten Falle aber wieder nur in einem einzigen, mit dem charakteristischen Unterschiede gegen den ersten Fall, dass hier kein Durchgehen durch Unendlich von $h$ und $k$ für $\alpha=\beta$ stattfindet. Das gelegentliche völlige Verschwinden jeder Spur von $x-\alpha$ aus der Gleichung durch Division, deutet auf den speziellen Fall $k=-h$. Offenbar stehen diese Andeutungen der Analysis mit unserer früher angeführten Regel in Harmonie: die für $x=\alpha$ und für $x=\beta$ unendlich werdenden particulären Integrale bilden nämlich, je für sich, eine eigene Gruppe; ein jeder Bestandtheil der einen von ihnen wird ausgedrückt durch alle mit bestimmten Constanten multiplizirten und addirten Bestandtheile der Anderen; sohin geht in den Ausdruck des für $x=\beta$ unendlich Werdenden auch in der Regel der für $x=\alpha$ unendlich Werdende ein, wenn ihm nicht der Coefficient 0 zu Theil geworden ist, woraus sich dann alle Andeutungen der Analysis von selbst ergeben.

Um aber zu zeigen, auf welche Weise der **Übergang der algebraischen Form in die exponentielle** stattfinde, bemerken wir, dass die Werthe von $h$ und $k$ aus folgenden zwei Gleichungen gezogen werden:

$$h=\frac{X_{n-1}}{X_n}(x-\alpha)\Big|_{\alpha}-(n-1),\qquad k=\frac{X_{n-1}}{X_n}(x-\beta)\Big|_{\beta}-(n-1), \tag{458}$$

in welchen gegenwärtig $X_n = (x-\alpha)(x-\beta)X$ ist. Statuiren wir nun zwischen $\beta$ und $\alpha$ den unendlich kleinen Unterschied $\varepsilon$, so dass: $\beta = \alpha + \varepsilon$ wäre, so erhalten wir aus den vorliegenden Gleichungen für diesen Fall:

$$(459)\qquad \begin{aligned} h &= \left.\frac{X_{n-1}}{X(x-\alpha-\varepsilon)}\right\}_{\alpha} - (n-1) = -(n-1) - \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}, \\ k &= \left.\frac{X_{n-1}}{X(x-\alpha)}\right\}_{\alpha+\varepsilon} - (n-1) = -(n-1) + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

wobei:

$$\mathfrak{A} = \left.\frac{X_{n-1}}{X}\right\}_{\alpha} = \left.\frac{X_{n-1}}{X}\right\}_{\alpha+\varepsilon}$$

ist. Diesemnach geht der Nenner $(x-\alpha)^h(x-\beta)^k$ des in Rede stehenden particulären Integrales für $\beta = \alpha + \varepsilon$ über in:

$$(x-\alpha)^h\,(x-\alpha-\varepsilon)^k = (x-\alpha)^{-2(n-1)}\,(x-\alpha)^{-\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}}\,(x-\alpha-\varepsilon)^{+\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}},$$

oder, wegen:

$$(x-\alpha-\varepsilon)^{\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}} = (x-\alpha)^{\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{x-\alpha}\right)^{\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}},$$

$$(x-\alpha)^h\,(x-\alpha-\varepsilon)^k = (x-\alpha)^{-2(n-1)}\left(1 - \frac{\varepsilon}{x-\alpha}\right)^{\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}},$$

und das particuläre Integral selbst:

$$(460)\qquad \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^h\,(x-\alpha-\varepsilon)^k} = \psi(x)\,(x-\alpha)^{2(n-1)}\left(1 - \frac{\varepsilon}{x-\alpha}\right)^{-\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}}.$$

Nun erhält man aber, durch Reihenentwicklung vermittelst der Binomialformel und mit Rücksicht auf den Umstand, dass $\varepsilon$ eine verschwindende Grösse ist:

$$(461)\qquad \left(1 - \frac{\varepsilon}{x-\alpha}\right)^{-\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}} = 1 + \frac{\mathfrak{A}}{x-\alpha} + \frac{\mathfrak{A}^2}{2(x-\alpha)^2} + \frac{\mathfrak{A}^3}{2.3(x-\alpha)^3} + \ldots\ldots = e^{\frac{\mathfrak{A}}{x-\alpha}},$$

und somit:

$$(462)\qquad \left.\frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^h\,(x-\beta)^k}\right\}_{\alpha-\beta} = \psi(x)\,(x-\alpha)^{2(n-1)}\,e^{\frac{\mathfrak{A}}{x-\alpha}},$$

und so wäre denn der Übergang der beiden auf den ersten Blick so wesentlich verschiedenen Formen in einander vollständig gerechtfertigt. Zugleich ist aber auch ersichtlich, dass der Übergang von der algebraischen zur exponentiellen Form durch unendliche Werthe der Exponenten $h$ und $k$ vermittelt werde, dass somit, so zu sagen, die Exponentielle erscheine als Potenz mit unendlich grossem Exponenten. Hält man diess mit dem früher, S. 318 von der Absonderung der unendlich werdenden Bestandtheile Gesagten, die im gegenwärtigen Falle $h$-gliedrig, d. h. aus unendlich vielen Gliedern

bestehend ausfallen würden, zusammen, so ergibt sich daraus die Unmöglichkeit, aus einer so gestalteten Exponentialgrösse den aggregativen, unendlich werdenden Bestandtheil abzusondern.

Wir glauben, dass das Angeführte eben hinreiche, um auf die Verwandtschaft der verschiedenen, möglichen Gruppen von Integralen ein vorläufig genügendes Licht zu werfen, und schliessen diesen Paragraph mit einigen Bemerkungen, anlangend etliche der im II. Abschnitte behandelten Differentialgleichungen, besonders derjenigen, deren nach der dortigen Methode ermittelte Integrale uns nicht ganz zusagen:

Der zweite Abschnitt behandelt im Wesentlichen diejenigen Differentialgleichungen, deren sämmtliche Coefficienten von der Form $a+bx$ sind, deren Coefficienten also, als in der Regel dem ersten Grade sämmtlich angehörend, mit der ihnen zukommenden gemeinsamen Gradzahl 1 zumeist ein Fortschreiten im Niveau offenbaren. Unsere Formenlehre ertheilt den particulären Integralen solcher Differentialgleichungen exponentielle Assymptoten wie $e^{ax}$ und wirklich besitzen in der Regel die particulären Integrale der in diesem II. Abschnitte integrirten Gleichungen, wenn man sie als Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl hinstellt, die Form $e^{ax}Q$ — man sehe z. B. die Gleichungen (160), (161), (214). Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl sind es also, welche uns die Integrale der Differentialgleichungen in der wichtigsten und vornehmsten der unendlich vielen ihnen zukommenden Formen liefern, nämlich in der assymptotischen und es kann hier bemerkt werden, dass diess nicht bloss der Fall sei bei der einfachen Form $a+bx$ der Coefficienten, sondern dass allgemein, bei beliebig gestalteten solchen, die Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl unter den vorkommenden Formen den ersten Rang behaupten. In Beziehung auf die andere Grundform: die eines bestimmten Integrales nämlich, wie $\int_{u'}^{u''} e^{ux} V\,du$, lässt sich bemerken, dass sie zwar mit der früheren identisch sei, so oft sie neben derselben besteht, aber nicht Glied für Glied — sie fasst nämlich die assymptotischen Integrale gruppenweise zusammen, in der Regel zu zweien, oft aber auch zu mehren, zu zweien jedesmal, wenn beide Integrationsgränzen $u'$ und $u''$ endliche Zahlen bedeuten und die Function $V$ innerhalb derselben stetig ist. Denkt man sich nämlich in diesem Falle die Integration des Ausdruckes $e^{ux}V\,du$, entweder weil sie möglich ist in endlicher Form, oder durch Reihen wirklich durchgeführt, so kann das Integral offenbar nur die Gestalt $e^{ux}R$ tragen, wo $R$ eine Function $f(u, x)$ von $u$ und $x$ ist, die die Letztere dieser Variablen nur in algebraischer Weise mit der ersteren verknüpft enthält. Nimmt man dieses unbestimmte Integral zwischen den Gränzen $u'$ und $u''$, so erhält man daraus den offenbar aus zwei assymptotischen Integralen zusammengesetzten, Genüge leistenden Ausdruck:

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V\, du = f(u'', x)\, e^{u''x} - f(u', x)\, e^{u'x}. \tag{463}$$

Wäre $V$ zwischen den Gränzen $u'$ und $u''$ nicht stetig, sondern ginge es zwischen ebendenselben, etwa für $x=\alpha$, durch Unendlich durch, so wird, wie man weiss, in Folge dessen, das bestimmte Integral entweder unendlich, oder dem Werthe nach unbestimmt, aber demungeachtet nicht unbrauchbar: denn es findet, wie wir an dem speziellen Beispiele S. 101, (244) gesehen haben, ein

Zerfallen desselben in mehrere particuläre Integrale statt, indem zu den in der obigen Formel (463) enthaltenen beiden noch Ein oder mehrere mit der Assymptote $e^{ax}$ hinzutreten. Es ist wohl für sich klar, dass, in der Regel, ein solches gruppenweises Zusammenfassen der Klarheit der Anschauung nicht eben förderlich sein könne, dass sohin in diesem Bezuge der Form eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl der Vorrang gebühre, während hinwiederum den bestimmten Integralen zwei sehr bedeutende Vorzüge eigenthümlich angehören, nämlich Erstens: der der leichteren Umsetzbarkeit in jede andere Form und Zweitens: der der Fähigkeit, unter gewissen Umständen complizirte Irrationalgrössen in äusserst einfacher rationaler Gestalt wiederzugeben.

Wenn den Coefficienten von der Form $a+bx$ einer Differentialgleichung das Fortschreiten im Niveau natürlich ist, so ist es doch desshalb nicht nothwendig: es können vielmehr in einer solchen auch Ansteigungen stattfinden mit einem auf das Coefficientenpaar entfallenden Repartitionsbetrage, der zwischen 0 und 1 fällt, und eben solche Abfälle. Der speziellen Ansteigung 1, der nach unseren Regeln ein particuläres Integral entspricht mit einer exponentiellen Assymptote von der Form $e^{ax^2+\beta x}$, ist S. 103 Erwähnung geschehen, und die Formel (245) S. 102 enthält eine Bestätigung unserer Lehren. Ist die Ansteigungszahl eine gebrochene, wie z. B. bei der Kummer'schen Gleichung (83), S. 54, wo sie $\frac{1}{n}$ ist, so erschliessen wir nach unseren Regeln in den particulären Integralen $n^{te}$ Wurzeln, die die Analysten, welche die Integration dieser speziellen Gleichung zuerst zum Gegenstande ihrer Bestrebungen machten, schwerlich ahnten — Irrationalformen, welche alldort durch bestimmte Integrale von gewiss höchst einfacher Form und eine zwischen den Constanten bestehende Beziehungsgleichung nicht ohne Vortheil ersetzt sind. Weit minder ist der Nutzen, den die bestimmten Integrale bei solchen Abfällen gewähren, die weniger als Eine Einheit für das Coefficientenpaar betragen, etwa bei der Gleichung (95) S. 57, wo sich ein Abfall von $\frac{1}{n}$ Einheiten auf das Coefficientenpaar kundgibt. Denn abgesehen davon, dass wir uns von dieser Gleichung gar kein allgemeines, sondern nur ein particuläres Integral verschaffen konnten, so war noch überdiess die Form desselben weder der Anschaulichkeit noch dem Fortrechnen besonders zusagend. Unsere Formenlehre deutet auch hier auf Irrationalgrössen und zwar auf $n^{te}$ Wurzeln und es hat keine Schwierigkeit dieselben, in diesen und in allen anderen Fällen, wo sie indizirt sind, nachzuweisen — eine Veränderung der unabhängigen Veränderlichen vermittelst einer passenden Substitution führt nämlich bald zum Ziele. Es wird genügen, wenn wir diess hier nur für die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-y=0 \tag{464}$$

darthun. In ihr beträgt der Gesammtabfall Eine Einheit auf zwei Coefficientenpaare, folglich eine halbe Einheit auf das Paar. Fasst man daher das Integral in der Form $e^{\int\varphi dx}$ auf, so ist $\varphi$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ also irrational und namentlich mit Quadratwurzeln behaftet, sohin fähig imaginär zu werden, aber offenbar nur für $x=0$, weil nur $x$ Factor des ersten Coefficienten ist. Es wird daher die Substitution

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\xi^2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{d\xi}\frac{d^2\xi}{dx^2},$$

$$\xi = x^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

und demzufolge:

$$\xi\frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{dy}{d\xi} - 4\xi \cdot y = 0, \tag{465}$$

eine Gleichung, deren Coefficienten keinen Abfall mehr, sondern ein Fortschreiten im Niveau offenbaren und deren assymptotisches Integral in der Formel (431) enthalten ist. Das anstatt $\xi$ zurückgesetzte $x$ macht das vorher verkündete Vorkommen von $\sqrt{x}$ im Exponenten der Exponentielle augenscheinlich, und es ist auch keinem Zweifel unterworfen, dass man der S. 57 unter (95) ersichtlichen Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung von eben derselben Form:

$$x\frac{d^ny}{dx^n} \pm a^2y = 0 \tag{466}$$

eine ähnliche Behandlung angedeihen lassen könne, durch Einführung einer neuen Veränderlichen vermittelst der Substitution:

$$x = \xi^{\frac{n}{n-1}}.$$

Indessen finden wir uns an diesem Orte veranlasst zu bemerken, dass diese so eben angedeutete Substitution keineswegs als das einzige, unumgänglich nothwendige Mittel zu betrachten sei, um des allgemeinen Integrales habhaft zu werden. Es gibt im Gegentheile noch mehrere zu demselben Ziele leitende Wege, und selbst die S. 59 unter (98) und (100) dargelegten Ausdrücke, die aggregirt ein obwohl unvollständiges, und durch den Zusatz eines einzigen particulären Integrales mit nur einer Constanten zu completirendes Integral der Gleichung (95) darstellen, sind zu diesem Behufe nicht so unzureichend, als es auf den ersten Anblick vielleicht scheinen könnte. Es ist zwar wahr, dass noch Ein particuläres Integral fehle, dieses ist aber leicht zu ermitteln und zuzusetzen. Es ist ferner nicht zu bestreiten, dass der Bestandtheil (98) nur für positive, der (100) dagegen nur für negative $x$ giltig sei, diess ist aber nur richtig für die Formen (98) und (100), und gilt nicht nothwendigerweise auch von denjenigen, in welche diese zu verwandeln gelungen ist, daher wir denn doch, vor der Hand wenigstens, die obgedachten Formen als das allgemeine Integral gebend, anzunehmen veranlasst sind. Wir werden später noch zu demselben Gegenstande zurückkommen, und die allgemeine Erfahrung abermals bestätigt finden: dass eine jede überwundene analytische Schwierigkeit die Mutter neuer Aufschlüsse sei — und diess sind die einfachen Bemerkungen, die, theils zur Bestätigung und Ergänzung der bisher gewonnenen Sätze der Formenlehre, theils zur genaueren Bestimmung ihrer Tragweite, dienlich zu sein schienen.

## §. 19.

## Bestimmte Integrale.

Aus unseren bisherigen Untersuchungen ist hervorgegangen, dass eine Gruppe von particulären, in der Form $e^{\int \varphi dx}$ enthaltenen Integralen, wo $\varphi$ eine algebraische, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Function von $x$ ist, vereinigt in eine Differentialgleichung, jeden beliebigen Bau der letzteren, in Bezug auf die Gradzahlen der Coefficienten und auch in Bezug auf ihre Zusammensetzung aus einfachen Factoren, also in Bezug auf die vornehmsten zuerst in die Augen fallenden Merkmale, zu erzeugen vermöge. Es ist aber auch vielfach dargethan worden, dass diess nicht die Folge sei der algebraischen Beschaffenheit von $\varphi$, sondern die gewisser Eigenschaften, die das gegenseitige Verhalten der Differentialquotienten angeben, und die die algebraischen Functionen gemeinschaftlich besitzen mit vielen anderen analytischen Gebilden, worunter bestimmte Integrale, Logarithmen, Kreisbögen, und andere gemeinhin zu den Transcendenten gerechnete Functionen, die wir mit den algebraischen sämmtlich in eine einzige, erste Klasse vereinigten. Überdiess sahen wir: dass ein anderes gegenseitiges Verhalten der Differentialquotienten auch nothwendiger Weise mit anderen den Coefficienten aufgedrückten Merkmalen zusammenhänge. Diess berechtigt uns nun zu der Behauptung, dass allen Differentialgleichungen mit Coefficienten erster Klasse Integrale von der Form $e^{\int \varphi dx}$ zukommen, wo $\varphi$ ebenfalls der ersten Klasse angehört. Es schiene daher der Gegenstand unserer Untersuchungen wesentlich erschöpft und durch das bisher Beigebrachte abgeschlossen zu sein, wenn das Feld der Functionen erster Klasse ein vollkommen bekanntes, scharf abgegränztes wäre. Dem ist aber nicht so: Wir kennen alle Functionen erster Klasse lange noch nicht, und es ist uns sogar in vielen Fällen unmöglich eine vorgelegte Function in die Klasse zu reihen, zu der sie gehört und man muss oft zur Bestimmung derselben die Differentialgleichung zu Hilfe nehmen. Überdem haben wir die Erfahrung gemacht, dass das Integral einer Gleichung zwar in der Regel in mehreren verschiedenen Formen erscheinen könne, dass aber von denselben in sehr vielen Fällen nur Eine die tadellose und somit natürliche sei. Man kann noch hinzusetzen, dass, wenn mit dem Integrale weiter gerechnet werden soll, meist mehrere Formen zu Hilfe gezogen werden müssen, da jede von ihnen einem anderen Zwecke vorzugsweise zusagen kann: die eine — die assymptotische — die geometrische Anschauung besonders fördert, die andere — die Reihenform — die numerische Berechnung begünstigt, die dritte nur etwa das Ergänzungsglied einer Reihe liefert, welche das particuläre Integral darstellt, die vierte — die eines bestimmten Integrals — den Zusammenhang unter allen übrigen Formen vermittelt, und den Übergang von der einen zur anderen, ohne neue Integration, möglich macht, und diese Formen sich zum Theil gegenseitig ausschliessen, zum Theil ergänzen, in dem Sinne, dass, wenn die eine, vermöge dargebotener Analogie mit einer divergirenden Reihe, unbrauchbar wird, die andere, als diesem Übelstande nicht unterworfen, sohin brauchbar, auftritt. Es folgt hieraus zweierlei, nämlich: dass es uns nicht nur obliege, bei Functionen, die im Integrationsgeschäfte nützlich geworden sind, die Klasse anzugeben, zu der sie

gehören, sondern dass es überdiess noch nöthig sei, das Specielle, Characteristische, durch das sie eben nützlich werden, der Erörterung zu unterziehen. Nach den im II. Abschnitte gewonnenen analytischen Erfahrungen sind aber das bestimmte Integral, der Differentialquotient mit allgemeiner Ordnungszahl, und das unbestimmte Integral sehr wesentliche Formen, die wir desshalb auch der Reihe nach der Erörterung zu unterwerfen beabsichtigen.

Wir wenden uns zunächst zu den bestimmten Integralen und namentlich zu der wohlbekannten Form:

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux} \cdot V \cdot du \tag{467}$$

von der wir die erste und hervorragendste Eigenthümlichkeit darthun werden, dass sie, in die Differentialgleichung als neues particuläres Integral eingeführt, bei schicklich gewähltem $V$ als Function von $u$, und schicklich gewählten nach $x$ und $u$ constanten Integrationsgränzen $u'$ und $u''$, den Coefficientenbau nicht complizire, d. h. ihre Gradzahl nicht erhöhe. Hieraus wird unmittelbar folgen, dass diese Form particulärer Integrale die, allen Differentialgleichungen von hoher Ordnung und niederer Gradzahl der Coefficienten, natürlich zukommende sei. Da nun diess in Bezug auf Gleichungen mit Coefficienten von der einfachsten Form $a + bx$ bereits durch die Ergebnisse des zweiten Abschnittes ausser Zweifel gesetzt ist, so wählen wir zum zweiten Beispiele die allgemeine lineare Differentialgleichung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung mit Coefficienten vom zweiten Grade:

$$\begin{aligned}(a_n + b_n x + c_n x^2)\, y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x + c_{n-1} x^2)\, y^{(n-1)} + (a_{n-2} + b_{n-2} x + c_{n-2} x^2)\, y^{(n-2)} \\ + \ldots\ldots\ldots + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\, y'' + (a_1 + b_1 x + c_1 x^2)\, y' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2)\, y = 0\end{aligned} \tag{468}$$

in die wir, nach der Methode des §. 2 dieses Abschnittes, S. 148, ein neues particuläres Integral:

$$y_1 = C \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V\, du \tag{469}$$

einführen. Wir erhalten so, zur Bildung der alldort unter (8) mit $P_1$ bezeichneten Grösse, durch successive Differentiationen:

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_{u'}^{u''} e^{ux} \cdot V\, du \\ y_1' &= \int_{u'}^{u''} u \cdot e^{ux}\, V\, du \\ y_1'' &= \int_{u'}^{u''} u^2 \cdot e^{ux}\, V\, du \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} &= \int_{u'}^{u''} u^n \cdot e^{ux}\, V\, du. \end{aligned} \tag{470}$$

Setzen wir nun Kürze halber in dem auf solche Weise gewonnenen Substitutionsresultate:

$$
\begin{aligned}
(471) \qquad & a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + a_{n-2} u^{n-2} + \dots\dots\dots + a_1 u + a_0 = U_0 \\
& b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + b_{n-2} u^{n-2} + \dots\dots\dots + b_1 u + b_0 = U_1 \\
& c_n u^n + c_{n-1} u^{n-1} + c_{n-2} u^{n-2} + \dots\dots\dots + c_1 u + c_0 = U_2,
\end{aligned}
$$

so erhält $P_1$ folgende Gestalt:

$$
(472) \qquad P_1 = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V \left[U_0 + U_1 x + U_2 x^2\right] du.
$$

Wir zerlegen dieses Substitutions-Resultat in drei Theile, so viele nämlich als Glieder unter dem gralzeichen ersichtlich sind, und unterwerfen die beiden letzteren dem Verfahren des theilweisen grirens beziehungsweise Ein- und zweimal, so wird:

$$
\int_{u'}^{u''} x . e^{ux}\, U_1 V du = e^{ux}\, U_1 V \Big\}_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} e^{ux} \frac{d}{du}\left[U_1 V\right] du
$$

$$
\int_{u'}^{u''} x^2 . e^{ux}\, U_2 V du = e^{ux}\left[U_2 V x - \frac{d}{du}(U_2 V)\right]\Big\}_{u'}^{u''} + \int_{u'}^{u''} e^{ux} \frac{d^2}{du^2}(U_2 V)\, du
$$

und demzufolge:

$$
(473) \quad P_1 = e^{ux}\left[x . U_2 V + U_1 V - \frac{d}{du}(U_2 V)\right]\Big\}_{u'}^{u''} + \int_{u'}^{u''} e^{ux}\left[U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) + \frac{d^2}{du^2}(U_2 V)\right] \dots
$$

Denken wir uns jetzt das $V$ als eine solche Function von $u$, dass der hier vorfindige Ausdruck:

$$
(474) \qquad U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) + \frac{d^2}{du^2}(U_2 V) = 0,
$$

oder, was dasselbe ist:

$$
(475) \qquad U_2 \frac{d^2 V}{du^2} + \frac{dV}{du}\left[2 \frac{dU_2}{du} - U_1\right] + V\left[\frac{d^2 U_2}{du^2} - \frac{dU_1}{du} + U_0\right] = 0
$$

wird, so ist $V$, in seiner Eigenschaft als Integral einer Differentialgleichung der zweiten Ord nothwendig von der Form·

$$
(476) \qquad V = C_1 V_1 + C_2 V_2,
$$

und mit zwei willkürlichen Constanten $C_1$ und $C_2$ versehen. Man wird daher Einmal diese Cons und das $u$ so wählen können, dass den beiden Gleichungen:

$$
(477) \qquad e^{ux}\, U_2 V = 0 \qquad \text{und} \qquad e^{ux}\left[U_1 V - \frac{d}{du}(U_2 V)\right] = 0
$$

gleichzeitig Genüge geleistet wird, unabhängig von $x$. Diesen gehören nun in der Regel mehrere W von $u$ als Wurzeln an, Werthe die gewöhnlich auch den:

$$
(478) \qquad U_2 V = 0 \qquad \text{und} \qquad U_1 V - \frac{d}{du}(U_2 V) = 0,
$$

ja, manchmal und theilweise auch den noch einfacheren:

$$
(479) \qquad V = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{dV}{du} = 0
$$

als Wurzeln zukommen, und unter denen sich auch unendliche befinden werden. Jedes Paar von ihnen kann gesetzt werden statt $u'$ und $u''$ in (473), wodurch $P_1 = 0$ wird und es stellt dann das $y_1$ in der Gleichung (469) ein der Differentialgleichung (468) zukommendes particuläres Integral vor, woraus sich der wichtige Schluss ziehen lässt, dass man die Integration einer Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung mit Coefficienten vom zweiten Grade abhängig machen könne von der Integration einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung, der (475) nämlich, mit Coefficienten vom $n^{ten}$ Grade.

Man kann aber auch ein andermal den Werth von $u$ willkürlich, gleich einer beliebigen Grösse $\alpha$ wählen, und die Constanten $C_1$ und $C_2$, oder vielmehr die Relation $\frac{C_2}{C_1}$ dazu benützen, dass für $u = \alpha$ in den integrirt erscheinenden Gliedern der Gleichung (473) für $P_1$:

$$U_2 V \Big\}_\alpha = 0 \tag{480}$$

wird, während andererseits der Form nach der Ausdruck:

$$e^{ux}\left[U_1 V - \frac{d}{du}(U_2 V)\right]\Big\}_\alpha = A.e^{\alpha x} \tag{481}$$

ausfällt, wo $A$ eine willkürliche Constante bedeutet. Wir hätten also:

$$P_1 = A.e^{\alpha x} \tag{482}$$

und sohin, nach dem Vorgange des §. 2 dieses Abschnittes, S. 149:

$$\frac{P'}{P} = \frac{P'_1}{P_1} = \alpha, \tag{483}$$

oder, was dasselbe ist:

$$P' - \alpha P = 0. \tag{484}$$

Diess wäre nun die Differentialgleichung, die um Ein particuläres Integral mehr hat als die (468), nämlich um das:

$$y_1 = \int_{u'}^{\alpha} e^{ux}\, V du = \int_{u'}^{\alpha} e^{ux}\,(C_1 V_1 + C_2 V_2)\, du, \tag{485}$$

wo $u'$ Eine der Wurzeln der Gleichungen (477), eine der unendlichen z. B. bedeutet, $\alpha$ willkürlich ist und $\frac{C_2}{C_1}$ als bestimmte Function von $\alpha$ vorausgesetzt wird. Sie ist um die Einheit in der Ordnungszahl höher, im Baue der Coefficienten jedoch nicht complizirter, denn diese erheben sich ebenfalls nur zum zweiten Grade, was unsere obenausgesprochene Behauptung rechtfertigt. Wir ersehen aber aus (484) noch überdiess nicht nur, dass Differentialgleichungen durch das Verfahren der Differentiation, Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition zu höherer Ordnung erhoben, und somit mit neuen particulären Integralen versehen werden, gerade so wie algebraische Gleichungen durch Potenziren, Multipliziren und Addiren neue Wurzeln gewinnen, sondern wir erhalten aus (485) auch Aufschluss über die Form der neu eingeführten particulären Integrale. Diese ist nämlich mit der der alten, bereits früher in der Gleichung vorhandenen, vollkommen congruent. Denkt man sie nämlich als bestimmtes Integral, so steht dieselbe Function $e^{ux} V du$ hier und dort unter dem Integralzeichen und nur die Gränzen machen

zwischen beiden, den alten Integralen nämlich und den neu eingeführten, den Unterschied, un erhaltene neue Differentialgleichung (484) sich symbolisch auch so schreiben lässt:

(486)
$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) P = 0,$$

und so geschrieben gewissermassen nur den Zusatz des symbolischen Factors $\frac{d}{dx} - \alpha$ zur alt chung $P = 0$ ausweist, so ist unmittelbar ersichtlich, dass ein ferneres eingeführtes particuläres nämlich:

(487)
$$y_3 = \int_{u'}^{\beta} e^{ux}\, V\, du,$$

unter $V$ dieselbe Function (476) von $u$ verstanden, die in unseren früheren Rechnungen vork umwandeln werde in:

(488)
$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} - \beta\right) P = 0$$

u. s. w., für noch mehrere, neu eingeführte particuläre Integrale derselben Form.

Man ist aber endlich auch im Stande auf dem betretenen Wege zwei neue particulä grale auf einmal einzuführen. Indem man nämlich nicht bloss $\alpha$, sondern auch $\frac{C_2}{C_1}$ willkürlich reduzirt sich offenbar der zweite Theil der (473) auf die Form:

(489)
$$P = e^{\alpha x}(A + Bx),$$

wo $A$ und $B$, weil sie Functionen sind zweier willkürlicher Constanten $C_1$ und $C_2$, auch wied willkürliche Constanten darstellen. Differenzirt man diese Gleichung, behufs der Elimination von $B$ zweimal, so dass:

$$\begin{aligned} P &= e^{\alpha x}(A + Bx) \\ P' &= e^{\alpha x}(\alpha A + \alpha Bx + B) \\ P'' &= e^{\alpha x}(\alpha^2 A + \alpha^2 Bx + 2\alpha B) \end{aligned}$$

wird, multiplizirt bezüglich mit $\alpha^2$, $-2\alpha$, 1 und addirt, so erhält man eine neue Gleichung:

(490)
$$P'' - 2\alpha P' + \alpha^2 P = \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 P = 0,$$

der, nebst allen particulären Integralen der ursprünglich gegebenen $P = 0$, noch die zwei neu

(491)
$$y_1 = C_1 \int_{u'}^{\alpha} e^{ux}\, V_1\, du \quad \text{und} \quad y_2 = C_2 \int_{u'}^{\alpha} e^{ux}\, V_2\, du,$$

zukommen, und die abermals, was die Gradzahlen der Coefficienten betrifft, nicht complizirter die $P = 0$. Auch lässt sich sehr leicht einsehen, dass man, diese beiden particulären Integral einzeln und der Reihe nach in die Gleichung einführend, zu demselben Resultate gelangen mü nun aber die Einführung des ersten derselben offenbar die Coefficienten complizirt, indem sie dritten Grade erhebt, so muss die nachfolgende Einführung des zweiten diese Complication

aufheben und eine Herabsetzung der Gradzahl von 3 auf 2 Einheiten durch allgemeine Divisibilität zur Folge haben.

Dieselben Betrachtungen lassen sich verallgemeinern und auf beliebige Gradzahlen der Coefficienten ausdehnen. Um diess zu zeigen, nehmen wir eine Differentialgleichung von der $n^{ten}$ Ordnung, deren Coefficienten sich höchstens zur $m^{ten}$ Ordnung erheben, so kann dieselbe folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}(a_n &+ b_n x + c_n x^2 + \ldots\ldots + h_n x^{m-1} + k_n x^m)\, y^{(n)} \\ + (a_{n-1} &+ b_{n-1} x + c_{n-1} x^2 + \ldots\ldots + h_{n-1} x^{m-1} + k_{n-1} x^m)\, y^{(n-1)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (a_1 &+ b_1 x + c_1 x^2 + \ldots\ldots + h_1 x^{m-1} + k_1 x^m)\, y' \\ + (a_0 &+ b_0 x + c_0 x^2 + \ldots\ldots + h_0 x^{m-1} + k_0 x^m)\, y = 0,\end{aligned} \tag{492}$$

wobei auch mehrere der $a, b, c, \ldots k$ genannten Grössen der Nulle gleich sein können. Das particuläre Integral $y_1$, welches wir nun in diese Gleichung einführen wollen, besitze abermals die Form:

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V du, \tag{493}$$

wo $V$ eine reine Function von $u$ vorstellt, die also kein $x$ in sich enthält. Wir erhalten aber zur Bildung von $P_1$ durch successive Differentiationen:

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V du, \\ y'_1 &= \int_{u'}^{u''} u e^{ux}\, V du, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} &= \int_{u'}^{u''} u^n e^{ux}\, V du. \end{aligned} \tag{494}$$

Nennen wir der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + a_{n-2} u^{n-2} + \ldots\ldots + a_1 u + a_0 &= U_0, \\ b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + b_{n-2} u^{n-2} + \ldots\ldots + b_1 u + b_0 &= U_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_n u^n + h_{n-1} u^{n-1} + h_{n-2} u^{n-2} + \ldots\ldots + h_1 u + h_0 &= U_{m-1}, \\ k_n u^n + k_{n-1} u^{n-1} + k_{n-2} u^{n-2} + \ldots\ldots + k_1 u + k_0 &= U_m, \end{aligned} \tag{495}$$

so erhalten wir:

$$P_1 = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V \left[U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \ldots\ldots + U_{m-1} x^{m-1} + U_m x^m\right] du. \tag{496}$$

Indem wir nun alle Glieder im zweiten Theile dieses Ausdruckes dem Verfahren der theilweisen Integration unterwerfen, erhalten wir, irgend eines derselben vornehmend:

$$\int_{u'}^{u''} x^r e^{ux} U_r V du = x^{r-1} e^{ux} . U_r V \Big\}_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} x^{r-1} e^{ux} (U_r V)' du.$$

und durch so oft wiederholte Anwendung dieses Verfahrens auf das neu hervorgehende noch unint
erscheinende Glied, so lange in letzterem unter dem Integralzeichen noch ein Factor $x$ erscheint:

$$\int_{u'}^{u''} x^{r-1} e^{ux} (U_r V)' du = x^{r-2} e^{ux} (U_r V)' \Big\}_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} x^{r-2} e^{ux} (U_r V)'' du,$$

..................................................................

$$\int_{u'}^{u''} x^2 e^{ux} (U_r V)^{(r-2)} du = x e^{ux} (U_r V)^{(r-2)} \Big\}_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} x e^{ux} (U_r V)^{(r-1)} du.$$

$$\int_{u'}^{u''} x e^{ux} (U_r V)^{(r-1)} du = e^{ux} (U_r V)^{(r-1)} \Big\}_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} e^{ux} (U_r V)^{(r)} du.$$

Substituiren wir die so erhaltenen Ausdrücke von dem letzten derselben angefangen und nach auf
fortschreitend in einander, so bekommen wir endlich:

$$\text{(497)} \quad \begin{aligned} \int_{u'}^{u''} x^r e^{ux} U_r V du = e^{ux} \Big[ & x^{r-1} U_r V x^{r-1} - (U_r V)' + x^{r-3}(U_r V)'' - \ldots + (-1)^{r-1} (U_r V)^{(r-} \\ & + (-1)^r \int_{u'}^{u''} e^{ux} (U_r V)^{(r)} du, \end{aligned}$$

und es bedeuten in dieser sowohl als in den vorhergehenden Gleichungen die Symbole:

$$(U_r V)', \quad (U_r V)'', \quad \ldots\ldots\ldots, \quad (U_r V)^{(r-1)}, \quad (U_r V)^{(r)},$$

beziehungsweise den 1ten, 2ten, ... $(r-1)$ten, $r$ten Differentialquotienten von $U_r V$ nach
Veränderlichen $u$ genommen. — Wir brauchen nun in diese Formel nur statt $r$ nacheinan
$m, m-1, m-2, \ldots 1, 0$ zu setzen, um das Ergebniss einer, auf alle einzelnen Glieder im z
ten Theile der Gleichung (496) angewandten ähnlichen Behandlung zu erfahren und endlich zu erha

$$\text{(498)} \quad \begin{aligned} P_1 = e^{ux} \Big[ & x^{m-1} . U_m V \\ & + x^{m-2} \big[ U_{m-1} V - (U_m V)' \big] \\ & + x^{m-3} \big[ U_{m-2} V - (U_{m-1} V)' + (U_m V)'' \big] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + x \quad \big[ U_2 V - (U_3 V)' + (U_4 V)'' - \ldots + (-1)^{m-2} (U_m V)^{(m-2)} \big] \\ & + \quad U_1 V - (U_2 V)' + (U_3 V)'' - \ldots + (-1)^{m-2} (U_{m-1} V)^{(m-2)} + (-1)^{m-1} (U_m V)^{(m-} \\ & + \int_{u'}^{u''} e^{ux} \big[ U_0 V - (U_1 V)' + (U_2 V)'' - \ldots + (-1)^{m-1} (U_{m-1} V)^{(m-1)} + (-1)^m (U_m V)^{(m)} \big] \end{aligned}$$

Das bestimmte Integral, welches in dieser Formel erscheint, ist offenbar eine Function von $x$, deren Form von jener des mit $V$ bezeichneten Ausdruckes abhängig ist. Sie kann darstellbar sein in endlicher Form, oder auch nur in der einer unendlichen Reihe; ersteres ist z. B. dann der Fall, wenn $V$ eine ganze Function von $u$ ist, weil dann das in Rede stehende bestimmte Integral die Gestalt:

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux}\, \mathfrak{V}\, du$$

besitzt, allwo $\mathfrak{V}$ ebenfalls eine ganze Function von $u$ bedeutet, und, weil man vermöge einer bekannten Formel der Differentialrechnung hat:

$$\int e^{ux}\, \mathfrak{V}\, du = e^{ux}\left[\frac{\mathfrak{V}}{x} - \frac{\mathfrak{V}'}{x^2} + \frac{\mathfrak{V}''}{x^3} - \frac{\mathfrak{V}'''}{x^4} + \frac{\mathfrak{V}^{(IV)}}{x^5} - \ldots\ldots\right],$$

gleich einer Reihe, welche, der ganzen Beschaffenheit der Function $\mathfrak{V}$ wegen, bei irgend einem Gliede und namentlich bei demjenigen abbrechen muss, dessen Stellenzeiger der Gradzahl von $\mathfrak{V}$ gleich ist. Diess ist aber nicht der einzige Fall, in welchem dieses bestimmte Integral in endlicher Form darstellbar wird, und es kann namentlich $V$ auch einen algebraischen Bruch bedeuten, ohne dass dasselbe in geschlossener Form darstellbar zu sein aufhört. Letzteres ist gleichwohl der allgemeinere Fall, d. h. es wird sich in der Regel als Werth des besprochenen bestimmten Integrales nur höchstens eine unendliche Reihe ergeben, und die nach der Einführung des neuen particulären Integrales (493) erhaltene Differentialgleichung wird in ihren Coefficienten entweder das bestimmte Integral, oder die unendliche Reihe die der Ausdruck desselben ist, enthalten. Da wir nun von der Form (493) zu zeigen beabsichtigen, dass sie unter gewissen Umständen die Gradzahl der Coefficienten nicht erhöhe und diess offenbar nur dann der Fall sein kann, wenn das mit $P_1$ bezeichnete Substitutionsresultat die möglichst einfache Gestalt hat, so finden wir uns auch hier veranlasst $V$ als eine solche Function von $u$ zu betrachten, die das unter dem Integralzeichen vorhandene Polynom:

$$U_0 V - (U_1 V)' + (U_2 V)'' - \ldots\ldots + (-1)^{m-1}(U_{m-1} V)^{(m-1)} + (-1)^m (U_m V)^{(m)} = 0 \tag{499}$$

macht. Die Entwicklung der einzelnen Glieder dieses Ausdruckes führt zu einer Differentialgleichung von der $m^{ten}$ Ordnung in $V$, welche so aussieht:

$$\begin{aligned}
& V^{(m)}\,.\, U_m \\
+ & V^{(m-1)}\left[\binom{m}{1} U'_m - U_{m-1}\right] \\
+ & V^{(m-2)}\left[\binom{m}{2} U''_m - \binom{m-1}{1} U'_{m-1} + U_{m-2}\right] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ & V''\left[\binom{m}{2} U_m^{(m-2)} - \binom{m-1}{2} U_{m-1}^{(m-3)} + \binom{m-2}{2} U_{m-2}^{(m-4)} - \ldots + (-1)^{m-2} U_2\right] \\
+ & V'\left[\binom{m}{1} U_m^{(m-1)} - \binom{m-1}{1} U_{m-1}^{(m-2)} + \binom{m-2}{1} U_{m-2}^{(m-3)} - \ldots + (-1)^{m-2} 2 U'_2 + (-1)^{m-1} U_1\right] \\
+ & V\left[U_m^{(m)} - U_{m-1}^{(m-1)} + U_{m-2}^{(m-2)} - \ldots + (-1)^{m-2} U''_2 + (-1)^{m-1} U'_1 + (-1)^m U_0\right] = 0,
\end{aligned} \tag{500}$$

in der die successiven Binomialcoefficienten durch die bekannten Symbole ausgedrückt erscheinen, u deren Integration offenbar $m$ particuläre Integrale für $V$, mit je Einer willkürlichen Constante liefe aus denen sich durch Summirung das allgemeine zusammensetzt, nämlich:

$$V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + \ldots\ldots\ldots + C_m V_m. \tag{501}$$

Denkt man sich nun das $V$ in dieser Form gewählt, und zudem noch die willkürlich Constanten $C_1, C_2, \ldots C_m$, oder vielmehr die Quotienten $\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1}, \ldots \frac{C_m}{C_1}$ und das $u$ mit solch Werthen versehen, dass die in der Formel (498) mit den Factoren $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots x, 1$ verseh nen Ausdrücke je für sich verschwinden, d. h. dass das folgende System von $m$ Gleichungen erfü wird:

$$\begin{aligned}
0 &= U_m V \\
0 &= U_{m-1} V - (U_m V)' \\
0 &= U_{m-2} V - (U_{m-1} V)' + (U_m V)'' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= U_2 V \quad - (U_3 V)' \quad + (U_4 V)'' - \ldots\ldots + (-1)^{m-2} (U_m V)^{(m-2)} \\
0 &= U_1 V \quad - (U_2 V)' \quad + (U_3 V)'' - \ldots\ldots + (-1)^{m-2} (U_{m-1} V)^{(m-2)} + (-1)^{m-1} (U_m V)^{(m-1)}
\end{aligned} \tag{502}$$

aus welchem in der Regel mehrere Werthe für $u$ hervorgehen werden, die man nach Belieben : Integrationsgränzen machen kann, so hat man kein neues particuläres Integral eingeführt, wohl ab ein System von Werthen gefunden, in Form von bestimmten Integralen, das der vorgelegten Diff rentialgleichung (492) Genüge leistet. Wir sehen also, dass sich allgemein die Integration einer Diff rentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung mit Coefficienten vom $m^{ten}$ Grade abhängig machen lasse von d Integration einer anderen (500) der $m^{ten}$ Ordnung mit Coefficienten, die dem $n^{ten}$ Grade angehören.

Wir ziehen aber aus der bisherigen Untersuchung noch eine fernere Folgerung, nämlic dass die Einführung eines neuen particulären Integrales von der Form (493) in eine Gleichung n ganzen und rationalen Coefficienten, unähnlich den bisher betrachteten Formen particulärer Integral zwar nicht nothwendig und in einem jeden Falle ein geschlossenes Resultat liefere, also auch nic nothwendig zu einer neuen Gleichung mit algebraischen, rationalen Coefficienten führen werde, da aber ein so beschaffenes Resultat für solche Werthe von $V$ jedesmal stattfinden könne, welche d Gleichung (500) erfüllen, die sich, wie wir gesehen haben, auch zur Integration benutzen lassen, u deren $m$ an der Zahl vorhanden sind, wenn $m$ die höchste Potenz ist, zu der die Variable $x$ in d Coefficienten der vorgelegten Gleichung erhoben vorkommt, woraus wir wieder sehen werden, da das neu eingeführte particuläre Integral namentlich dann keine Complication, sondern vielmehr oft ei Vereinfachung in den Coefficienten bezüglich ihrer Gradzahlen zur Folge habe, wenn es mit d übrigen in derselben bereits vorhandenen particulären Integralen genau einerlei Form, nämlich d (493) hat, unter $V$ genau dieselbe Function (501) von $u$ verstanden. Wir müssen, um diess darz thun, in dem für $y_1$ angenommenen Ausdrucke (493) statt $V$ irgend einen seiner $m$ Werthe a

(501) setzen, und bekommen, diesen entsprechend, der Reihe nach auch nur $m$ Ausdrücke für das in die vorgelegte Gleichung neu einzuführende particuläre Integral, nämlich:

$$y_1 = C_1 \int_{u'}^{u''} e^{ux} V_1\, du, \quad y_2 = C_2 \int_{u'}^{u''} e^{ux} V_2\, du, \quad \ldots\ldots \quad y_m = C_m \int_{u'}^{u''} e^{ux} V_m\, du. \qquad (503)$$

Um nun aber die Substitutionsresultate eben dieser Ausdrücke, statt $y$ in die vorgelegte Gleichung zum Behufe ihrer wirklichen Einführung, der Reihe nach zu ermitteln, müssen evident dieselben ebenerwähnten Substitutionen für $V$ auch in der Gleichung (498) vorgenommen werden. Es wird aber namentlich, dem ersten neu einzuführenden particulären Integrale $C_1 y_1$ entsprechend, die Gleichung (498) folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} C_1 P_1 = &+ C_1 e^{u''x} (\mathfrak{U}''_0 + \mathfrak{U}''_1 x + \mathfrak{U}''_2 x^2 + \ldots\ldots + \mathfrak{U}''_{m-1} x^{m-1}) \\ &- C_1 e^{u'x} (\mathfrak{U}'_0 + \mathfrak{U}'_1 x + \mathfrak{U}'_2 x^2 + \ldots\ldots + \mathfrak{U}'_{m-1} x^{m-1}), \end{aligned} \qquad (504)$$

wo $\mathfrak{U}''_0, \mathfrak{U}''_1, \mathfrak{U}''_2, \ldots \mathfrak{U}''_{m-1}$ und eben so $\mathfrak{U}'_0, \mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}'_2, \ldots \mathfrak{U}'_{m-1}$ constante Grössen vorstellen, in welche die eingeklammerten Polynome, beziehungsweise Multiplicatoren der successiven Potenzen $x^0, x^1, x^2, \ldots x^{m-1}$, der Gleichung (498) verwandelt werden, wenn man in ihnen einmal $u''$, ein andermal aber $u'$ statt $u$ setzt.

Wir werden in der Folge sehen, dass in der grossen Mehrzahl der Fälle, in denen eine vorgelegte Gleichung particuläre Integrale von der Art der (493) besitzt, die eine Substitutionsgränze, etwa $u' = \mp\infty$ ausfällt, je nachdem dem $x$, oder in anderen Fällen einem gewissen in der Differentialgleichung vorhandenen constanten Parameter, positive oder negative Werthe ertheilt werden. Nehmen wir diess einstweilen auch für sämmtliche Ausdrücke (503) an, so verschwindet offenbar für jeden derselben das entsprechende mit $e^{u'x}$ verbundene Glied, und wir erhalten namentlich $C_1 P_1$ unter der Form:

$$C_1 P_1 = C_1 e^{\alpha x} (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 x + \mathfrak{C}_1 x^2 + \ldots\ldots + \mathfrak{H}_1 x^{m-1}), \qquad (505)$$

wo $\alpha$ die Rolle des $u''$ in der Formel (504) spielt. Eben so bekommen wir, in die vorgelegte Gleichung statt $y$ der Reihe nach die übrigen der unter (503) aufgeführten Werthe substituirend, und indem wir die Bezeichnungen des §. 2 dieses Abschnittes festhalten:

$$\begin{aligned} C_2 P_2 &= C_2 e^{\alpha x} (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 x + \mathfrak{C}_2 x^2 + \ldots\ldots + \mathfrak{H}_2 x^{m-1}) \\ C_3 P_3 &= C_3 e^{\alpha x} (\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{B}_3 x + \mathfrak{C}_3 x^2 + \ldots\ldots + \mathfrak{H}_3 x^{m-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_m P_m &= C_m e^{\alpha x} (\mathfrak{A}_m + \mathfrak{B}_m x + \mathfrak{C}_m x^2 + \ldots\ldots + \mathfrak{H}_m x^{m-1}). \end{aligned} \qquad (506)$$

Setzen wir aber, in der Absicht gleich alle $m$ particulären Integrale (503) auf einmal in die vorgelegte Gleichung (492) einzuführen, in diese statt $y$ die Summe eben dieser Ausdrücke, so erhalten wir offenbar:

$$P = C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3 + \ldots\ldots + C_m P_m. \qquad (507)$$

Betrachten wir nun zuvörderst eben den letztangeführten Fall, so erscheint für diesen, mit Rücksicht auf die Gleichungen (505) und (506), das $P$ evident unter folgender Form:

$$P = e^{ax}(A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Hx^{m-1}), \tag{508}$$

wo $A, B, C, \ldots H$ durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\begin{aligned} A &= C_1\mathfrak{A}_1 + C_2\mathfrak{A}_2 + C_3\mathfrak{A}_3 + \ldots\ldots + C_m\mathfrak{A}_m \\ B &= C_1\mathfrak{B}_1 + C_2\mathfrak{B}_2 + C_3\mathfrak{B}_3 + \ldots\ldots + C_m\mathfrak{B}_m \\ C &= C_1\mathfrak{C}_1 + C_2\mathfrak{C}_2 + C_3\mathfrak{C}_3 + \ldots\ldots + C_m\mathfrak{C}_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H &= C_1\mathfrak{H}_1 + C_2\mathfrak{H}_2 + C_3\mathfrak{H}_3 + \ldots\ldots + C_m\mathfrak{H}_m \end{aligned} \tag{509}$$

Werden nun $C_1, C_2, C_3, \ldots C_m$ wirklich als ganz willkürliche Constanten angesehen, d. h. wollen wir in der That alle $m$ particulären Integrale (503) auf einmal in die vorgelegte Gleichung einführen, so sind offenbar auch $A, B, C, \ldots H$ sämmtlich gleichfalls willkürliche Constanten, und wir gewinnen die aus der Einführung jener $m$ particulären Werthe hervorgehende neue Gleichung von der Ordnung $n+m$ unmittelbar, indem wir die Gleichung (508), ganz nach der Methode des §. 2 dieses Abschnittes, wie ein allgemeines Integral einer Differentialgleichung von der $m^{\text{ten}}$ Ordnung in $P$ behandeln, aus welchem die letztere durch $m$-malige Differentiation und Elimination der $m$ Constanten $A, B, C, \ldots H$ zu construiren ist. Es hat aber dieser Ausdruck (508) vollständig die Form des allgemeinen Integrales einer Differentialgleichung von der $m^{\text{ten}}$ Ordnung in $P$ mit constanten Coefficienten, für einen gewissen speciellen Fall, den wir im §. 1 des II. Abschnittes behandelt haben. Wir erinnern uns nämlich aus der dort geführten Untersuchung, dass das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung wie:

$$A_m\frac{d^my}{dx^m} + A_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots\ldots + A_1\frac{dy}{dx} + A_0y = 0 \tag{510}$$

im Allgemeinen auf die Weise gefunden werde, dass man sich dieselbe zuvörderst in der symbolischen Form:

$$y\left[A_m\frac{d^m}{dx^m} + A_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots\ldots + A_1\frac{d}{dx} + A_0\right] = 0 \tag{511}$$

aufgeschrieben vorstellt und das eingeklammerte Polynom dieser letzteren wie ein algebraisches Gleichungspolynom behandelt, das nach dem Symbole $\frac{d}{dx}$ dem $m^{\text{ten}}$ Grade angehört. Sind dann:

$$\frac{d}{dx} = \theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \ldots\ldots \quad \theta_m$$

die $m$ Wurzeln desselben, so ist einerseits:

$$y = C_1e^{\theta_1x} + C_2e^{\theta_2x} + C_3e^{\theta_3x} + \ldots\ldots + C_me^{\theta_mx} \tag{512}$$

das allgemeine Integral der Gleichung (510), während andererseits die (511) auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$y\left(\frac{d}{dx}-\theta_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\theta_2\right)\left(\frac{d}{dx}-\theta_3\right)\ldots\ldots\left(\frac{d}{dx}-\theta_m\right)=0. \tag{513}$$

Für $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\ldots=\theta_m$ geht diese symbolische Gleichung in folgende andere über:

$$y\left(\frac{d}{dx}-\theta_1\right)^m=0, \tag{514}$$

wobei gleichzeitig ihr allgemeines Integral seine frühere Form (512) verliert und folgende andere annimmt:

$$y=e^{\theta_1 x}\left(C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots\ldots+C_{m-1}x^{m-1}\right), \tag{515}$$

eine Form, die offenbar mit jener vollständig übereinstimmt, welche dem für $P$ früher gewonnenen Ausdrucke (508) zukommt. Es wird sonach auch:

$$P\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)^m=0 \tag{516}$$

als Differentialgleichung von der $m^{ten}$ Ordnung in $P$, dem Ausdrucke (508) als ihrem allgemeinen Integrale so entsprechen, wie die (514) der (515), d. h. es wird die Gleichung (516) selbst das verlangte endliche Ergebniss der gleichzeitigen Einführung sämmtlicher $m$ particulären Integrale (508) in die vorgelegte Gleichung sein. In entwickelter Form aufgeschrieben sieht aber dieselbe folgendermassen aus:

$$P^{(m)}-\binom{m}{1}P^{(m-1)}\alpha+\binom{m}{2}P^{(m-2)}\alpha^2-\ldots+\binom{m}{2}P''(-\alpha)^{m-2}+\binom{m}{1}P'(-\alpha)^{m-1}+P(-\alpha)^m=0, \tag{517}$$

und es ist wohl nicht dem geringsten Zweifel unterworfen, dass wir zu derselben Differentialgleichung in $P$ auch durch directe Rechnung und ohne Rückblick auf die Form des Integrales einer Differentialgleichung mit constanten Coefficienten hätten gelangen können, aus der Gleichung (508) durch successives Differenziren die Werthe von $P, P', P'', \ldots P^{(m)}$ ableitend, diese sodann der Reihe nach mit $(-\alpha)^m$, $\binom{m}{1}(-\alpha)^{m-1}$, $\binom{m}{2}(-\alpha)^{m-2}$, .... $\binom{m}{1}(-\alpha)$, 1 multiplizirend und addirend — eine Rechnung, die wir für den Fall $m=2$ bereits zu Anfang dieses Paragraphes durchgeführt, hier aber, wie wir glauben mit einigem Vortheile, umgangen haben. Offenbar ist endlich die besprochene Gleichung (517) in $P$, als eine in $x$ betrachtete, dem Coefficientenbaue nach nicht complizirter als die ursprüngliche $P=0$, wodurch unsere frühere Behauptung gerechtfertigt erscheint.

Würden nicht sämmtliche particuläre Integrale (503) gleichzeitig in die vorgelegte Gleichung eingeführt, sondern nur Eines derselben, etwa:

$$y_1=C_1\int_{u'}^{u''}e^{ux}\,V_1\,du,$$

so bekämen wir, wie schon erörtert, $P=C_1P_1$ unter der Form (505), oder, wie wir auch kürzer schreiben können:

$$P_1=e^{\alpha x}.R,$$

und sodann in Gemässheit der sehr bekannten Bezeichnungen des §. 2:

$$\frac{M}{N} = \frac{\alpha R + R'}{R},$$

ganz so wie im §. 4 dieses Abschnittes. Die Coefficienten der neuen Gleichung würden also, w
$R$ ein Polynom vom $(m-1)^{ten}$ Grade nach $x$ ist, im Allgemeinen gegen jene der vorgelegten Gleichu
um $(m-1)$ Einheiten im Grade nach $x$ höher sein; nichtsdestoweniger aber würde die, aus der a
mäligen Einführung der noch übrigen particulären Integrale (503) hervorgehende Endgleichung Coe
cienten besitzen müssen, deren Grad den der Coefficienten der ursprünglich gegebenen Gleichung ni
zu überschreiten vermöchte.

Endlich hätten wir auch in die vorgelegte Gleichung ein einzelnes particuläres Integral a
die Weise einführen können, dass wir in derselben zwar die Summe der Ausdrücke (503) statt $y$ su
stituirt, allein nur Eine der Constanten, etwa $C_1$, als ganz willkürlich angesehen, die übrigen hing
gen $C_2$, $C_3$, ... $C_m$ so gewählt hätten, dass in der Gleichung (508):

$$B = C = \ldots\ldots\ldots\ldots = H = 0$$

würden. Diess ist aber immer möglich, da uns die Gleichungen (509), für verschwindende Werthe d
ebengenannten Constanten, jedenfalls auch Werthe für:

$$\frac{C_2}{C_1} = c_2, \quad \frac{C_3}{C_1} = c_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{C_m}{C_1} = c_m$$

zu liefern geeignet sind. Wir bekommen aber unter dieser Voraussetzung für $P$ statt der Form (5(
folgende andere:

$$P = A.e^{\alpha x}$$

und auf sehr bekannte Weise weiterverfahrend:

$$\frac{P'}{P} = \frac{M}{N} = \alpha,$$

sohin als neue Differentialgleichung:

$$P' - \alpha P = P_{(1)} = 0, \tag{518}$$

in welcher offenbar die höchste Gradzahl der Coefficienten jene der vorgelegten keinesfalls überschr
ten kann, und die, ausser den particulären Integralen der letzteren, noch folgendes andere besitz
wird:

$$C_1 \int_{-\infty}^{\alpha} e^{ux} \left[V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_m V_m\right] du = C_1 \int_{-\infty}^{\alpha} e^{ux}\, V_{(1)}\, du, \tag{519}$$

wo $c_2$, $c_3$, ... $c_m$, wie schon gesagt, keine willkürlichen Constanten vorstellen, sondern aus d
Gleichungen (509) hervorgehen, indem man in letzteren die Constanten $B$, $C$, ... $H$ der Nu
gleichsetzt.

Wir könnten nun, auf dieselbe Weise, wie wir in die Gleichung: $P = 0$ das particul
Integral (519) eingeführt haben, in die neu erhaltene Gleichung $P_{(1)} = 0$ abermals ein particulä
Integral:

$$C_2\int_{-\infty}^{\beta} e^{ux}\,V_{(2)}\,du$$

einführen, und bekämen so eine neue Gleichung:

$$P'_{(1)} - \beta P_{(1)} = P_{(2)} = 0$$

oder mit Rücksicht auf (518):

$$P'' - (\alpha+\beta)\,P' + \alpha\beta.P = P_{(2)} = 0; \tag{520}$$

und wenn wir auch in diese Gleichung ein ähnliches particuläres Integral:

$$C_3\int_{-\infty}^{\gamma} e^{ux}\,V_{(3)}\,du$$

einführen, so gelangen wir eben so zur Gleichung:

$$P''' - (\alpha+\beta+\gamma)\,P'' + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\,P' - \alpha\beta\gamma.P = P_{(3)} = 0. \tag{521}$$

Wir erkennen bereits ohne Mühe das hier stattfindende Gesetz: Wird nämlich aus einer vorgelegten Gleichung $P=0$ von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung eine neue Gleichung abgeleitet wie:

$$P^{(r)} + A_1 P^{(r-1)} + A_2 P^{(r-2)} + \dots\dots\dots + A_{r-1}P' + A_r P = 0, \tag{522}$$

in der $A_1, A_2, \dots A_r$ ganz beliebige constante Zahlen vorstellen, deren Coefficienten sich also offenbar nicht über die höchste Gradzahl der Coefficienten in der vorgelegten Gleichung zu erheben vermögen, die aber selbst gegen die letztere um $r$ Einheiten in der Ordnungszahl höher ist, so werden sämmtliche $r$ particuläre Integrale, welche dieselbe ausser den $n$ particulären Integralen der vorgelegten Gleichung $P=0$ besitzt, in der Form:

$$C_h\int_{-\infty}^{\alpha_h} e^{ux}\,V_{(h)}\,du \tag{523}$$

auftreten, wo $\alpha_h$ Eine der $r$ Wurzeln: $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ der algebraischen Gleichung:

$$\alpha^r + A_1\alpha^{r-1} + A_2\alpha^{r-2} + \dots\dots\dots + A_{r-1}\alpha + A_r = 0 \tag{524}$$

vorstellt, $V_{(h)}$ aber eine Function von $u$ bedeutet, welche der zur Integration der ursprünglich Vorgelegten (492) dienenden Hilfsgleichung (500) Genüge leistet und hieraus ersehen wir auch in diesem Falle, dass die neu eingeführten particulären Integrale namentlich dann zu keiner Complication der Coefficienten Veranlassung geben, wenn sie sich den alten, in der Gleichung bereits vorhandenen, in der Gestalt eines bestimmten Integrales vorkommenden der Form nach ganz genau anschliessen, mit demselben $V$ nämlich unter dem Integralzeichen und nur mit anderen, sonst aber beliebigen Integrationsgränzen.

## Bestimmte ...

### (Fortsetzung.)

Die im nächstvorhergehenden Paragraphe zur Sprache gebrachte analytische Thatsache, dass man allgemein die Integration einer Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung mit Coefficienten vom $m^{ten}$ Grade abhängig machen könne, von der Integration einer anderen Differentialgleichung von der $m^{ten}$ Ordnung mit Coefficienten vom $n^{ten}$ Grade, dass man also speciell eine jede Gleichung mit Coefficienten von der Form $a+bx$, welche auch immer ihre Ordnungszahl sein mag, und selbst dann, wenn die darin vorkommenden Differentialquotienten gebrochene Differentiationsexponenten tragen, auf eine Gleichung der ersten Ordnung zurückzuführen vermöge, was wir auch im II. Abschnitte dieses Werkes gethan haben, dass man ferner die Integration einer Differentialgleichung mit Coefficienten wie $a+bx+cx^2$ durch die einer anderen sich nur zur zweiten Ordnung erhebenden zu bewerkstelligen im Stande sei — diese Thatsache veranlasst uns zu weiteren Forschungen über die Form der Genüge leistenden particulären Integrale. Wenn nämlich der Coefficientenbau irgend einer vorgelegten Gleichung, z. B. der:

$$(525)\quad \begin{aligned}&(a_n+b_n x+c_n x^2)y^{(n)}+(a_{n-1}+b_{n-1}x+c_{n-1}x^2)y^{(n-1)}+(a_{n-2}+b_{n-2}x+c_{n-2}x^2)y^{(n-2)}\\&+\dots\dots\dots+(a_2+b_2x+c_2x^2)y''+(a_1+b_1x+c_1x^2)y'+(a_0+b_0x+c_0x^2)y=0,\end{aligned}$$

in Bezug auf ihre Gradzahlen sowohl, als auch auf ihre Zusammensetzung aus einfachen Factoren, ingleichen in Bezug auf den gewissen $k$ genannten Exponenten, manches Wichtige über die Natur des Integrales zu lehren vermag, wenn man ferner, den Ergebnissen des nächstvorhergehenden Paragraphes zufolge, die dieser vorliegenden Gleichung genügenden Werthe unter der Form:

$$(526)\quad y=\int_{u'}^{u''} e^{ux}\,.\,V\,du,$$

vorauszusetzen berechtigt ist und zur Bestimmung von $V$ die Differentialgleichung:

$$(527)\quad U_2\frac{d^2V}{du^2}+\frac{dV}{du}\left[2\frac{dU_2}{du}-U_1\right]+V\left[\frac{d^2U_2}{du^2}-\frac{dU_1}{du}+U_0\right]=0$$

bekömmt, wo:

$$(528)\quad \begin{aligned}U_0&=a_n u^n+a_{n-1}u^{n-1}+a_{n-2}u^{n-2}+\dots\dots\dots+a_1u+a_0\\U_1&=b_n u^n+b_{n-1}u^{n-1}+b_{n-2}u^{n-2}+\dots\dots\dots+b_1u+b_0\\U_2&=c_n u^n+c_{n-1}u^{n-1}+c_{n-2}u^{n-2}+\dots\dots\dots+c_1u+c_0,\end{aligned}$$

ist, und deren Integral offenbar in der Form:

$$(529)\quad V=C_1V_1+C_2V_2$$

vorhanden ist, während $\frac{C_2}{C_1}$ und die Integrationsgränzen $u'$ und $u''$ die Gleichung:

unabhängig von $x$ erfüllen müssen, so steht zu erwarten, dass auch der Coefficientenbau der Hilfsgleichung (527) zunächst über die Form der ihr genügenden beiden particulären Integrale $V_1$ und $V_2$, und sodann mittelbar über den Bau derjenigen, die der Vorgelegten (525) von der $n^{ten}$ Ordnung zugehören, werthvolle Aufschlüsse liefern werde. Dem ist auch wirklich so, und wir werden an diesem Orte die *aus dem Baue der Hilfsgleichung ableitbaren Folgerungen*, die sich ohne sonderliche Rechnungsentwicklungen ergeben, und vermöge der Bereitwilligkeit, mit welcher sie so zu sagen in die Augen springen, füglich zur Formenlehre zu zählen sind, der Betrachtung unterwerfen. Wir werden hiebei dieselbe Ordnung wie in unseren früheren Forschungen beobachten und demzufolge:

*Erstens:* den *Coefficientenbau der Hilfsgleichung in Bezug auf die Gradzahlen derselben* berücksichtigen, und das, was daraus in Bezug auf die Form des Integrales der (527) zunächst erschlossen werden kann, zur Sprache bringen. Dann wollen wir

*Zweitens:* auch der *Zusammensetzung der Coefficienten aus einfachen Factoren* von der Form $u - a$ in ähnlicher Weise unsere Aufmerksamkeit zuwenden, und endlich zugleich

*Drittens:* das, was aus den *Werthen der Exponenten* $k$, die zu den einzelnen Factoren $u - a$ gehören, gefolgert werden kann, berücksichtigen.

Wenden wir uns also zur besprochenen Hilfsgleichung (527). Die Gradzahlen ihrer Coefficienten, die die Zahl $n$ nicht überschreiten, hängen von denen der $U_2$, $U_1$, $U_0$ genannten Polynome (528) ab, deren Ansicht lehrt, dass eine Ansteigung in den Anfangscoefficienten der (525) auch eine solche in den Anfangscoefficienten ihrer Hilfsgleichung zur unmittelbaren Folge habe, mit dem Unterschiede jedoch, dass, wenn in der ersteren die auf die einzelnen Coefficientenpaare repartirte Ansteigung ein unter der Einheit liegender Bruch ist, in der anderen ebenfalls auf das Coefficientenpaar daraus eine Ansteigung, die jedenfalls die Einheit überschreitet und oft einen beträchtlichen Zahlenwerth hat, hervorgeht und umgekehrt. Die specielle Ansteigung von Einer Einheit aber pflanzt sich von der einen auf die andere der beiden Gleichungen unverändert fort. Das Gesetz der Vererbung dieser Ansteigungen ist leicht zu finden, und heisst mit Einem Worte: *Eine Anfangssteigung von* $\frac{1}{r}$ *Einheiten in der vorgelegten Gleichung verursacht eine Anfangssteigung von* $r$ *Einheiten in der Hilfsgleichung und umgekehrt.* — Geben wir, um mit mehr Bequemlichkeit zu den Folgen dieses analytischen Umstandes zu gelangen, einige Beispiele. Wenn etwa:

$$c_n = c_{n-1} = c_{n-2} = \dots\dots\dots = c_1 = 0,$$

$c_0$ aber von der Nulle verschieden vorausgesetzt wird, so handelt es sich jetzt um die Gleichung:

$$(a_n + b_n x)\, y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x)\, y^{(n-1)} + \dots + (a_1 + b_1 x)\, y' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2)\, y = 0, \quad ($$

bei welcher ein Steigen von $\frac{1}{n}$ Einheiten auf das Coefficientenpaar zu gewahren ist. Die mit ihr vergli-

chene Hilfsgleichung besitzt Coefficienten, die bezüglich der $0^{ten}$, $n^{ten}$ und $n^{ten}$ Ordnung angehören, mindestens so lange als $b_n$ und $a_n$ nicht der Nulle gleich sind. Wir gewahren also hier ein Steigen um $n$ Einheiten bei dem ersten und ein Fortschreiten im Niveau bei dem zweiten Coefficientenpaare. Diess deutet, nach den bisherigen Ergebnissen der Formenlehre, auf die folgenden Formen der particulären Integrale $V_1$ und $V_2$:

$$V_1 = e^{A_1 u^{n+1} + B_1 u^n + \cdots} W_1, \qquad V_2 = e^{A_2 u} W_2, \tag{532}$$

allwo $W_1$ und $W_2$ Functionen von $u$ sind, die zur ersten Klasse gehören. Es lässt sich nun zeigen, dass es in diesem Falle genüge ein einziges particuläres Integral, $V_1$ nämlich, der Hilfsgleichung zu besitzen, und dass aus ihm alle, $n$ an der Zahl, der vorgelegten Differentialgleichung (525) Genüge leistenden Werthe hervorzugehen vermögen. Man wird nämlich der (530), unabhängig von $x$, in diesem Falle offenbar Genüge leisten $V = V_1$ nehmend und dem $u$ einen der $(n+1)$ Werthe ertheilend, die die Gleichung:

$$A_1 u^{n+1} = -\infty, \qquad \text{oder} \qquad u^{n+1} = \pm\infty, \tag{533}$$

je nachdem $A_1$ negativ ist oder positiv, erfüllen — Werthe, die in der Reihe:

$$u = \mu_1 \infty, \quad \mu_2 \infty, \quad \mu_3 \infty, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mu_{n+1} \infty$$

enthalten sind, unter $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n+1}$ die $(n+1)$ Wurzeln der Gleichung: $\mu^{n+1} = \pm 1$ verstanden. Hieraus folgt, dass das allgemeine Integral der Gleichung (531) vorkomme unter folgender Form:

$$y = C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{ux} V_1 du + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{ux} V_1 du + \ldots\ldots + C_{n+1} \int_0^{\mu_{n+1} \infty} e^{ux} V_1 du, \tag{534}$$

die offenbar ein allgemeines Integral repräsentirt, weil die darin vorfindigen Constanten, $n+1$ an der Zahl, nur an die einzige Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{n+1} = 0 \tag{535}$$

geknüpft sind. Wir sehen aus diesem Beispiele nicht nur, dass es Fälle geben könne, wo ein einziges particuläres Integral der Hilfsgleichung zur vollständigen Durchführung der Integration zureicht, sondern auch, dass man die Integrationsgränzen, respective Wurzeln der Gleichung (530), ermitteln könne, ohne das in dieser Gleichung vorhandene $V$ zu kennen, also aus der blossen Ansicht der Hilfsgleichung, ja auch aus der blossen Ansicht der vorgelegten Differentialgleichung und ohne alle vorgängige Integration. Denn auch den Werth des constanten Coefficienten $A_1$ vermag man sich zu verschaffen, ohne zum wirklichen Integriren zu schreiten, wie im nächsten Paragraphe gezeigt werden soll. Es fällt noch überdiess in die Augen, dass alle particulären Integrale, aus denen das allgemeine (534) zusammengesetzt ist, insoferne vollkommen tadellos seien, als das unter dem Integralzeichen befindliche $V_1$ zwischen den Integrationsgränzen nur endliche Werthe anzunehmen vermag, diese also nie Analogie mit einer divergirenden Reihe gewinnen können, nachdem aus dem Umstande, dass der erste Coefficient der Hilfsgleichung eine Constante ist, überhaupt die Nichtexistenz endlicher Werthe von $u$, welche die Function $V$

und somit auch die $W$ unendlich machen, gefolgert werden kann. Dass ferner die in Rede stehenden $n+1$ particulären Integrale wirklich eben so viele von einander verschiedene Functionen repräsentiren, wird sich auf die zu Ende des II. Abschnittes §. 8 vorgetragene Weise darthun lassen. Dass endlich die hier nothwendig irrationale und namentlich $n^{\text{te}}$ Wurzeln in sich schliessende Form des assymptotischen Integrals der (531) viel einfacher und sohin mit Vortheil durch die (534) ersetzt werden könne, ist in die Augen springend, und mag als neue Bestätigung der schon im vorigen Paragraphe gemachten Bemerkung dienen, nämlich: **das bestimmte Integral und der mit ihm verwandte Differentialquotient mit allgemeiner Ordnungszahl sind die natürlichen Formen der Integrale von Differentialgleichungen mit niedrig gebauten Coefficienten.**

Betrachten wir jetzt als **zweites Beispiel** diejenige Gleichung, die aus der (531) hervorgeht, durch Nullsetzen sämmtlicher mit $b$ bezeichneten Constanten mit Ausnahme von $b_0$, nämlich die:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + a_1 y' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2)\, y = 0. \tag{536}$$

Die ihr entsprechende Hilfsgleichung (527) hat Coefficienten, denen bezüglich die Gradzahlen 0, 0, $n$ angehören, daher auf das Coefficientenpaar eine Ansteigung von $\frac{n}{2}$ Einheiten fällt, während die (536) ein repartirtes Ansteigen von $\frac{2}{n}$ Einheiten auf das Coefficientenpaar biethet. Wir schliessen hieraus auf zwei particuläre Integrale $V_1$ und $V_2$ der gedachten Hilfsgleichung, und zwar:

$$V_1 = e^{A_1 u^{\frac{n+2}{2}} + B_1 u^{\frac{n}{2}} + \cdots}\, W_1, \qquad V_2 = e^{A_2 u^{\frac{n+2}{2}} + B_2 u^{\frac{n}{2}} + \cdots}\, W_2, \tag{537}$$

deren jedes für sich zur Integration benützt werden kann. Denkt man sich nämlich in die zur Bestimmung der Integrationsgränzen dienende Gleichung (530) anstatt $V$ zuvörderst $V_1$ gesetzt, und sodann $u$ unendlich und so gewählt, dass es der binomischen Gleichung:

$$A_1 u^{\frac{n+2}{2}} = \infty \qquad \text{oder} \qquad u^{\frac{n+2}{2}} = \pm \infty \tag{538}$$

genügt, so wird ihr offenbar für jedes $x$ Genüge geleistet, woraus folgt, dass, wenn $\frac{n}{2}$ eine ganze Zahl ist, folgender Ausdruck als, wenn auch nicht allgemeines Integral der (536) niedergeschrieben werden kann:

$$y = C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{ux}\, V_1\, du + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{ux}\, V_1\, du + \ldots\ldots + C_{\frac{n+2}{2}} \int_0^{\mu_{\frac{n+2}{2}} \infty} e^{ux}\, V_1\, du, \tag{539}$$

unter $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{\frac{n+2}{2}}$ die Wurzeln der Gleichung $\mu^{\frac{n+2}{2}} = \pm 1$ verstanden, je nachdem $A_1$ negativ ist, oder positiv, mit der zwischen den Constanten bestehenden Relationsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots\ldots + C_{\frac{n}{2}} + C_{\frac{n+2}{2}} = 0, \tag{540}$$

kraft welcher dieser vorliegende Ausdruck ein Integral mit $\frac{n}{2}$ willkürlichen Constanten darstellt.

Auf dieselbe Weise können wir aber auch mit dem zweiten particulären Integrale $V_2$ der Hilfsgleichung verfahren und erhalten, mit Rücksicht auf den leicht nachweisbaren Umstand, dass $A_2$

und $A_1$ dem Zeichen nach entgegengesetzt sind, einen neuen Ausdruck, der abermals ein Integral mit $\frac{n}{2}$ Constanten repräsentirt, nämlich:

$$y = D_1 \int_0^{\nu_1 \infty} e^{ux} V_2 du + D_2 \int_0^{\nu_2 \infty} e^{ux} V_2 du + \ldots + D_{\frac{n+2}{2}} \int_0^{\nu_{\frac{n+2}{2}} \infty} e^{ux} V_2 du, \tag{541}$$

mit der zwischen den Constanten vorhandenen Relationsgleichung:

$$D_1 + D_2 + D_3 + \ldots\ldots\ldots + D_{\frac{n}{2}} + D_{\frac{n+2}{2}} = 0, \tag{542}$$

und unter $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{\frac{n+2}{2}}$ die Wurzeln der binomischen Gleichung: $\nu^{\frac{n+2}{2}} = \mp 1$ gedacht. Wir schreiben hier $\mp 1$ anstatt des in der Gleichung, welche die Werthe von $\mu$ liefert, ersichtlichen $\pm 1$, weil, wie gesagt, $A_2$ und $A_1$ entgegengesetzte Zeichen tragen. Wäre $n$ eine ungerade Zahl, somit $\frac{n}{2}$ ein Bruch, so hätte man anstatt der beiden Gleichungen $\mu^{\frac{n+2}{2}} = \pm 1$ und $\nu^{\frac{n+2}{2}} = \mp 1$ die einzige $\rho^{n+2} = 1$ aufzustellen, die die beiden ebenerwähnten in sich enthält und die Wurzeln dieser letzteren dermassen in zwei Gruppen zu sortiren, dass die der einen Gruppe der Gleichung $\mu^{\frac{n+2}{2}} = \pm 1$ und die der zweiten Gruppe der $\nu^{\frac{n+2}{2}} = \mp 1$ Genüge leisten. Gelegentlich wird es sich ereignen, dass die Coefficienten $A_1$ und $A_2$ correspondirende imaginäre Werthe haben; in diesem Falle hat man unter $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{\frac{n+2}{2}}$ die Wurzeln der Gleichung: $\mu^{\frac{n+2}{2}} = \sqrt{-1}$ zu verstehen, während eben so $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{\frac{n+2}{2}}$ die Wurzeln der Gleichung $\nu^{\frac{n+2}{2}} = -\sqrt{-1}$ vorstellen.

Falls die Differentialgleichung (525) in ihren Anfangscoefficienten überhaupt Ansteigungen biethet, wird man solcher höchstens zwei Stufen zählen — es werden nämlich Ein oder einige Anfangscoefficienten vom $0^{\text{ten}}$ Grade vorkommen können, dann folgt eine erste Stufe, die durch einen oder etliche Coefficienten vom Grade 1 gebildet wird, und hierauf kommt eine zweite Stufe späterer Coefficienten vom Grade 2. Die $U_2$, $U_1$ und $U_0$ genannten Polynome werden hiebei Gradzahlen $t$, $t+r$, $t+r+s=n$ ausweisen, in Folge deren die Hilfsgleichung für das erste und zweite Coefficientenpaar beziehungsweise Ansteigungen um $r$ und $s$ Einheiten zeigen wird, so oft wenigstens, als $r \gtrless s$ ist. Für $r < s$ wird beiden Coefficientenpaaren die Repartitionszahl $\frac{r+s}{2}$ entsprechen. Im ersteren Falle schreiben wir ein Integral nieder unter der Form:

$$\begin{aligned} y = \; & C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{ux} V_1 du + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{ux} V_1 du + \ldots\ldots + C_{r+1} \int_0^{\mu_{r+1} \infty} e^{ux} V_1 du \\ & + D_1 \int_0^{\nu_1 \infty} e^{ux} V_2 du + D_2 \int_0^{\nu_2 \infty} e^{ux} V_2 du + \ldots\ldots + D_{s+1} \int_0^{\nu_{s+1} \infty} e^{ux} V_2 du, \end{aligned} \tag{543}$$

mit den zwei Beziehungsgleichungen zwischen den Constanten:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots\ldots + C_{r+1} &= 0 \\ D_1 + D_2 + D_3 + \ldots\ldots\ldots + D_{s+1} &= 0, \end{aligned} \tag{544}$$

ferner mit Werthen von $V_1$ und $V_2$, von folgender Gestalt:

$$V_1 = e^{A_1 u^{r+1} + B_1 u^r + \dots} \, W_1, \qquad V_2 = e^{A_2 u^{s+1} + B_2 u^s + \dots} \, W_2 \tag{545}$$

$\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{r+1}$ sind Wurzeln einer binomischen Gleichung wie $\mu^{r+1} = \pm 1$, je nachdem $A_1$ negativ ist, oder positiv; ingleichen sind $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_{s+1}$ Wurzeln einer binomischen Gleichung wie $\nu^{s+1} = \pm 1$, je nachdem $A_2$ negativ ist, oder positiv. Auch im zweiten Falle, dem der Repartitionszahl $\frac{r+s}{2}$ nämlich, ist die Form des Integrals eine der (543) ähnliche und repräsentirt, so wie diese, ein Integral mit $r+s$ willkürlichen Constanten, also nicht das allgemeine, sondern nur ein particuläres, durch den Zusatz von $n-r-s=t$ particulären Werthen, mit eben so vielen willkürlichen Constanten, zu ergänzendes. Ist daher $t=n$, d. h. ist das Polynom $U_2$ bereits vom $n^{ten}$ Grade, so gewinnt man auf diesem Wege gar kein Integral und also namentlich dann gar keines, wenn es in der vorgelegten Differentialgleichung vom ersten Coefficienten angefangen gar kein Ansteigen gibt, sondern nur ein Fortschreiten im Niveau, oder ein Abfallen gegen den letzten. Dagegen liefern die in einem solchen Falle $n$ an der Zahl vorhandenen Factoren des ersten Coefficienten $U_m$ je Ein particuläres Integral in einer anderen Fundamentalform, der nämlich eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, und hierdurch ist der Mangel der früher erwähnten Ansteigungen ausgeglichen. Diess soll etwas später zur Sprache gebracht werden.

Jetzt können wir den allgemeinen Fall einer gegebenen Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung mit Coefficienten vom $m^{ten}$ Grade, in Bezug auf die in ihrer Hilfsgleichung vorhandenen Ansteigungen der Betrachtung unterziehen. Die Gleichung ist eben die (492) des vorhergehenden Paragraphes, nämlich:

$$(a_n + b_n x + \dots + k_n x^m) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x + \dots + k_{n-1} x^m) y^{(n-1)} + \dots + (a_0 + b_0 x + \dots + k_0 x^m) y = 0; \tag{546}$$

ihre Hilfsgleichung aber ist:

$$\begin{aligned}
& V^{(m)} \,.\, U_m \\
+ & V^{(m-1)} \left[ \binom{m}{1} U'_m - U_{m-1} \right] \\
+ & V^{(m-2)} \left[ \binom{m}{2} U''_m - \binom{m-1}{1} U'_{m-1} + U_{m-2} \right] \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ & V'' \left[ \binom{m}{2} U^{(m-2)}_m - \binom{m-1}{2} U^{(m-3)}_{m-1} + \binom{m-2}{2} U^{(m-4)}_{m-2} - \dots \pm U_2 \right] \\
+ & V' \left[ \binom{m}{1} U^{(m-1)}_m - \binom{m-1}{1} U^{(m-2)}_{m-1} + \binom{m-2}{1} U^{(m-3)}_{m-2} - \dots \pm 2U'_2 \mp U_1 \right] \\
+ & V \left[ U^{(m)}_m - U^{(m-1)}_{m-1} + U^{(m-2)}_{m-2} - \dots \pm U''_2 \mp U'_1 \pm U_0 \right] = 0,
\end{aligned} \tag{547}$$

und man überzeugt sich leicht auf dem betretenen Wege, dass

Erstens: Wenn der erste Coefficient $U_m$ dem $n^{ten}$ Grade angehörig ist, Ansteigungen weder in der Vorgelegten noch in der Hilfsgleichung vorkommen können, der gegenwärtig eingeschlagene Weg also gar keine particulären Integrale in Gestalt von bestimmten Integralen, deren Grenzen unmittelbar angegeben werden können, zu liefern vermögend sei.

**Zweitens:** Wenn $U_m$, durch das Verschwinden einiger seiner höchsten Glieder, sich auf eine niederere Gradzahl $h < n$ zurückzieht, dann erscheinen in der Hilfsgleichung nothwendig Ansteigungen, im Gesammtbetrage von gerade $n-h$ Einheiten, denen $n-h$ particuläre Integrale der Differentialgleichung, in Form von bestimmten Integralen mit unmittelbar angebbaren Grenzen 0 und $\infty$ und Relationsgleichungen zwischen den Integrationsconstanten, angehören.

**Drittens:** Die Ansteigungszahlen der Hilfsgleichung sind die reciproken Werthe der entsprechenden Ansteigungszahlen der vorgelegten Differentialgleichung, und ist allgemein in der Letzteren eine auf $r$ Coefficientenpaare ausgedehnte Ansteigungszahl $\frac{s}{r}$ vorhanden, so entspricht ihr in der Hilfsgleichung eine auf $s$ Coefficientenpaare ausgedehnte Ansteigung, welche auf das einzelne Paar die Repartitionszahl $\frac{r}{s}$ liefert. Diess führt in der Regel zu mehreren Gruppen particulärer, Genüge leistender Werthe, und namentlich, wenn $\frac{r}{s}$ eine ganze Zahl ist, zu $s$ solchen, mit Beziehungsgleichungen zwischen den Integrationsconstanten ebenfalls $s$ an der Zahl. — Fassen wir, der grösseren Klarheit wegen, einige der einfachsten Fälle ins Auge:

*a)* In der Differentialgleichung befinde sich bei einem einzelnen Coefficientenpaare die Ansteigung um die Einheit in der Gradzahl, was nach unseren Regeln auf Ein particuläres Integral wie:

$$y = e^{\alpha x^2 + \beta x}\, Q \tag{548}$$

den Schluss gestattet. Dem entsprechend hat auch die Hilfsgleichung, an der durch die wohlbekannte Etiquette bestimmten Stelle Ein Coefficientenpaar mit der Ansteigung 1, nur ist zu bemerken, dass nach eben dieser erwähnten Etiquette, die Rangordnung der particulären Integrale sich in der Hilfsgleichung umkehre, so, dass diejenigen unter ihnen, die in der einen vorangehen, indem sie den ersten Coefficienten ihre Merkmale aufdrücken, in der anderen ganz zuletzt kommen. Wegen dieser Ansteigung 1 entspricht aber offenbar dem $V$ Ein Werth von folgender Gestalt:

$$V = e^{\lambda u^2 + \varkappa u}\, W, \tag{549}$$

welcher die Differentialgleichung (547) erfüllt. Zieht man überdem Werthe von $u$ aus der Gleichung $\lambda u^2 = -\infty$, welche für positive $\lambda$ die Wurzeln $+\infty\sqrt{-1}$, $-\infty\sqrt{-1}$, für negative $\lambda$ aber die Wurzeln $+\infty$ und $-\infty$ hat, so verschwinden für solche $u$ auch sämmtliche Glieder der Gleichung (498), die nicht unter einem Integralzeichen erscheinen, und zwar jedes für sich, d. h. man hat:

$$\begin{aligned}
0 &= U_m\; V \\
0 &= U_{m-1} V - (U_m\; V)' \\
0 &= U_{m-2} V - (U_{m-1} V)' + (U_m V)'' \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 &= U_2\; V - (U_3\; V)' + (U_4 V)'' - \dots\dots \mp (U_m\; V)^{(m-2)} \\
0 &= U_1\; V - (U_2\; V)' + (U_3 V)'' - \dots\dots \mp (U_{m-1} V)^{(m-2)} \pm (U_m V)^{(m-1)};
\end{aligned} \tag{550}$$

wählt man sie daher zu Integrationsgrenzen $u'$ und $u''$, so wird $\int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V du$ der vorgelegten Diffe-

rentialgleichung als particuläres Integral Genüge leisten. Der obangeführte Werth (548) von $y$ wird sich daher auch auf folgende Weise schreiben lassen:

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda u^2 + (x+\varkappa)u}\, W du, \qquad \text{oder} \qquad y = \int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\lambda u^2 + (x+\varkappa)u}\, W.du, \tag{551}$$

je nachdem $\lambda$ negativ ist, oder positiv, und wirklich lässt sich die Identität der beiden Formen (548) und (551) vermittelst des Laplace'schen Integrals allgemein auf dieselbe Weise darthun, wie diess bereits in einem speciellen Falle, s. II. Abschnitt, S. 99, geschehen ist.

*b)* Finde sich in der vorgelegten Differentialgleichung die Ansteigung von Einer Einheit auf zwei Coefficientenpaare, somit von einer halben Einheit auf das Paar, was, wie wir wissen, auf eine Gruppe von zwei particulären Integralen den Schluss verstattet, die, in der Form $e^{\int \varphi dx}$ gedacht, $\varphi$'s biethen von der Gradzahl $\frac{1}{2}$. Die Hilfsgleichung (547) besitzt, dem entsprechend, Ein Coefficientenpaar mit der Steigung 2. Diesem gehört ein Werth von $V$ an, der die Gestalt:

$$V = e^{\vartheta u^3 + \varkappa u^2 + \lambda u}\, W \tag{552}$$

trägt. Wählt man ferner den Werth von $u$ aus den drei Wurzeln der Gleichung $\vartheta u^3 = -\infty$, welche man mit $\mu_1 \infty$, $\mu_2 \infty$, $\mu_3 \infty$ bezeichnen kann, unter $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ die Wurzeln der $\mu^3 = \pm 1$ verstanden, so ist auch den Gleichungen (550) Genüge geleistet. Es tritt daher folgender dreigliedrige Werth als Integral der vorgelegten Differentialgleichung auf:

$$y = C_1 \int_0^{\mu_1\infty} e^{\vartheta u^3 + \varkappa u^2 + (\lambda + x)u}\, W.du + C_2 \int_0^{\mu_2\infty} e^{\vartheta u^3 + \varkappa u^2 + (\lambda + x)u}\, W du + C_3 \int_0^{\mu_3\infty} e^{\vartheta u^3 + \varkappa u^2 + (\lambda + x)u}\, W du \tag{553}$$

mit der Beziehungsgleichung zwischen den Constanten:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0, \tag{554}$$

kraft welcher letzteren eben dieser Ausdruck ein Integral mit zwei willkürlichen Constanten repräsentirt, welches offenbar der Summe der beiden früher erwähnten particulären Integrale, die wegen der Ordnungszahl $\frac{1}{2}$ des $\varphi$ nothwendig irrational sind, identisch gleich ist, wenn auch der mit den Transformationen, die unsere Lehre von den Differentialgleichungen in sich schliesst, minder Vertraute die Verwandlung der einen rational erscheinenden, in die andere irrationale Form zu bewerkstelligen ausser Stande sein sollte.

*c)* Entspräche in der gegebenen Gleichung $r$ Coefficientenpaaren eine Ansteigung 1, folglich Einem Paare die Ansteigung $\frac{1}{r}$, woraus wir $r$ particuläre Integrale unter der Form $e^{\int \varphi dx}$ erschliessen, mit irrationalen, der Gradzahl $\frac{1}{r}$ angehörigen $\varphi$, so besitzt, dem entsprechend, die Hilfsgleichung (547) ein einziges Coefficientenpaar mit der Ansteigung $r$, dem ein einziger Werth von $V$, wie:

$$V = e^{\vartheta u^{r+1} + \varkappa u^r + \ldots + \lambda u}\, W \tag{555}$$

angehört, der aber dennoch sämmtliche $r$ irrationale particuläre Integrale liefert, in Gestalt eines $(r+1)$-gliedrigen Ausdruckes:

$$
\begin{aligned}
&+ C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{\vartheta u^{r+1} + x u^r + \ldots + (\lambda + x) u} \, W . du \\
(556) \qquad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ C_{r+1} \int_0^{\mu_{r+1} \infty} e^{\vartheta u^{r+1} + x u^r + \ldots + (\lambda + x) u} \, W . du ,
\end{aligned}
$$

mit der zwischen den Constanten bestehenden Relationsgleichung:

$$
(557) \qquad C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots\ldots + C_{r+1} = 0 ,
$$

und unter $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{r+1}$ die Wurzeln der Gleichung $\mu^{r+1} = \pm 1$ verstanden.

*d)* Beträgt eine in der vorgelegten Differentialgleichung vorkommende Ansteigung allgemein $s$ Einheiten auf $r$ Coefficientenpaare, somit $\frac{s}{r}$ Einheiten auf das Paar, woraus wir auf das Dasein von $r$ particulären Integralen unter der Form $e^{\int \varphi dx}$ schliessen, allwo $\varphi$ der Gradzahl $\frac{s}{r}$ angehört, so dehnt sich in der Hilfsgleichung (547) eine Ansteigung von $r$ Einheiten auf $s$ Coefficientenpaare aus. Sohin bestehen Werthe von $V$, die ihr Genüge leisten, $s$ an der Zahl, angehörig der Form:

$$
(558) \qquad V = e^{\vartheta u^{\frac{r}{s}+1} + \ldots\ldots} \, W ;
$$

die ihnen zugehörigen Werthe des Coefficienten $\vartheta$ gehen aus einer Gleichung des $s^{ten}$ Grades hervor, daher auch einige von ihnen, oder alle imaginär sein können. Zur Bestimmung von $u$ dienen daher jetzt lauter Gleichungen wie $\vartheta u^{\frac{r}{s}+1} = -\infty$, welche man nicht immer und namentlich dann nicht, wenn $\vartheta$ imaginär ist, durch die $u^{\frac{r}{s}+1} = \pm \infty$ wird ersetzen können, deren Wurzeln man ferner oft, und namentlich dann, wenn $r$ durch $s$ nicht theilbar ist, genöthigt sein wird aus einer einzigen Gleichung wie: $u^{r+s} = g . \infty$, wo $g$ auch imaginär sein kann, zu suchen und dann unter die übrigen gehörig zu vertheilen, wonach man auf die vielgeübte Weise zu Gruppen, $s$ an der Zahl von particulären Werthen, mit ebensovielen Relationsgleichungen zwischen den Constanten, mit denen die einzelnen Glieder multiplizirt erscheinen, gelangen wird.

*e)* Das allgemeine Integral bekömmt man aber offenbar auf diesem Wege nur dann, wenn $U_m$ dem $0^{ten}$ Grade angehört, d. h. eine Constante ist. Die Gradzahl $h$ von $U_m$ verringert die Anzahl der auf diesem Wege auffindbaren particulären Integrale gerade um $h$ Einheiten, so dass uns dieser Coefficient so zu sagen den Ersatz von $h$ particulären Integralen schuldig ist, den er auch wirklich leistet und zwar, wie wir sehen werden, in Gestalt von Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl.

## §. 21.

## Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl.

Es ist noch übrig den Bau der Hilfsgleichung in Bezug auf die Zusammensetzung ihrer Coefficienten aus einfachen Factoren, besonders des ersten unter ihnen, nämlich $U_m$, ins Auge zu fassen, und dasjenige zu erörtern, was sich sowohl aus der Beschaffenheit dieses Baues aus einfachen Factoren, als auch aus dem Werthe des gewissen, stets mit $k$ bezeichneten Exponenten, an einfachen, bereitwillig, ohne sonderliche Rechnungsentwicklungen hervorgehenden Folgerungen ableiten lässt.

Stellen wir uns also vor allem anderen den ersten Coefficienten $U_m$ in solche einfache Factoren von der Form $(u - \mathfrak{a})$ zerlegt vor. Jede der Wurzeln der Gleichung $U_m = 0$ werde ferner, falls sie eine wiederholte Wurzel derselben ist, substituirt in die folgenden Coefficienten, um ihr allenfalls stattfindendes Nullwerden für einen solchen Werth zu erproben, und daraus die Anzahlen der Divisoren $(u - \mathfrak{a})$ in dem ersten und den darauffolgenden Coefficienten zu ermitteln, damit man das gewisse, den Coefficientenbau in Bezug auf solche Factoren umspannende Polygon construiren, und daraus die Art des Vorhandenseins von Factoren oder Divisoren $u - \mathfrak{a}$, in den einzelnen particulären Integralen nach den dafür bestehenden Regeln erschliessen könne. Diese Arbeit denken wir uns in Bezug auf alle von einander verschiedenen Factoren $u - \mathfrak{a}$ des Polynomes $U_m$ durchgeführt.

Wir beginnen bei dem einfachsten und gewöhnlichsten der Fälle, die sich ereignen können, indem wir einen einzigen Factor $(u - \mathfrak{a})$ im ersten Coefficienten voraussetzen, während der zweite, in der Regel wenigstens, davon frei gedacht wird. Es deutet diess, wie wir wissen, auf einen Divisor $(u - \mathfrak{a})^k$ Eines particulären Integrales für $V$, allwo $k$ seinen Werth aus der Gleichung:

$$k = - \frac{U_{m-1}}{U_m} (u - \mathfrak{a}) \Big\}_{\mathfrak{a}} + 1 \tag{559}$$

zieht. Dieses, unter der Form:

$$V = \frac{W}{(u - \mathfrak{a})^k} \tag{560}$$

erscheinende particuläre Integral, wird für $u = \mathfrak{a}$, je nach der speciellen Beschaffenheit des Exponenten $k$, entweder Null oder unendlich, jedenfalls aber hat die Reihe:

$$V, \quad V', \quad V'', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad V^{(m-1)}, \quad V^{(m)}$$

die Eigenschaft eine steigende Reihe zu sein von Gliedern, die für $u = \mathfrak{a}$ verschiedenen Ordnungen angehören, und es findet namentlich von jedem Gliede auf das nächstfolgende ein Steigen statt um die Einheit in der Ordnungszahl, so, dass ihnen also bezüglich die Ordnungszahlen:

$$k, \quad k+1, \quad k+2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad k+m-1, \quad k+m$$

angehören. Hieraus folgt, dass von folgender anderen Reihe:

$$U_0 V, \quad (U_1 V)', \quad (U_2 V)'', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (U_{m-1} V)^{(m-1)}, \quad (U_m V)^{(m)},$$

unter den oben gemachten Voraussetzungen, die Ordnungszahlen bezüglich:

$$k, \quad k+1, \quad k+2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad k+m-1, \quad k+m-1$$

seien. Diess bringt Aufschluss über die Art, wie der vorgedachte Werth (560) von $V$ der Hilfsgleichung, die wir uns in folgender Gestalt vorstellen wollen:

$$U_0 V - (U_1 V)' + (U_2 V)'' - \ldots\ldots + (-1)^{m-1} (U_{m-1} V)^{(m-1)} + (-1)^m (U_m V)^{(m)} = 0, \tag{561}$$

Genüge leiste. Ihre der höchsten, $(k+m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung angehörigen zwei Glieder:

$$(U_m V)^{(m)} - (U_{m-1} V)^{(m-1)} \tag{562}$$

reduziren sich, aggregirt, durch Aufhebung der höchsten Bestandtheile, auf eine Grösse der nächstniedrigeren Ordnung $k+m-2$ und diess zwar nothwendigerweise, weil sonst an keine fernere Aufhebung und somit auch an keine Reduction auf Null zu denken ist. Das hinzugefügte nächste, ebenfalls der Ordnung $(k+m-2)$ angehörige Glied ermöglicht, jetzt zugesetzt, eine neue Aufhebung der höchsten Bestandtheile in der Summe:

$$(U_m V)^{(m)} - (U_{m-1} V)^{(m-1)} + (U_{m-2} V)^{(m-2)}, \tag{563}$$

die sohin im allgemeinen der Ordnung $k+m-3$ angehörig ist. Eben so wird jetzt der Ausdruck:

$$(U_m V)^{(m)} - (U_{m-1} V)^{(m-1)} + (U_{m-2} V)^{(m-2)} - (U_{m-3} V)^{(m-3)} \tag{564}$$

der Ordnung $k+m-4$ angehören, und so geht es fort, bis zu dem $m$-theiligen Polynome:

$$(U_m V)^{(m)} - (U_{m-1} V)^{(m-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots \mp (U_2 V)'' \pm (U_1 V)', \tag{565}$$

welches, in Folge einer ganzen Reihe stattfindender Aufhebungen der höchsten Glieder sich auf einen Ausdruck reduziren muss, der für $x=a$ eine Grösse der $k^{\text{ten}}$ Ordnung, in der Regel wenigstens, darstellen muss, damit sich dieselbe, mit dem hinzugesetzten, ebenfalls der $k^{\text{ten}}$ Ordnung angehörigen $U_0 V$, identisch auf Null reduzire, so wie diess die Hilfsgleichung (547) erheischt.

Wenn nun aber die Ausdrücke (562), (563), (564) und (565) nothwendigerweise, damit ein Identischwerden der Hilfsgleichung eintrete, keine höheren Ordnungszahlen, als bezüglich die:

$$k+m-2, \quad k+m-3, \quad k+m-4, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad k$$

biethen können, so vermögen ihnen dagegen in speciellen Fällen immerhin niedrigere zuzukommen; namentlich wird z. B. das Binom (562), das in der Regel von der $(k+m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, eine Herabsetzung auf eine niedrigere, etwa die nächstniedrigere $(k+m-3)^{\text{te}}$ Ordnung erfahren, diess aber nur dann, wenn $U_{m-2}$ den Factor $x-a$ hat, weil, in Ermanglung desselben, das Glied $(U_{m-2} V)^{(m-2)}$ eine Grösse der $(k+m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung darstellen würde, welche weder mit den vorangehenden noch mit den nachfolgenden Gliedern der Hilfsgleichung (561) Null zu geben vermöchte, indem die einen sowohl, als auch die anderen von niedrigerer Ordnung wären. Ja auch eine Reduction auf eine noch niedrigere Ordnungszahl $k+m-4$ ist bei dem Binome (562) möglich, jedoch, aus der eben erwähn-

ten Ursache, nur dann, wenn die Coefficienten $U_{m-1}$ und $U_{m-2}$ beziehungsweise mindestens zwei und Einen Factor $x - a$ besitzen u. s. w. Dasselbe lässt sich von dem Trinome (563), dem Quadrinome (564), endlich auch von dem $m$-theiligen Ausdrucke (565) sagen, welcher Letztere, für den Fall dass in $U_m$ Factoren $x - a$ allgemein $h$ an der Zahl vorhanden wären, eine Herabsetzung erführe seiner ihm in der Regel zukommenden Ordnungszahl $k$ auf $(k - h)$-Einheiten. Hieran knüpft sich die nicht unwichtige Bemerkung, dass, wenn alle $U$ genannten Coefficienten den gemeinschaftlichen Factor $u - a$ besitzen, diess ein Herabgehen in den Ordnungszahlen sämmtlicher Polynome (562), (563), (564) und (565) zur Folge habe, und diess zwar um so viele Einheiten, als Factoren $u - a$ sämmtlichen $U$ gemeinschaftlich sind.

Nachdem wir nun klar gezeigt haben, dass die Ordnungszahlen der Ausdrücke $(U_m V)^{(m)}$, dann der (562), (563), (564) und (565) beziehungsweise höchstens die Werthe:

$$k + m - 1, \quad k + m - 2, \quad k + m - 3, \quad k + m - 4, \quad \ldots\ldots\ldots \quad k$$

erreichen können, während sie in speziellen Fällen auch unter denselben zu bleiben vermögen, bemerken wir, dass eben diese Ausdrücke bezüglich als vollständige Differentialquotienten dastehen. Der erste von ihnen ist ein $m^{\text{ter}}$, der zweite ein $(m - 1)^{\text{ter}}$, der letzte ein vollständiger erster Differentialquotient; sie lassen sich daher bezüglich $m$-mal, $(m - 1)$-mal, ..... 1-mal der Integration unterwerfen und liefern, so behandelt, die folgenden Ausdrücke $m$ an der Zahl:

$$\begin{array}{l} U_m V \\ (U_m V)' - U_{m-1} V \\ (U_m V)'' - (U_{m-1} V)' + U_{m-2} V \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (U_m V)^{(m-1)} - (U_{m-1} V)^{(m-2)} + (U_{m-2} V)^{(m-3)} - \ldots\ldots\ldots\ldots \pm U_1 V, \end{array} \quad (566)$$

die, weil jede Integration, wie man weiss, die Anzahl der im Nenner des zu integrirenden Ausdruckes vorhandenen Factoren $u - a$ um Einen verringert, offenbar in der Regel alle von derselben $(k - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, also alle mindestens um die Einheit niederer in der Ordnungszahl, als das $V$ selbst. In speziellen Fällen jedoch und namentlich dann, wenn nebst dem $U_m$ noch Einer oder einige der anderen mit $U$ bezeichneten Coefficienten mit dem Factor $u - a$ versehen sein sollten, findet eine Herabsetzung der Ordnungszahlen Eines oder einiger dieser Ausdrücke statt. Namentlich, wenn:

$$U_m, \quad U_{m-1}, \quad U_{m-2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad U_{m-r+1}, \quad U_{m-r}$$

Factoren $u - a$ beziehungsweise:

$$r, \quad r - 1, \quad r - 2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1, \quad 0$$

besässen, so wären die eben genannten Ausdrücke (566) nicht sämmtlich der Ordnung $k - 1$, sondern bezüglich den Ordnungen:

$$k - r, \quad k - r + 1, \quad k - r + 2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad k - 2, \quad k - 1$$

angehörig. Eine allgemeine Herabsetzung jedoch sämmtlicher Ordnungszahlen um die bestimmte Anzahl von $k$ Einheiten findet lediglich statt in dem Falle, wo alle $U$ genannten Coefficienten den gemeinschaftlichen Factor $(u-a)^k$ besitzen. Hieraus schliessen wir endlich, dass, während der Form nach:

$$V = \frac{W}{(u-a)^k} \tag{567}$$

gesetzt werden kann, sobald $U_m$ mit dem einzelnen Factor $u-a$ versehen ist, man eben so in der Regel, die integrirt erscheinenden Glieder der (498) ins Auge fassend:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(u)}{(u-a)^{k-1}} = e^{ux} \Big[ & x^{m-1} . U_m \; V \\ & + x^{m-2}\left[U_{m-1} V - (U_m \; V)'\right] \\ & + x^{m-3}\left[U_{m-2} V - (U_{m-1} V)' + (U_m V)''\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + x \;\left[U_2 \; V - (U_3 \; V)' + (U_4 V)'' - \ldots\ldots \mp (U_m \; V)^{(m-2)}\right] \\ & + \;\; U_1 \; V - (U_2 \; V)' + (U_3 V)'' - \ldots\ldots \mp (U_{m-1} V)^{(m-2)} \pm (U_m V)^{(m-1)}\Big], \end{aligned} \tag{568}$$

und überdiess:

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux} \, V . du = \int_{u'}^{u''} \frac{\varphi(u)}{(u-a)^k} du, \quad \text{wobei:} \quad \varphi(u) = e^{ux} W \tag{569}$$

ist, zu schreiben berechtigt sei. Hiebei sind $\varphi(u)$ sowohl, als auch $\psi(u)$ Functionen von $u$, die auch $x$ in sich enthalten, aber für $u = a$ weder unendlich werden noch Null. All' diess besteht in voller Richtigkeit auch dann, wenn $U_m$, $U_{m-1}$, ..... $U_{m-r}$ Factoren $u-a$ beziehungsweise $r$, $r-1$, ..... $1$, $0$ besitzen, nur mit dem Unterschiede, dass in einem solchen Falle Werthe für $V$ von der Form (567) nicht Einer, sondern $r$ an der Zahl vorhanden sind, man also:

$$V = \frac{W_1}{(u-a)^{k_1}}, \quad \frac{W_2}{(u-a)^{k_2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{W_{r-1}}{(u-a)^{k_{r-1}}}, \quad \frac{W_r}{(u-a)^{k_r}} \tag{570}$$

gewinnt, unter $k_1$, $k_2$, ......$k_r$ jetzt die $r$ Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{aligned} \Big\{ & + \frac{(k+m-1)\ldots(k+m-r)}{(u-a)^r} . \quad U_m \\ & - \frac{(k+m-2)\ldots(k+m-r)}{(u-a)^{r-1}}\left[\binom{m}{1} U'_m - U_{m-1}\right] \\ & + \frac{(k+m-3)\ldots(k+m-r)}{(u-a)^{r-2}}\left[\binom{m}{2} U''_m - \binom{m-1}{1} U'_{m-1} + U_{m-2}\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (-1)^{r-1} \frac{k+m-r}{u-a} \left[\binom{m}{r-1} U_m^{(r-1)} - \binom{m-1}{r-2} U_{m-1}^{(r-2)} + \binom{m-2}{r-3} U_{m-2}^{(r-3)} - \ldots\ldots + (-1)^{r-1} U_{m-r+1}\right] \\ & + (-1)^r \left[\binom{m}{r} U_m^{(r)} - \binom{m-1}{r-1} U_{m-1}^{(r-1)} + \binom{m-2}{r-2} U_{m-2}^{(r-2)} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^r U_{m-r}\right]\Big\}_a = 0 \end{aligned} \tag{571}$$

verstanden (s. S. 178, (48)), während $W_1$, $W_2$, ...... $W_r$ annoch unbekannte, jedoch für $u = a$ weder unendlich noch Null werdende Functionen von $u$ sind. Die vorliegende Gleichung des $r^{ten}$ Grades in $k$ kann auch auf die folgende, der Rechnung sich besser anschmiegende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned}
&(k+m-1)\ldots(k+m-r).\quad \mathfrak{U}_m \\
-\; r\; &(k+m-2)\ldots(k+m-r)\left[\binom{m}{1}\mathfrak{U}_m - \mathfrak{U}_{m-1}\right] \\
+\, r(r-1)&(k+m-3)\ldots(k+m-r)\left[\binom{m}{2}\mathfrak{U}_m - \binom{m-1}{1}\mathfrak{U}_{m-1} + \mathfrak{U}_{m-2}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+(-1)^{r-1}&r(r-1)\ldots3.2(k+m-r)\left[\binom{m}{r-1}\mathfrak{U}_m - \binom{m-1}{r-2}\mathfrak{U}_{m-1} + \binom{m-2}{r-3}\mathfrak{U}_{m-2} - \ldots\ldots + (-1)^{r-1}\mathfrak{U}_{m-r+1}\right] \\
+(-1)^r\; &r(r-1)\ldots3.2.1\left[\binom{m}{r}\mathfrak{U}_m - \binom{m-1}{r-1}\mathfrak{U}_{m-1} + \binom{m-2}{r-2}\mathfrak{U}_{m-2} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^r\mathfrak{U}_{m-r}\right] = 0,
\end{aligned} \tag{572}$$

allwo $\mathfrak{U}_{m-s}$ den Werth von $U_{m-s}^{(r-s)}\Big\}_a$ besitzt.

Ihre Giltigkeit erstreckt sich ungeschmälert auch auf den Fall, wo Einer oder mehrere der Anfangs- oder Mittel-Coefficienten der Hilfsgleichung eine grössere als die früher erwähnte, bezügliche Anzahl $r$, $r-1$, $r-2$, ..... $1$, $0$ von Factoren $x - \alpha$ enthalten, und es kann aus einem solchen Vorkommen eine Vereinfachung der vorliegenden Gleichung (572) in $k$, durch Aufheben einiger ihrer Glieder und, so diess Anfangsglieder sind, eine Herabsetzung der Gradzahl, die mit einer Formänderung Eines oder mehrerer der in der Formel (570) enthaltenen Werthe von $V$ verknüpft ist, hervorgehen. So z. B., wenn in den Coefficienten der Hilfsgleichung, der Reihe nach, Factoren $u - a$ enthalten wären: $r + s$, $r - 1$, $r - 2$, ..... $1$, $0$ an der Zahl, dann würde der letzte der in (570) ersichtlichen Werthe von $V$ wegzufallen haben, und an die Stelle desselben ein anders geformter wie:

$$V = e^{\frac{\chi(u)}{(u-a)^r}}\, W_r \tag{573}$$

treten; zu gleicher Zeit würde aber, wegen des Verschwindens von: $\frac{U_m}{(u-a)^r}\Big\}_a = \frac{\mathfrak{U}_m}{r(r-1)\ldots3.2.1}$, die Gleichung in $k$ um die Einheit in der Gradzahl erniedrigt, wodurch sie nur mehr $r - 1$ Wurzeln zu liefern geeignet erscheint, welche eben die in (570) vorkommenden $k_1$, $k_2$, ..... $k_{r-1}$ sind. In dem früher erwähnten Falle endlich, wo alle $U$ genannten Coefficienten den gemeinschaftlichen Factor $(u - a)^h$ haben, ist die Gleichung (568) dahin abzuändern, dass anstatt ihres ersten Theiles der ähnliche Ausdruck $\frac{\psi(u)}{(u-a)^{k-h}}$ zu stehen kömmt, während die (572) ungeändert fortbesteht.

Diess alles vorausgesetzt sind wir im Stande, auf dieselbe Weise wie in §. 4 des II. Abschnittes, zu beweisen, dass einem jeden einfachen Factor $u - a$ des ersten Coefficienten $U_m$ der Hilfsgleichung (574), ja auch jedem wiederholt in $U_m$ vorhandenen, wenn ihm nur eine Wurzel $k$ der algebraischen Gleichung (572) entspricht, Ein particuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung (546) an-

gehöre, welches, in dem speziellen Falle, wo der zu dem betreffenden Divisor $u - a$ gehörige Exponent $k$ eine ganze, positive Zahl ist, als eine Summe dargestellt werden kann von besonderen Integralen, $k$ an der Zahl, zwischen sehr nahe an einander und an $a$ streifenden Gränzen genommen, und welches der Verwandlung in eine andere Form, die nämlich eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl fähig ist — eine Form, die nicht mehr beschränkt ist auf ganze, positive $k$, sondern vielmehr für beliebige Werthe dieses Exponenten giltig bleibt. In der That: statuiren wir, analog der (123) S. 67 des II. Abschnittes:

$$y = \mathop{S}_{1}^{k} \left[ C_\mu \int_{a+g_\mu \varepsilon}^{a+g_{\mu+1}\varepsilon} \frac{\varphi(u)}{(u-a)^k} du \right], \tag{574}$$

allwo $\varepsilon$ einen verschwindend kleinen Bruch, $\varphi(u)$ den bereits sub (569) zur Sprache gebrachten Werth bedeutet, die Summirung $S$ aber auf die sämmtlichen, aus der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... $k$ zu nehmenden Werthe von $\mu$, und die damit variirenden Constanten $g_\mu$ und $C_\mu$ zu beziehen ist, so ist offenbar die Hilfsgleichung erfüllt, und die zur Bestimmung der Integrationsgränzen sonst dienende, d. h. das Substitutionsresultat des ebenangeführten Werthes (574) von $y$ in die vorgelegte Differentialgleichung darstellende (568) gewinnt die Gestalt:

$$\mathop{S}_{1}^{k} \left[ C_\mu \left\{ \frac{\psi(u)}{(u-a)^{k-1}} \right\}_{a+g_\mu \varepsilon}^{a+g_{\mu+1}\varepsilon} \right] = 0. \tag{575}$$

Es ist daher nur zu zeigen, dass für gewisse Werthe der Constanten $g$ und $C$ dieser Gleichung genügt sei, während für ebendieselben der angenommene Werth (574) von $y$ von Null und von Unendlich verschieden ausfällt. Um diess zu leisten, führen wir eine neue Veränderliche $v$ ein, mittelst der Substitution:

$$u = a + \varepsilon v, \tag{576}$$

und entwickeln die Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ mittelst der Taylor'schen Formel, was zu:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(u)}{(u-a)^k} = \frac{\varphi(a)}{\varepsilon^k v^k} + \frac{\varphi'(a)}{\varepsilon^{k-1} v^{k-1}} + \frac{\varphi''(a)}{2.\varepsilon^{k-2} v^{k-2}} + \frac{\varphi'''(a)}{2.3.\,\varepsilon^{k-3} v^{k-3}} \\ + \dots\dots\dots + \frac{\varphi^{(k-1)}(a)}{2.3.\dots.(k-1)\,\varepsilon v} + \frac{\varphi^{(k)}(a+\theta\varepsilon v)}{2.3.\dots.k}, \end{aligned} \tag{577}$$

$$\begin{aligned} \frac{\psi(u)}{(u-a)^{k-1}} = \frac{\psi(a)}{\varepsilon^{k-1} v^{k-1}} + \frac{\psi'(a)}{\varepsilon^{k-2} v^{k-2}} + \frac{\psi''(a)}{2.\varepsilon^{k-3} v^{k-3}} + \frac{\psi'''(a)}{2.3.\,\varepsilon^{k-4} v^{k-4}} \\ + \dots\dots\dots + \frac{\psi^{(k-2)}(a)}{2.3.\dots.(k-2)\,\varepsilon v} + \frac{\psi^{(k-1)}(a+\theta\varepsilon v)}{2.3.\dots.(k-1)} \end{aligned} \tag{578}$$

leitet. Diese Werthe setzen wir in die Gleichungen (574) und (575) und zerlegen die Summen in ihre einfachsten Bestandtheile, sondern sodann die von $\mu$ unabhängigen Factoren und stellen sie hinaus vor das Summenzeichen, so gelangen wir zu den beiden Gleichungen:

$$y=\frac{\varphi(a)}{\varepsilon^{k-1}}\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[C_\mu\int_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\frac{dv}{v^k}\right]+\frac{\varphi'(a)}{\varepsilon^{k-2}}\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[C_\mu\int_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\frac{dv}{v^{k-1}}\right]+\frac{\varphi''(a)}{2.\varepsilon^{k-3}}\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[C_\mu\int_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\frac{dv}{v^{k-2}}\right]+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\varphi^{(k-1)}(a)}{2.3\ldots(k-1)}\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[C_\mu\int_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\frac{dv}{v}\right]+\frac{\varepsilon}{2.3\ldots k}\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[C_\mu\int_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\varphi^{(k)}(a+\theta\varepsilon v)\,dv\right], \tag{579}$$

$$0=\frac{\psi(a)}{\varepsilon^{k-1}}\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-1}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right]+\frac{\psi'(a)}{\varepsilon^{k-2}}\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-2}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right]+\frac{\psi''(a)}{2.\varepsilon^{k-3}}\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-3}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right]+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\psi^{(k-2)}(a)}{2.3\ldots(k-2)\,\varepsilon}\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right]+\frac{1}{2.3\ldots(k-1)}\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{C_\mu\,\psi^{(k-1)}(a+\theta\varepsilon v)\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right], \tag{580}$$

von welchen die Letztere, wegen des augenscheinlichen Convergirens des Ergänzungsgliedes gegen die Nulle bei unendlich abnehmendem $\varepsilon$, offenbar erfüllt wird durch solche Werthe von $C_1, C_2, \ldots C_k$ und $g_1, g_2, \ldots g_k$, die dem folgenden Systeme von $(k-1)$-Gleichungen genügen, und die immer vorhanden sind:

$$\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-1}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right]=\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\frac{C_\mu}{g_{\mu+1}^{k-1}}-\frac{C_\mu}{g_\mu^{k-1}}\right]=0.$$

$$\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-2}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right]=\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\frac{C_\mu}{g_{\mu+1}^{k-2}}-\frac{C_\mu}{g_\mu^{k-2}}\right]=0, \tag{581}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right]=\overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\frac{C_\mu}{g_{\mu+1}}-\frac{C_\mu}{g_\mu}\right]=0.$$

Erwägt man überdiess, dass in der Gleichung (579):

$$\int_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\frac{dv}{v^k}=-\frac{1}{k-1}\left\{\frac{1}{v^{k-1}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}=\frac{1}{(k-1)\,g_\mu^{k-1}}-\frac{1}{(k-1)\,g_{\mu+1}^{k-1}},$$

$$\int_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\frac{dv}{v^{k-1}}=-\frac{1}{k-2}\left\{\frac{1}{v^{k-2}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}=\frac{1}{(k-2)\,g_\mu^{k-2}}-\frac{1}{(k-2)\,g_{\mu+1}^{k-2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\frac{dv}{v}=\left\{\log v\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}=\log\frac{g_{\mu+1}}{g_\mu}$$

ist, und dass, in Folge dessen, und zugleich in Folge des Convergirens des Ergänzungsgliedes gegen die Nulle, die Gleichung (579) auch so geschrieben werden kann:

$$y = -\frac{\varphi(a)}{(k-1)\,\varepsilon^{k-1}} \overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-1}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right] - \frac{\varphi'(a)}{(k-2)\,\varepsilon^{k-2}} \overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-2}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right] - \frac{\varphi''(a)}{2\,(k-3)\,\varepsilon^{k-3}} \overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-3}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right]$$

$$(582)\qquad - \frac{\varphi'''(a)}{2.3\,(k-4)\,\varepsilon^{k-4}} \overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v^{k-4}}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right] - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{\varphi^{(k-2)}(a)}{2.3\ldots(k-2)\,\varepsilon} \overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{\frac{C_\mu}{v}\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right]$$

$$+ \frac{\varphi^{(k-1)}(a)}{2.3\ldots(k-1)} \overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{C_\mu \log v\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right],$$

oder, mit Rücksicht auf das System der Gleichungen (581), kürzer noch:

$$(583)\qquad y = \frac{\varphi^{(k-1)}(a)}{2.3\ldots(k-1)} \overset{k}{\underset{1}{S}}\left[\left\{C_\mu \log v\right\}_{g_\mu}^{g_{\mu+1}}\right],$$

so sieht man endlich ein, dass der für $y$ angenommene Werth (574), bei schicklicher Wahl der Constanten $C_1, C_2, \ldots C_k$ und $g_1, g_2, \ldots g_k$, der vorgelegten Differentialgleichung (546) Genüge leiste, und man sieht noch überdiess, dass derselbe vorkomme in Form eines Produktes aus dem bestimmten $\varphi^{(k-1)}(a)$ in einen anderen Factor, der die Geltung einer willkürlichen Constante hat, so dass also schlechtweg, wenn diese Constante $B$ heisst:

$$y = B\,\varphi^{(k-1)}(a),$$

oder, mit Rücksicht auf den Werth (569) von $\varphi$:

$$(584)\qquad y = B\left\{\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\left[e^{ux}\,W\right]\right\}_{u=a}$$

wird — ein Ausdruck, welchem man, durch wirkliche Entwicklung des $(k-1)^{ten}$ Differentialquotienten nach einer bekannten Formel und nachherige Substitution des Werthes $a$ für $u$, auch folgende praktisch brauchbarere Gestalt ertheilen kann:

$$(585)\qquad y = B.e^{ax}\left[x^{k-1}\,\mathfrak{W} + \binom{k-1}{1}x^{k-2}\,\mathfrak{W}' + \binom{k-1}{2}x^{k-3}\,\mathfrak{W}'' + \ldots\ldots\right];$$

hier bedeuten $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}', \mathfrak{W}'', \ldots\ldots$ die der speciellen Substitution $u = a$ entsprechenden Werthe von $W, W', W'', \ldots\ldots$ und diess ist das dem Factor $u - a$ des ersten Coefficienten $U_m$ der Hilfsgleichung entsprechende, nicht nur für ganze und positive $k$, sondern vielmehr für beliebige diesem Exponenten ertheilte Werthe giltige particuläre Integral der vorgelegten Differentialgleichung. Von dieser seiner allgemeinen Giltigkeit aber überzeugt man sich durch folgende Betrachtung: Der Werth (585) ist offenbar ein particuläres Integral für alle ganzen und positiven, übrigens aber unbestimmt gelassenen Werthe von $k$; folglich muss die Form (585) in die Differentialgleichung (546) gesetzt, derselben Genüge leisten, folglich muss das im Substitutionsresultate vorhandene $k$ als solches, d. h. als analytisches Symbol — als Buchstabe — sich identisch wegheben und folglich wird es sich auch wegheben

müssen, und zwar genau auf dieselbe Weise, wenn der ihm ertheilte Werth ein negativer, gebrochener, irrationaler, oder imaginärer ist.

Die hier für den Fall eines einzigen Factors $u-a$ in $U_m$ angebrachte Analysis lässt sich ohne wesentliche Änderung auch dann durchführen, wenn in den Coefficienten $U_m$, $U_{m-1}$, .... $U_{m-r+1}$, $U_{m-r}$ Factoren $u-a$ der Reihe nach $r$, $r-1$, ..... 1, 0 vorhanden sind, nur mit dem einzigen Unterschiede, dass sie dann mit einem jeden der in diesem Falle vorhandenen $r$ Werthe für $V$, den (570) nämlich, für sich durchgeführt gedacht werden muss, was nicht zu Einem, sondern zu $r$ particulären Integralen der vorgelegten Differentialgleichung führt, die alle die Exponentialgrösse $e^{ax}$ als Factor haben, und aus denen sich ein $y$ zusammensetzt wie folgt:

$$y = B_1 \left\{\frac{d^{k_1-1}}{du^{k_1-1}}\left[e^{ux} W_1\right]\right\}_{u=a} + B_2 \left\{\frac{d^{k_2-1}}{du^{k_2-1}}\left[e^{ux} W_2\right]\right\}_{u=a} + \ldots\ldots + B_r \left\{\frac{d^{k_r-1}}{du^{k_r-1}}\left[e^{ux} W_r\right]\right\}_{u=a}, \tag{586}$$

oder in anderer Form:

$$\begin{aligned} y = \quad & B_1 e^{ax}\left[x^{k_1-1}\,\mathfrak{W}_1 + \binom{k_1-1}{1} x^{k_1-2}\,\mathfrak{W}'_1 + \ldots\ldots\ldots\right] \\ & + B_2 e^{ax}\left[x^{k_2-1}\,\mathfrak{W}_2 + \binom{k_2-1}{1} x^{k_2-2}\,\mathfrak{W}'_2 + \ldots\ldots\ldots\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + B_r e^{ax}\left[x^{k_r-1}\,\mathfrak{W}_r + \binom{k_r-1}{1} x^{k_r-2}\,\mathfrak{W}'_r + \ldots\ldots\ldots\right]. \end{aligned} \tag{587}$$

Einige Veränderungen würde diese Analysis leiden in dem Falle, wenn sämmtliche mit $U$ bezeichneten Coefficienten durch $(u-a)^h$ theilbar wären; es müsste nämlich dann in unseren Formeln anstatt des Bruches $\frac{\psi(u)}{(u-a)^{k-1}}$ stehen $\frac{\psi(u)}{(u-a)^{k-h}}$; es ist aber nicht nöthig mit dieser Veränderung die Rechnung noch einmal durchzuführen, weil sich ja in diesem Falle mit Leichtigkeit auf dem bereits in §. 4 des II. Abschnittes, S. 64, betretenen Wege zeigen lässt, dass dann $h$ particuläre Integrale auftreten, gegeben durch die einzige Formel:

$$y = e^{ax}\,(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + C_{h-1} x^{h-1}), \tag{588}$$

unter $C_0$, $C_1$, ..... $C_{h-1}$ eben so viele willkürliche Constanten verstanden. Zudem ist hier noch zu bemerken, dass das Stattfinden dieser Form nicht nur aus dem, den Coefficienten $U_m$, $U_{m-1}$, ... $U_0$ in diesem Falle der Voraussetzung nach zukommenden Factor $(u-a)^h$ erkannt werden könne, sondern auch, dass, wenn man diesen Umstand etwa übersehen hätte, die construirte Hilfsgleichung selbst und die daraus abgeleitete Algebraische in $k$, vermöge der Beschaffenheit ihrer Wurzeln, davon unmittelbar Kunde geben würden. Man gewahrt in der That unter solchen Verhältnissen in den Coefficienten der erwähnten Hilfsgleichung Factoren $u-a$, der Reihe nach, $h$, $h-1$, ..... 2, 1, 0 an der Zahl, und die Gleichung (572) in $k$ erhält, indem man in derselben den Buchstaben $r$ durch $h$ ersetzt, und mit Rücksicht darauf, dass $\mathfrak{U}_{m-1} = \mathfrak{U}_{m-2} = \ldots\ldots = \mathfrak{U}_{m-r} = 0$ werden, folgende Gestalt:

$$x^k \frac{d^h}{dx^h}\left[x^{-m-k+h}.x^m\right] = + \quad (m+k-1)(m+k-2)(m+k-3)\ldots(m+k-h+1)(m+k-h)$$

$$- \binom{h}{1} m\,(m+k-2)(m+k-3)\ldots(m+k-h+1)(m+k-h)$$

$$+ \binom{h}{2} m(m-1)\quad(m+k-3)\ldots(m+k-h+1)(m+k-h)$$

$$(589)\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{h-2}\binom{h}{2} m(m-1)\ldots(m-h+3)\quad(m+k-h+1)(m+k-h)$$

$$+(-1)^{h-1}\binom{h}{1} m(m-1)\ldots(m-h+3)(m-h+2)\quad(m+k-h)$$

$$+(-1)^h \quad m(m-1)\ldots(m-h+3)(m-h+2)(m-h+1) = 0,$$

oder auch:

$$(590)\qquad x^k \frac{d^h}{dx^h}\left[x^{h-k}\right] = (h-k)(h-k-1)(h-k-2)\ldots\ldots(-k+2)(-k+1) = 0.$$

Ihre ersten zwei Glieder sind identisch gleich, vermöge der wohlbekannten Formel, die wir zur $h$-maligen Differentiation des Produktes $P.Q$ besitzen, angewendet für den Fall, wo $P = x^{-m-k+h}$, $Q = x^m$ ist, und gleich Null, vermöge der (572). Sie wird offenbar erfüllt für Werthe von $h - k$, die ganze positive Zahlen und der Reihe $0, 1, 2, \ldots\ldots, h-1$ beliebig entnommen sind, sohin für solche Werthe von $k$, die man nach Belieben aus der Reihe:

$$k = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots\ldots\ldots \quad h-1, \quad h$$

wählt, die demnach anstatt $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots$ in die für $r = h$ angesetzte Gleichung (587) substituirt werden können, wodurch man eine der Formel (588) ähnliche Form gewinnt, und auf diese Weise, durch die Andeutungen der Analysis selbst, zu derselben zurückgeführt wird.

Es wäre nun noch Ein möglicher Umstand in Betrachtung zu ziehen: wenn nämlich das den Coefficientenbau der Hilfsgleichung (574) aus Factoren $u - a$ umspannende Polygon Coefficientenpaare darböthe, auf welche ein stärkerer Abfall, als der um die Einheit in der Ordnungszahl entfiele. Es würde diess auf particuläre Integrale für $V$ hinweisen, die im Exponenten der Exponentielle einen Divisor $u - a$ in irgend einer Potenz beherbergen. Wir haben in einigen einfachen Beispielen im II. Abschnitte und namentlich bei der Gleichung (95) S. 57, die Schwierigkeiten kennen gelernt, die dem Erkennen der Form des entsprechenden Integrales entgegenstehen, und uns erst in §. 18 dieses Abschnittes überzeugt, dass sie irrational sei und durch Änderung der unabhängigen Veränderlichen $x$ in eine nach unseren Regeln leichter diskutirbare umgesetzt werden könne. Ähnliches ist auch hier der Fall; wiewohl wir hiemit nicht andeuten wollen, dass aus einem in solchen Fällen auftauchenden Integrale der Hilfsgleichung wie:

$$(591)\qquad V = e^{\frac{\chi(u)}{(u-a)^r}}\, W_r$$

gar kein der ursprünglichen Differentialgleichung Genüge leistender Werth zu gewinnen sei. Im Gegentheile: man gewinnt deren, und zwar $s$ an der Zahl, wenn man damit anfängt, in dem wohlbekannten bestimmten Integrale:

$$y = C\int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V.du$$

den obigen Werth (591) von $V$ anzunehmen, sodann die Variable der Integration $u$ in eine andere $v$ zu verändern, vermittelst der Substitution:

$$u - a = \frac{1}{v} \qquad \text{oder} \qquad u = a + \frac{1}{v}, \tag{592}$$

wodurch sich:

$$y = D.e^{ax}\int_{v'}^{v''} e^{\frac{x}{v} + av^s + bv^{s-1} + \dots} \frac{W}{v^2}.dv \tag{593}$$

der Form nach herausstellt, während man sich leicht überzeugen kann, dass der im vorletzten Paragraphe zur Bestimmung der Gränzen $u'$ und $u''$ dienenden Gleichung:

$$\begin{aligned} e^{ux}\Big[\; & x^{m-1}.U_m\, V \\ & + x^{m-2}\big[U_{m-1}V - (U_m\, V)'\big] \\ & + x^{m-3}\big[U_{m-2}V - (U_{m-1}V)' + (U_m V)''\big] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + x\;\; \big[U_2\, V - (U_3\, V)' + (U_4 V)'' - \dots\dots \mp (U_m\, V)^{(m-2)}\big] \\ & + \;\; U_1\, V - (U_2\, V)' + (U_3 V)'' - \dots\dots \mp (U_{m-1}V)^{(m-2)} \pm (U_m V)^{(m-1)}\Big] = 0, \end{aligned} \tag{594}$$

welche, nach geschehener Umsetzung von $u$ in $v$, auch zur Ermittlung der neuen Gränzen $v'$ und $v''$ tauglich ist, durch alle diejenigen Werthe von $v$ Genüge geleistet werden könne, welche die Exponentialgrösse $e^{\frac{x}{v} + av^s}$ der Nulle gleich machen, d. h. durch die $s$ an der Zahl vorhandenen unendlichen Wurzeln der Gleichung $av^s = -\infty$ und noch überdiess durch den unendlich kleinen, reellen oder imaginären Werth, der $\frac{x}{v}$ unendlich und negativ macht. Wird nun anstatt dieses Letzteren, der ein reeller oder imaginärer Nullwerth ist, die Nulle schlechtweg geschrieben, so gewinnt man aus dem vorliegenden $V$ eine Reihe von particulären Integralen der Differentialgleichung in $y$, $s$ an der Zahl, gegeben durch eine Formel:

$$\begin{aligned} y = \;\; & D_1\, e^{ax}\int_0^{\nu_1\infty} e^{\frac{x}{v} + av^s + bv^{s-1} + \dots} \frac{W}{v^2}.dv \\ & + D_2\, e^{ax}\int_0^{\nu_2\infty} e^{\frac{x}{v} + av^s + bv^{s-1} + \dots} \frac{W}{v^2}.dv \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + D_s\, e^{ax}\int_0^{\nu_s\infty} e^{\frac{x}{v} + av^s + bv^{s-1} + \dots} \frac{W}{v^2}.dv. \end{aligned} \tag{595}$$

in welcher $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_s$ die Wurzeln der binomischen Gleichung $\nu^s = \pm 1$ bedeuten, je nachdem der Coefficient $a$ negativ ist oder positiv, und die nur den folgenden zwei Unzukömmlichkeiten unterliegt, nämlich Erstens: entspricht dieser Ausdruck für $y$ mit seinen $s$ Constanten eigentlich $(s+1)$-Factoren $u-\mathfrak{a}$ von $U_m$ in der Hilfsgleichung, welche für jeden solchen Factor Ein particuläres Integral zu liefern schuldig wäre. Da wir nun der Letzteren nicht $s+1$, sondern nur $s$ an der Zahl erhalten haben, so ist uns Eines abhanden gekommen. Zweitens: Zerfallen die gewonnenen, in der vorliegenden Formel (595) enthaltenen particulären Integrale in zwei Gruppen, von welchen die eine, deren $\nu$ an den oberen Gränzen mit negativen reellen Theilen begabt sind, brauchbar ist für positive $x$ und unbrauchbar für negative, für welche die Function unter dem Integralzeichen an der unteren Gränze selbst unendlich würde; mit der anderen Gruppe particulärer Integrale, deren $\nu$ an den oberen Gränzen positive reelle Theile ausweisen, verhält sich's umgekehrt. Diese doppelte Unzukömmlichkeit ist es nun, durch die wir in den meisten Fällen gezwungen werden die unabhängige Veränderliche $x$ zu wechseln, um dadurch direct gleich in den Besitz der $s+1$ Genüge leistenden Irrationalformen zu gelangen — ein Vorgang, der im nächsten Abschnitte des Näheren erörtert werden soll.

Endlich können unter den Werthen von $k$, die aus der Auflösung der (571) oder (572) hervorgehen, die wohlbekannten, gruppenweise erscheinenden, gebrochenen und negativen Numerischen vorhanden sein, die auf irrationale $V$ hindeuten. Nachdem wir aber in §. 15 gezeigt haben, dass die Erscheinung solcher Werthe von $k$ ihren Grund finde in der Möglichkeit: aus der ermittelten Gruppe particulärer Integrale, dadurch, dass man die einzelnen Entwicklungsglieder dieser letzteren in geeigneter Weise anders zusammennimmt, eine neue Gruppe abermals je für sich Genüge leistender Werthe zu gewinnen, die dann wirklich die angedeuteten Divisoren $(u-\mathfrak{a})^k$ besitzen, so geben solche gruppenweise vorkommenden Werthe zu keiner Ausnahme Veranlassung.

Dasselbe, was sich von Factoren $u-\mathfrak{a}$ im ersten und den folgenden Coefficienten der Hilfsgleichung (547) sagen lässt, gilt auch von allen anderen in ihnen etwa noch vorfindigen Factoren $u-\mathfrak{b}$, $u-\mathfrak{c}$, .....; sie führen nämlich zu Gruppen particulärer Integrale, von der Art der (587), die bezüglich die Exponentialgrössen $e^{\mathfrak{b}x}$, $e^{\mathfrak{c}x}$, ..... als Factoren besitzen, und je so viele Genüge leistende Werthe in sich enthalten, als es eben Factoren $u-\mathfrak{b}$, $u-\mathfrak{c}$, ..... im ersten Coefficienten $U_m$ gibt. Wir sehen also, dass in der That, mit seltenen und bestimmt angebbaren Ausnahmen, wie angekündigt, der erste Coefficient $U_m$ die noch fehlenden, nicht in der Form eines bestimmten Integrales, sondern in der eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl erscheinenden particulärer Integrale liefere, nämlich so viele, als die Gradzahl des $U_m$ Einheiten in sich enthält.

Um ein Beispiel zu haben, könnte man zur Gleichung (525) der $n^{\text{ten}}$ Ordnung mit Coefficienten des zweiten Grades zurückkehren. Ihre Hilfsgleichung gehört der zweiten Ordnung an und ist die (527). Würde man nun annehmen, dass $c_n$ von der Nulle verschieden sei, so würde man auf dem in §. 19 vorgezeichneten Wege zu gar keinem Genüge leistenden Werthe in Form eines bestimmten Integrales zwischen Gränzen $0$ und $\infty$ gelangen; dagegen gäbe ein jeder der einfachen Factoren von $U_2$

die dann $n$ an der Zahl vorhanden sind, Einen genügenden Werth unter der Form eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl. Wären nämlich die Wurzeln der Gleichung:

$$U_2 = c_n u^n + c_{n-1} u^{n-1} + \dots\dots\dots + c_1 u + c_0 = 0, \tag{596}$$

die folgenden:

$$u = \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots\dots\dots \quad \alpha_{n-1}, \quad \alpha_n$$

und alle von einander verschieden, so würde das allgemeine Integral der Differentialgleichung (525) in folgender Form vorhanden sein:

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} (x^{k_1 - 1} + \dots) + C_2 e^{\alpha_2 x} (x^{k_2 - 1} + \dots) + \dots\dots + C_n e^{\alpha_n x} (x^{k_n - 1} + \dots); \tag{597}$$

$k_1, k_2, \dots\dots k_n$ werden durch das gewöhnliche Verfahren des Zerlegens in Partialbrüche als Zähler von solchen gewonnen, und gehen, zufolge (559), aus nachstehenden Gleichungen hervor:

$$k_1 = -\frac{U_1}{U_2}(u-\alpha_1)\Big\}_{\alpha_1} + 1, \quad k_2 = -\frac{U_1}{U_2}(u-\alpha_2)\Big\}_{\alpha_2} + 1, \quad \dots\dots \quad k_n = -\frac{U_1}{U_2}(u-\alpha_n)\Big\}_{\alpha_n} + 1. \tag{598}$$

Die Kenntniss dieser Werthe von $k_1, k_2, \dots\dots k_n$ wäre wohl im Allgemeinen zum Unterscheiden der particulären Integrale nicht nothwendig, da die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots \alpha_n$ zu diesem Zwecke vollkommen ausreichen, sondern wäre bereits als ein fernerer Schritt zur wirklichen Integration anzusehen, so lange wenigstens, als die unmittelbar früher gemachte Voraussetzung gilt, dass diese mit $\alpha$ bezeichneten Wurzeln der Gleichung (596) sämmtlich von einander verschieden bleiben. Hat man jedoch gleiche unter ihnen, so fällt begreiflicherweise der Unterschied zwischen den betreffenden particulären Integralen (597) auf das $k$; die Kenntniss des Werthes dieses Exponenten wird daher nothwendig. Diesen Fall ins Auge fassend, setzen wir voraus, es sei $\alpha_1 = \alpha_2$, es enthalte somit $U_2$ den Factor $(u - \alpha_1)^2$, so wird man zwei Fälle sondern: es enthält nämlich dann entweder auch $U_1$ Einen oder mehre Factoren $(u - \alpha_1)$, oder nicht. Im ersteren Falle werden die zwei Werthe von $k$, nämlich $k_1$ und $k_2$, durch die Gleichung (572) gegeben, in der man für den gegenwärtigen speciellen Fall $m = r = 2$ zu setzen haben wird, wodurch sie übergeht in:

$$(k+1)\,k\,\mathfrak{U}_2 - 2k\left[2\,\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1\right] + 2\,(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_0) = 0, \tag{599}$$

allwo: $\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0$ die Werthe sind, welche die Grössen: $U_2'', U_1', U_0$ für $u = \alpha_1$ annehmen. Werden nun unter $k_1$ und $k_2$ gerade die Wurzeln dieser Gleichung verstanden, so besteht für diesen Fall der unter (597) dargestellte Werth von $y$ der Form nach fort, nur hat man in demselben $\alpha_2$ in $\alpha_1$ zu verwandeln.

Hätte, im zweiten Falle, $U_1$ gar keinen Factor $(u - \alpha_1)$, während $U_2$ fortwährend mit zweien dieser Art versehen bleibt, so deutet diess auf Ein particuläres Integral der Hilfsgleichung hin, wie:

$$V = e^{\int \frac{W du}{(u-\alpha_1)^2}},$$

aus welchem sich, dem früher Gesagten nach, direct nur ein einziger, der ursprünglich gegebenen Gleichung Genüge leistender particulärer Werth, in Form eines bestimmten Integrales zwischen Gränzen

0 und $\infty$ ergibt, der noch überdiess für negative Werthe von $x$ unbrauchbar ist, wenn er sich für positive brauchbar zeigt, und umgekehrt.

Da die Gleichungen $U_2 = 0$ und $U_1 = 0$, zufolge (528), gelegentlich dem $n^{ten}$ Grade angehören, so wollen wir noch den Fall betrachten, wo, allgemein, $U_2$ und $U_1$ beziehungsweise den Potenzen $(u - a_1)^{r+s}$, $(u - a_1)^s$ proportional sind, während $U_0$ den Factor $u - a_1$ nicht enthält — der Fall, wo durch das Vorhandensein mehrerer Factoren $u - a_1$ in $U_2$ eine Theilbarkeit der ganzen Hilfsgleichung (527) durch $(u - a_1)^k$ entstehen müsste, ist bereits auf S. 367 erledigt worden. — Wäre nun $r \geqq s > 1$, so besässe die Hilfsgleichung (527) zwei ihr Genüge leistende Werthe in der Form:

$$(600) \qquad V_1 = e^{\int \frac{W_1\, du}{(u - a_1)^r}}; \qquad V_2 = e^{\int \frac{W_2\, du}{(u - a_1)^s}}$$

die, der auf S. 369 angedeuteten Behandlung unterworfen, zwei Gruppen particulärer Integrale der vorgelegten Differentialgleichung liefern, beziehungsweise mit $r - 1$ und $s - 1$ willkürlichen Constanten, so also, dass auf diese Weise von den $r + s$ particulären Integralen, welche $U_2$ seinem Factor $(u - a_1)^{r+s}$ entsprechend zu liefern schuldig wäre, zwei abhanden gekommen sind, überdiess aber die $r + s - 2$ an der Zahl erhaltenen nur beschränkte Brauchbarkeit besitzen, indem die einen nur für positive $x$, die übrigen nur für negative $x$ zu Recht bestehen. Für den Fall $r < s$ deutet die Hilfsgleichung auf zwei Werthe von $V$ wie:

$$(601) \qquad V_1 = e^{\int \frac{W_1\, du}{(u - a_1)^{\frac{r+s}{2}}}}, \qquad V_2 = e^{\int \frac{W_2\, du}{(u - a_1)^{\frac{r+s}{2}}}}$$

die man, vermittelst der Substitution $u - a_1 = \frac{1}{v}$ auf die Form:

$$(602) \qquad V_1 = e^{A_1 v^{\frac{r+s}{2} - 1} + \cdots\cdots}, \qquad V_2 = e^{A_2 v^{\frac{r+s}{2} - 1} + \cdots\cdots}$$

bringen kann, und welche sofort zu folgenden zwei particulären Werthen für $y$ leiten:

$$(603) \qquad y = D . e^{a_1 x} \int_0^{\mu\infty} e^{\frac{x}{v} + A_1 v^{\frac{r+s}{2} - 1} + \cdots\cdots} \frac{dv}{v^2}, \qquad y = E e^{a_1 x} \int_0^{\nu\infty} e^{\frac{x}{v} + A_2 v^{\frac{r+s}{2} - 1} + \cdots\cdots} \frac{dv}{v^2}.$$

Ist nun $\frac{r+s}{2} = t$ eine ganze Zahl, so kann, in dem ersten der vorliegenden Ausdrücke, für $\mu$ irgend eine der Wurzeln der binomischen Gleichung $\mu^{t-1} = \mp 1$, je nachdem $A_1$ positiv ist oder negativ, angenommen werden, in Folge dessen derselbe einen particulären Werth mit $t - 1$ willkürlichen Constanten repräsentirt. Ingleichen kann im zweiten der Ausdrücke (603) für $\nu$ irgend eine die Gleichung $\nu^{t-1} = \pm 1$ erfüllende Wurzel geschrieben werden, weil, unter der gemachten Voraussetzung $r < s$, wie leicht nachweisbar, $A_2$ und $A_1$ entgegengesetzte Zeichen tragen, so dass auch dieser particuläre Werth als mit $t - 1$ willkürlichen Constanten begabt anzusehen ist, und sohin auch hier wieder die beiden Werthe (601) zu $2t - 2 = r + s - 2$ particulären Integralen der vorgelegten Gleichung in $y$, mit eben so vielen willkürlichen Constanten, geleitet haben. Wäre $r + s$ eine ungerade Zahl, so würden die

Wurzeln der Einzigen $\rho^{r+s-2} = +1$, und zwar alle, sowohl die $\mu^{\frac{r+s}{2}-1} = \mp 1$. als auch die $\nu^{\frac{r+s}{2}-1} = \pm 1$ erfüllen; weil man aber nicht zu gleicher Zeit und für dieselbe Bedeutung der Irrationalgrösse $v^{\frac{r+s}{2}-1} = \sqrt{v^{r+s-2}}$ haben kann: $e^{A_1 v^{\frac{r+s}{2}-1}} = 0$ und $e^{A_2 v^{\frac{r+s}{2}-1}} = 0$, so erscheint von den angedeuteten Werthen (601) für $V_1$ und $V_2$ nur Einer als brauchbar, und der andere fällt weg. Z. B. wenn $A_1$ negativ und $\sqrt{v^{r+s-2}}$ in seiner positiven Bedeutung genommen wird. so ist $V_1$ der brauchbare Werth und liefert ein Integral:

$$y = D_1 e^{A_1 x} \int_0^{\rho_1 \infty} e^{\frac{x}{v} + A_1 \sqrt{v^{r+s-2}} + \cdots} \frac{dv}{v^2} + \cdots + D_{r+s-2} e^{A_1 x} \int_0^{\rho_{r+s-2} \infty} e^{\frac{x}{v} + A_1 \sqrt{v^{r+s-2}} + \cdots} \frac{dv}{v^2}, \tag{604}$$

abermals mit $r + s - 2$ Constanten, so dass das Wegfallen von $V_2$ durch die grössere Zahl der Wurzeln der Gleichung $\rho^{r+s-2} = 1$ vollständig aufgewogen wird. Von Letzterer auszugehen, ist man übrigens auch dann berechtigt, wenn $r + s$ eine gerade Zahl ist, nur sind dann die Wurzeln derselben gehörig zwischen die Gleichungen $\mu^{\frac{r+s}{2}-1} = \mp 1$ und $\nu^{\frac{r-s}{2}-1} = \pm 1$, bezüglich zwischen $V_1$ und $V_2$ zu vertheilen. Sind endlich $A_1$ und $A_2$ imaginäre Werthe, wie $\lambda\sqrt{-1}$ und $-\lambda\sqrt{-1}$, so geht nur die Gleichung $\rho^{r+s-2} = +1$ über in die andere $\rho^{r+s-2} = -1$. Alles Übrige bleibt.

In dem speciellen Falle $r > s = 1$, wo also durch die Hilfsgleichung zwei Werthe von $V$ angedeutet werden wie:

$$V_1 = e^{\int \frac{W_1 du}{(u - a_1)^r}}; \qquad V_2 = \frac{W_2}{(u - a_1)^k}, \tag{605}$$

kann der gewünschte Werth von $k$ noch immer aus der Auflösung der Gleichung (599) erhalten werden, die aber, wegen des Verschwindens von $\mathfrak{U}_2$, in die einfachere Gleichung des ersten Grades:

$$(k - 1)\,\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_0 = 0 \tag{606}$$

übergeht, und es kann noch bemerkt werden, dass, in diesem Falle sowohl, als auch in demjenigen, wo $s = 0$ ist, d. h. wo $U_2$ mit $r$ Factoren $u - a_1$ versehen ist, während $U_1$ einen solchen Factor nicht enthält, von den zu verlangenden particulären Integralen der ursprünglichen Gleichung in $y$ nur ein einziges verloren gehe.

Zu unseren allgemeinen Betrachtungen zurückkehrend, drängt sich uns beim Anblicke der Formeln (585) und (587) die wichtige Bemerkung auf, dass die Form des aus den einfachen Factoren wie $u - a$ des ersten Coefficienten $U_m$ der Hilfsgleichung erhaltenen, bald allgemeinen, bald durch gewisse Zusätze zu completirenden Integrals der Vorgelegten, eben die assymptotische sei, und dass sich sämmtliche exponentielle Assymptoten, deren Gleichungen unter der Gestalt $y = e^{ax}$ erscheinen, deren Beschaffenheit daher lediglich von dem $a$ genannten Coefficienten abhängig ist, so zu sagen aus der blossen Ansicht der vorgelegten Gleichung ergeben, und zwar auf folgende Weise: Man suche aus der Differentialgleichung die Glieder mit derselben höchsten Potenz von $x$ heraus, verwandle die in ihnen vorkommenden Differentialquotienten von $y$ in die gleichnamigen Potenzen einer Unbekannten $u$, so hat man eine Gleichung in $u$, nämlich die $U_m = 0$, deren von der Nulle verschiedenen Wurzeln eben

die mit $a$ bezeichneten Coefficienten sind. Denkt man sich nun allgemein den einer solchen Differentialgleichung Genüge leistenden Werth unter der assymptotischen Form $e^{\int \varphi dx}$, so ist diese Regel offenbar geeignet, die Assymptoten zu liefern aller derjenigen particulären Integrale, bei denen die Function $\varphi$ die Gradzahl 0 besitzt, und diess zwar lediglich aus den mit der höchsten Potenz von $x$ verknüpften Gliedern der im Niveau stehenden Coefficienten. Diess ist nun ganz geeignet uns zur Vermuthung zu führen, dass es dieselbe Bewandtniss habe auch mit all' denjenigen Differentialgleichungs-Coefficienten, welche nach geschehener Repartition irgend eine gemeinsame Steigung auf das Coefficientenpaar von $p$ Einheiten, oder einen gemeinsamen solchen, die Einheit nicht erreichenden Abfall darbieten, und, wie bekannt, auf particuläre Integrale hindeuten, deren $\varphi$, in Reihenform, nach absteigenden Potenzen von $x$ geordnet, die Gestalt tragen:

$$\varphi = \mathfrak{A} x^p + \mathfrak{B} x^{p-1} + \dots\dots\dots\dots, \tag{607}$$

und denen sonach Assymptotengleichungen angehören von der Form:

$$y = e^{\int \mathfrak{A} x^p dx}. \tag{608}$$

Diese Vermuthung bestätigt sich auch vollkommen, dergestalt, dass wir auch hier ungetrübt derselben Regel begegnen, nämlich: Man schreibe aus der Differentialgleichung, und zwar aus denjenigen ihrer Coefficienten, denen die gemeinsame Steigung von $p$ Einheiten in der Gradzahl bei der Repartition zugefallen ist, die Factoren der mit den höchsten Potenzen von $x$ verbundenen Glieder heraus, mit Hinweglassung aller derjenigen, welche die ihnen etiquettenmässig zustehende Gradzahl nicht erreichen, verwandle sodann die Differentialquotienten von $y$ in die gleichnamigen Potenzen einer Unbekannten $u$, so hat man eine Gleichung, deren von der Nulle verschiedene Wurzeln eben die Werthe des Coefficienten $\mathfrak{A}$ sind in allen unter der Form (608) erscheinenden Assymptoten-Gleichungen. In der That, setzen wir voraus: es falle diese gemeinsame Steigung von $p$ Einheiten auf $s$ Coefficientenpaare, und zwar auf die folgenden:

$$X_r, \quad X_{r-1}, \quad X_{r-2}, \quad \dots\dots\dots\dots, \quad X_{r-s}, \tag{609}$$

so werden diesen Coefficienten, falls der erste von $h$ Dimensionen ist, der Reihe nach Gradzahlen zukommen, die bezüglich nicht grösser sind, als die folgenden:

$$h, \quad h+p, \quad h+2p, \quad \dots\dots\dots\dots, \quad h+sp,$$

und die wenigstens der erste und letzte von ihnen nothwendig erreichen muss; die in der Mitte liegenden können jedenfalls darunter bleiben, und werden es auch in der Regel, wegen der vorausgesetzten algebraischen ganzen Beschaffenheit der Coefficienten, jedesmal, so oft $p$ eine gebrochene Zahl ist. Denkt man sich nun irgend eines der unter der Form $e^{\int \varphi dx}$ vorgestellten particulären Integrale $s$ an der Zahl und mit Functionen $\varphi$ von der Form (607), denen jene Coefficientengruppe angehört,

in die Differentialgleichung anstatt $y$ eingeführt, und zugleich das $x$ unendlich gross, so stellen einerseits die Differentialquotienten:

$$y^{(r)}, \quad y^{(r-1)}, \quad y^{(r-2)}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y^{(r-s)}, \tag{610}$$

mit welchen die Coefficienten (609) in der vorgelegten Gleichung multiplizirt erscheinen, eine Reihe von Gliedern dar, deren jedes zu dem nächstfolgenden im Verhältnisse steht einer unendlichen Zahl $x^p$ zu einer endlichen $A$. Hierdurch verwandelt sich das Gleichungspolynom:

$$X_n\, y^{(n)} + X_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + X_1\, y' + X_0\, y = 0 \tag{611}$$

in eine Reihe unendlicher Glieder von verschiedenen Ordnungen nach $x$, und die der höchsten Ordnung angehörigen sind gerade die folgenden:

$$X_r\, y^{(r)}, \quad X_{r-1}\, y^{(r-1)}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X_{r-s+1}\, y^{(r-s+1)}, \quad X_{r-s}\, y^{(r-s)}, \tag{612}$$

welche, wenn auch nicht alle, doch mindestens die beiden äussersten, $X_r y^{(r)}$ und $X_{r-s} y^{(r-s)}$ nämlich, einerlei Ordnungszahl ausweisen werden (s. §. 15. S. 285). Da nun andererseits eine solche Substitution das Gleichungspolynom identisch macht, so müssen die aus der Entwicklung der vor Augen liegenden Producte (612) gewonnenen Glieder höchsten Grades, aggregirt, für sich Null geben. Zur Ermittlung derselben ist es nöthig, in jedem einzelnen Coefficienten der Gruppe (609) sowohl, als auch in jedem einzelnen Differentialquotienten aus der Reihe (610), das mit der höchsten Potenz von $x$ verknüpfte Glied zu kennen. Man verschafft sich dieselben ohne Schwierigkeit, wenn man einerseits bemerkt, dass, unter den gemachten Voraussetzungen, und nach absteigenden Potenzen von $x$ geordnet, der Form nach:

$$\begin{aligned}
X_r &= f_r\, x^h + g_r\, x^{h-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{r-1} &= f_{r-1}\, x^{h+p} + g_{r-1}\, x^{h+p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{r-2} &= f_{r-2}\, x^{h+2p} + g_{r-2}\, x^{h+2p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{r-s} &= f_{r-s}\, x^{h+sp} + g_{r-s}\, x^{h+sp-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{613}$$

geschrieben werden können, wenn man nur übereinkömmt, die mit $f$ und $g$ bezeichneten Constanten in den Mittelcoefficienten $X_{r-1}, X_{r-2}, \ldots.\, X_{r-s+1}$ jedesmal durch die Nulle zu ersetzen, so oft sich kein Glied mit einer solchen Potenz von $x$ in ihnen vorfindet, was jedesmal der Fall ist, wenn die Repartitionszahl $p$ gebrochen ausfällt. Man erwägt ferner, dass, wenn $y$ in der assymptotischen Form $e^{\int \varphi dx}$ gedacht wird, allgemein, für jedes $r$:

$$y^{(r)} = e^{\int \varphi dx} \left[\varphi^r + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi^{(r-1)}\right], \tag{614}$$

erhalten werde, allwo man gegenwärtig von dem eingeklammerten Polynome, welches als Factor der Exponentielle erscheint, nur zu wissen braucht, dass das erste Glied $\varphi^r$, das letzte aber $\varphi^{(r-1)}$ sei, die Mittelglieder aber allgemein in der Gestalt:

$$A.(\varphi^{(\alpha)})^a\, (\varphi^{(\beta)})^b \ldots\ldots\ldots\ldots (\varphi^{(\sigma)})^s,$$

mit der zwischen den Dimensions- und Strichexponenten nothwendigen Bedingungs-Gleichung:

$$(\alpha+1)\,\mathfrak{a}+(\beta+1)\,\mathfrak{b}+\ldots\ldots\ldots+\ldots\,.$$

erscheinen (s. §. 16, S. 297). Setzt man nun ein in der Form (607) darstellbares $\varphi$ voraus, so ist in demselben offenbar $\mathfrak{A}x^p$ das für grosse Werthe von $x$ vorherrschende Glied, dessen Kenntniss sonach auch zum erwünschten Besitze der Assymptotengleichung (608) führt. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Gradzahlen der beiden Endglieder $\varphi^r$ und $\varphi^{(r-1)}$ des eingeklammerten Polynomes in (614) bezüglich $rp$ und $p-r+1$ seien, dass sonach ersteres als das vorwiegende betrachtet werden müsse, so oft $rp>p-r+1$ ausfällt, also so oft $p$ die negative Einheit überschreitet, und namentlich wird dann $\mathfrak{A}^r x^{rp}$ das, nicht bloss in $\varphi^r$, sondern auch in dem ganzen eingeklammerten Polynome, welches als Factor in $y^{(r)}$ vorkömmt, vorherrschende Glied sein. In der That haben nicht bloss $\varphi^{(r-1)}$, sondern auch jedes der Mittelglieder von der Form $A(\varphi^{(\alpha)})^{\mathfrak{a}}(\varphi^{(\beta)})^{\mathfrak{b}}\ldots\ldots(\varphi^{(\sigma)})^{\mathfrak{s}}$ nur niederere Gradzahlen aufzuweisen, was sich auf folgende Weise darthun lässt: Es werde allgemein die Gradzahl einer Function $P$ durch $G(P)$ angedeutet, so hat man, unter der gemachten Voraussetzung dass $p=G(\varphi)>-1$ sei, nicht nur den eben angestellten Betrachtungen zufolge allgemein:

$$G\,(\varphi^r)>G\,(\varphi^{(r-1)}),$$

sondern auch im Detail:

$$G(\varphi^{\alpha+1})>G(\varphi^{(\alpha)}),\qquad G(\varphi^{\beta+1})>G(\varphi^{(\beta)}),\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,\qquad G(\varphi^{\sigma+1})>G(\varphi^{(\sigma)});$$

multiplicirt man nun diese Ungleichungen der Reihe nach mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..... $\mathfrak{s}$ und bemerkt zudem, dass allgemein die $m$-fache Gradzahl einer Function gleich der Gradzahl der $m^{\text{ten}}$ Potenz derselben ist, addirt man sie überdiess und bemerkt wieder, dass die Summe von Gradzahlen gleich der Gradzahl des Produktes sei, so gelangt man zur Ungleichung:

$$G\,(\varphi^{\mathfrak{a}(\alpha+1)+\mathfrak{b}(\beta+1)+\ldots+\mathfrak{s}(\sigma+1)})=G\,(\varphi^r)>G\,\left((\varphi^{(\alpha)})^{\mathfrak{a}}(\varphi^{(\beta)})^{\mathfrak{b}}\ldots\ldots(\varphi^{(\sigma)})^{\mathfrak{s}}\right),$$

was zu beweisen war. Man sieht sohin, dass, der Reihe nach, für sehr grosse $x$:

$$y^{(r)}=\mathfrak{A}^r x^{rp}e^{\int\varphi dx},\qquad y^{(r-1)}=\mathfrak{A}^{r-1}x^{(r-1)p}e^{\int\varphi dx},\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,\qquad y^{(r-s)}=\mathfrak{A}^{r-s}x^{(r-s)p}e^{\int\varphi dx} \tag{615}$$

bestehe, und somit, für eben solche $x$ und so lange $p>-1$ ist, mit genommener Rücksicht auf die Werthe (613) und Beibehaltung nur der höchsten Glieder:

$$X_r y^{(r)}+X_{r-1}y^{(r-1)}+\ldots\ldots+X_{r-s}y^{(r-s)}=\left[f_r\mathfrak{A}^r+f_{r-1}\mathfrak{A}^{r-1}+\ldots+f_{r-s}\mathfrak{A}^{r-s}\right]x^{rp+h}e^{\int\varphi dx} \tag{616}$$

werde. — Da aber diese Summe von Gliedern höchsten Grades dem früher Gesagten nach für sich Null geben muss, so hat man:

$$f_r\,\mathfrak{A}^r+f_{r-1}\,\mathfrak{A}^{r-1}+\ldots\ldots+f_{r-s}\,\mathfrak{A}^{r-s}=0, \tag{617}$$

und in dieser algebraischen Gleichung, die, nach $\mathfrak{A}$ aufgelöst, $s$ von der Nulle verschiedene, d. h. so viele Wurzeln liefert, als Coefficientenpaare vorhanden sind, auf die sich die gemeinsame Steigung $p$ erstreckt, ist die obenangegebene, für solche $p$, die die negative Einheit überschreiten, zur speciellen Bezeichnung der Assymptoten giltige Regel enthalten. Bezeichnet man namentlich die in

Rede stehenden Wurzeln mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ..... $\mathfrak{A}_s$, so sind die zu den $s$ entsprechenden particulären Integralen gehörigen Assymptotengleichungen die folgenden:

$$y = e^{\frac{\mathfrak{A}_1}{p+1} x^{p+1}}, \quad e^{\frac{\mathfrak{A}_2}{p+1} x^{p+1}}, \quad .......... \quad e^{\frac{\mathfrak{A}_s}{p+1} x^{p+1}}, \qquad (618)$$

und somit wäre das einfache Mittel gegeben, zu den Assymptoten sämmtlicher particulären Integrale zu gelangen, so oft diese exponentiell sind, also so oft die particulären Integrale der zweiten Functionsklasse angehören. Besitzt aber die vorgelegte Gleichung ausser solchen noch andere particuläre Integrale. die Functionen erster Klasse sind, so treten für diese algebraische Assymptoten auf, zu deren Kenntniss wir durch die Hilfsgleichung gelangen, vermöge derjenigen Werthe von $k$, die den einzelnen oder wiederholt vorkommenden Factoren $u$ des ersten Coefficienten $U_m$ angehören, und die nothwendigerweise $r$ an der Zahl vorhanden sind, wenn der vorgelegten Gleichung $r$ particuläre Integrale der erwähnten Art entsprechen. Denn in einem jeden solchen Falle ist in den $r$ letzten Coefficientenpaaren der Vorgelegten ein repartirter Abfall von Einer Einheit wenigstens auf das Paar mit Nothwendigkeit vorhanden; dieser hat eben so nothwendig in $U_m$ das Auftreten des Factors $u^r$, in den darauffolgenden $r$ Coefficienten der Hilfsgleichung aber, der Reihe nach, das Erscheinen von mindestens $r-1$, $r-2$, ...... $1$, $0$ Factoren $u$ zur Folge, was wiederum hinreicht uns die Überzeugung zu verschaffen, dass in der Gleichung (571) oder (572) kein Anfangsglied verschwinden, und also auch keiner von den $r$ Werthen für $k$ verloren gehen kann. Bezeichnet man nun diese letzteren mit $k_1$, $k_2$, ...., so tragen jene Assymptotengleichungen zweiter Art die Form:

$$y = x^{k_1-1}, \quad x^{k_2-1}, \quad .........., \qquad (619)$$

und bedeuten parabolische, geradlinige oder hyperbolische Assymptoten, je nach der Beschaffenheit des Werthes von $k$. Diese entweder exponentiellen oder algebraischen Assymptoten, $n$ an der Zahl, genügen nun, die particulären Integrale von einander zu unterscheiden, so lange nicht etwa mehrere der letzteren eine und dieselbe Assymptote gemeinschaftlich besitzen, was jedesmal der Fall ist, wenn die Gleichung (617) in $\mathfrak{A}$ gleiche Wurzeln hat, oder wenn sich bei den algebraischen (619) gleiche Werthe von $k$ vorfinden. Der Unterschied zwischen den particulären Integralen fängt dann erst bei den späteren Bestandtheilen an. Da aber durch die daraus entstehende Ungewissheit die wirkliche Integration durchaus nicht erschwert wird, und die Formenlehre ihrer Natur nach diese späteren oder spätesten Bestandtheile zu liefern nicht verpflichtet ist, so können wir an diesem Orte solche Fälle ohne Anstand ausser Acht lassen.

Die Assymptoten, von denen bisher die Rede war, sind aber, wie wir wissen, nicht die einzigen überhaupt vorhandenen, es gibt deren vielmehr noch andere, geradlinige und zur Axe der $y$ parallele, welche den einfachen Factoren $x-\alpha$ entsprechen, in die der erste und die folgenden Coefficienten zerlegt werden können und nach welchen die particulären Integrale zu ordnen auch möglich und oft sogar erspriesslich ist (s. §. 18, S. 313). Nach der Assymptote selbst kann hier nicht gefragt werden, denn besitzt man Einen Factor $x-\alpha$ des ersten Coefficienten, bei dessen Verschwinden irgend eines der

particulären Integrale durch Unendlich durchgeht, so ist die Assymptote die in der Entfernung $x=\alpha$ von der Axe der $y$ und zu derselben parallel gezogene gerade Linie, aber das Verhalten des geometrisch construirten particulären Integrales in der Nähe des Werthes $x=\alpha$ kann Gegenstand der Untersuchung sein, oder mit anderen Worten, man kann fragen, welcher der nach unseren Begriffen einfachsten, dieselbe Assymptote besitzenden Curve dieses geometrisch construirte particuläre Integral am ähnlichsten sei, und die Gleichung dieser einfachsten Curve ist es nun, mit deren Auffindung wir uns beschäftigen wollen und die auch nach einer ähnlichen Regel gefunden wird, wie die bisherigen Assymptotengleichungen.

Denken wir uns nämlich das den Factorenbau der Gleichungscoefficienten umspannende, gegen die Abscissenaxe convexe normale Polygon wirklich construirt und irgend eine seiner Seiten ins Auge gefasst, die etwa $s$ Coefficientenpaare, also $s+1$ Coefficienten umspannen mag, mit einem repartirten nicht unter der Einheit stehenden Abfalle $p$ auf das Paar. Ihm entsprechen, wie wir wissen, particuläre Integrale, $s$ an der Zahl, von der Form:

$$y = e^{\int \frac{\psi dx}{(x-\alpha)^p}}, \tag{620}$$

allwo $\psi$ gar keinen Factor $x-\alpha$ mehr hat, sohin, nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ in eine Reihe entwickelt, in der Regel wenigstens, in folgender Form darstellbar erscheint:

$$\psi = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}(x-\alpha) + \mathfrak{C}(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots\ldots, \tag{621}$$

edesmal aber für $x=\alpha$ einen von der Nulle und von Unendlich verschiedenen Werth $\mathfrak{A}$ annimmt Hieraus folgt, dass jedem dieser $s$ particulären Integrale ein so zu sagen assymptotischer Werth zur Seite stehe, in der Gestalt:

$$y = e^{\int \frac{\mathfrak{A} dx}{(x-\alpha)^p}}, \tag{622}$$

welchem sich das obige $y$ desto mehr nähert, je näher $x$ an $\alpha$ rückt, und diese $s$ in Rede stehenden assymptotischen Werthe, die sich nur durch ihre $\mathfrak{A}$ genannten Coefficienten unterscheiden, stehen jetzt als Sonderungsmittel der $s$ particulären Integrale da, und wir bringen zur Ermittlung dieser Coefficienten $\mathfrak{A}$ folgende ähnliche, der unmittelbar vorangeschickten vollständig parallelgehende Analysis:

Es seien die $s+1$ Coefficienten, die den repartirten Abfall von $p$ Einheiten auf das Paar ausweisen, der Reihe nach:

$$X_r, \quad X_{r-1}, \quad X_{r-2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X_{r-s+1}, \quad X_{r-s},$$

so werden ihnen Factoren $x-\alpha$, falls der erste $X_r$ deren $h$ an der Zahl besitzt, der Reihe nach nicht weniger zukommen als bezüglich:

$$h, \quad h-p, \quad h-2p, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad h-(s-1)p, \quad h-sp;$$

der erste und letzte, $X_r$ und $X_{r-s}$ nämlich, werden so viele, nicht mehr und auch nicht weniger enthalten, als das Schema ausweist, die mittleren $X_{r-1}$, $X_{r-2}$, .... $X_{r-s+1}$ können deren wohl mehr, aber

nicht weniger besitzen, ersteres jedesmal, wenn $p$ eine gebrochene Zahl ist. Zu diesen Coefficienten gehören nun als Factoren die nachstehenden Differentialquotienten von $y$, nämlich:

$$y^{(r)}, \quad y^{(r-1)}, \quad y^{(r-2)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad y^{(r-s+1)}, \quad y^{(r-s)},$$

welche für den obenangeführten Werth (620) von $y$ eine Reihe vorstellen von Gliedern, deren jedes vorangehende um $p$ Factoren $x-\alpha$ im Nenner mehr hat, als das nächstfolgende, also für $x=\alpha$ eine eben so abnehmende Reihe unendlich grosser Werthe, wie die der $X$ eine steigende Reihe unendlich kleiner Werthe ist, so dass ihre Producte:

$$X_r y^{(r)}, \quad X_{r-1} y^{(r-1)}, \quad X_{r-2} y^{(r-2)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad X_{r-s+1} y^{(r-s+1)}, \quad X_{r-s} y^{(r-s)}, \tag{623}$$

für nahe an $\alpha$ gewählte $x$ zu einerlei und zwar zur höchsten Grössenordnung in der vorgelegten Gleichung gehörig erscheinen (siehe §. 15, S. 288). Da aber der ins Auge gefasste Werth (620) von $y$ als ein Genüge leistender gedacht wird, so müssen die höchsten Glieder dieser Producte, aggregirt, für sich Null geben. Nun kann man sich aber die $X$ nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ geordnet denken; so geordnet biethen sie beziehungsweise Formen wie folgt:

$$\begin{aligned}
X_r &= f_r\ (x-\alpha)^h + g_r\ (x-\alpha)^{h+1} + \ldots\ldots\ldots \\
X_{r-1} &= f_{r-1}(x-\alpha)^{h-p} + g_{r-1}(x-\alpha)^{h-p+1} + \ldots\ldots\ldots \\
X_{r-2} &= f_{r-2}(x-\alpha)^{h-2p} + g_{r-2}(x-\alpha)^{h-2p+1} + \ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{r-s} &= f_{r-s}(x-\alpha)^{h-sp} + g_{r-s}(x-\alpha)^{h-sp+1} + \ldots\ldots\ldots,
\end{aligned} \tag{624}$$

nur ist zu bemerken, dass die mittleren von ihnen, falls der zu $x-\alpha$ gehörige Exponent $p$ gebrochen wäre, oder das betreffende $X$ mit einer höheren Potenz von $x-\alpha$ wirklich anfinge, ganz und gar ausser Acht zu lassen seien. Ferner wird jeder Differentialquotient von $y$ gegeben durch eine Formel wie:

$$y^{(r)} = e^{\int \frac{\psi dx}{(x-\alpha)^p}} \left[\frac{\psi^r}{(x-\alpha)^{rp}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\omega}{(x-\alpha)^{p+r-1}}\right]; \tag{625}$$

das erste der eingeklammerten Glieder wiegt, für sehr kleine $x-\alpha$, dem letzten derselben vor, wenn $rp > p+r-1$ folglich $p>1$ ist, und es kann auf die bereits geübte Weise gezeigt werden, dass dasselbe erste unter solchen Umständen auch allen mittleren der Grössenordnung nach vorwiege. Wir haben also für sehr kleine $x-\alpha$, für welche, zufolge (621), $\psi$ sich dem constanten Werthe $\mathfrak{A}$ nähert:

$$y^{(r)} = \mathfrak{A}^r \frac{e^{\int \frac{\mathfrak{A} dx}{(x-\alpha)^p}}}{(x-\alpha)^{rp}}, \quad y^{(r-1)} = \mathfrak{A}^{r-1} \frac{e^{\int \frac{\mathfrak{A} dx}{(x-\alpha)^p}}}{(x-\alpha)^{(r-1)p}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad y^{(r-s)} = \mathfrak{A}^{r-s} \frac{e^{\int \frac{\mathfrak{A} dx}{(x-\alpha)^p}}}{(x-\alpha)^{(r-s)p}}, \tag{626}$$

und hieraus, mit fortwährender Beibehaltung nur der ersten Glieder der Entwicklung:

$$X_r y^{(r)} + X_{r-1} y^{(r-1)} + \ldots\ldots + X_{r-s} y^{(r-s)} = [f_r \mathfrak{A}^r + f_{r-1} \mathfrak{A}^{r-1} + \ldots\ldots + f_{r-s} \mathfrak{A}^{r-s}] \frac{e^{\int \frac{\mathfrak{A} dx}{(x-\alpha)^p}}}{(x-\alpha)^{rp-h}}. \tag{627}$$

Diese der (616) so ganz ähnliche Gleichung, welcher, mit Rücksicht auf die verschiedene Bedeutung der $f$ und $\mathfrak{A}$ genannten Constanten, durch dieselben Werthe von $\mathfrak{A}$, genügt wird, welche auch die (617) erfüllen, führt auch zu derselben Regel, die hier noch einmal auszusprechen unnöthig wäre. Diejenigen Werthe von $y$, die sich den in Rede stehenden particulären Integralen in der Nähe von $x=\alpha$ am meisten nähern, und aus diesem Grunde die Geltung von Assymptoten zweiter Approximation haben, sind:

$$(628)\qquad y = e^{\int \frac{\mathfrak{A}_1 dx}{(x-\alpha)^p}}, \quad e^{\int \frac{\mathfrak{A}_2 dx}{(x-\alpha)^p}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^{\int \frac{\mathfrak{A}_s dx}{(x-\alpha)^p}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(629)\qquad y = e^{\frac{-\mathfrak{A}_1}{(p-1)(x-\alpha)^{p-1}}}, \quad e^{\frac{-\mathfrak{A}_2}{(p-1)(x-\alpha)^{p-1}}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad e^{\frac{-\mathfrak{A}_s}{(p-1)(x-\alpha)^{p-1}}}.$$

Die letztere dieser zwei Formen gilt nicht mehr, wenn $p=1$ ist; wir schliessen aber in diesem Falle auf $s$ particuläre Integrale in der Gestalt $y=\frac{Q}{(x-\alpha)^k}$, wo $Q$ für $x=\alpha$ weder Null noch unendlich wird. Die Werthe von $k$, $s$ an der Zahl, liefert die wohlbekannte Gleichung (48) des §. 7: werden diese mit $k_1, k_2, \ldots. k_s$ bezeichnet, so erhält man, anstatt der obigen (629), die folgenden Assymptotengleichungen:

$$(630)\qquad y = \frac{1}{(x-\alpha)^{k_1}}, \quad \frac{1}{(x-\alpha)^{k_2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{(x-\alpha)^{k_s}}.$$

Für solche Werthe von $p$ endlich, welche unter der Einheit liegen, findet kein Unendlichwerden des particulären Integrales für $x=\alpha$ statt, man hätte sohin auch keine eigentliche Assymptote. Indess treten hier, wie in den §§. 15 und 18 gezeigt worden ist, gewisse besondere Beziehungen auf, auf die der Rechner einiges Augenmerk zu richten haben wird.

Die Vorschriften, die wir bisher, im ganzen Verlaufe des gegenwärtigen Abschnittes, zur Erkenntniss der Form, Sichtung und Unterscheidung der particulären Integrale allmählig entwickelt haben, die einer Differentialgleichung mit algebraischen und ganzen Coefficienten Genüge zu leisten vermögen, reichen auch zu diesem Zwecke vollkommen hin, und es kann hiemit der Gegenstand als abgeschlossen betrachtet werden. Man kann sogar sagen, dass weitere Untersuchungen über die verschiedenen Gestalten des allgemeinen Integrales mindestens der Formenlehre wenig frommen würden; denn fiele es vielleicht Jemanden ein die Frage zu stellen: ob man nicht auf dem betretenen Wege weiter gehen könne, ob man nicht von der Hilfsgleichung, welche die der Vorgelegten Genüge leistenden Werthe in Form von einfachen bestimmten Integralen voraussetzt und gelegentlich auch erkennen lehrt, zu einer ihr entsprechenden zweiten, von dieser vielleicht zu einer dritten u. s. w. Hilfsgleichung fernere Schritte machen, und so das allgemeine Integral darstellen könne, nach Belieben, als eine Summe von einfachen oder Doppel-Integralen, ingleichen von 3-fachen, 4-fachen, ..... $q$-fachen solchen? so würde er sich nach näherer Beleuchtung überzeugen, dass mit der ersten Hilfsgleichung, die auch wir ausführlich kennen gelernt haben, und mit den ihr und der vorgelegten Gleichung Genüge leistenden analytischen Gestalten, der

Cyclus aller hier möglichen Formen abgeschlossen sei. Denn **die zweite Hilfsgleichung ist eben die vorgelegte Gleichung selbst**, und der daraus in Form eines Doppelintegrales hervorgehende Werth von $y$ eine identische Gleichung, mit der Fourier'schen nahe verwandt und gelegentlich mit ihr zusammenfallend. Auch darf man nicht glauben, dass man zu neuen Formen particulärer Integrale gelangen könne dadurch, dass man die erste Hilfsgleichung, bevor man aus ihr die zweite ableitet, zuerst einer Transformation, etwa einer Veränderung der abhängigen Veränderlichen $V$, unterwirft; denn, wenngleich auf diese Weise eine zweite Hilfsgleichung erhalten werden kann, die von der Vorgelegten verschieden ist, so ist es doch immer nur eine solche, welche auch durch Transformation der letzteren zu erzielen gewesen wäre, welche daher unmöglich zu neuen Formen führen kann.

Es knüpft sich hieran noch eine zweite Bemerkung: man stösst nämlich manchmal auf **Differentialgleichungen, welche eine symbolische Zerlegung in zwei oder mehrere Factoren gestatten**, so beiläufig wie diess bei jenen mit constanten Coefficienten der Fall ist — wir meinen, dass sich gelegentlich eine Gleichung wie:

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots\dots\dots + X_1 y' + X_0 y = 0 \tag{631}$$

schreiben lasse wie folgt:

$$\left(\mathfrak{X}_r \frac{d^r}{dx^r} + \mathfrak{X}_{r-1} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} + \dots\dots\dots\dots + \mathfrak{X}_1 \frac{d}{dx} + \mathfrak{X}_0\right) P = 0, \tag{632}$$

wobei:

$$P = \mathfrak{I}_{n-r} y^{(n-r)} + \mathfrak{I}_{n-r-1} y^{(n-r-1)} + \dots\dots\dots\dots + \mathfrak{I}_1 y' + \mathfrak{I}_0 y \tag{633}$$

ist, unter $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{I}$ wieder algebraische und ganze Functionen von $x$ verstanden, so dass unter anderen $X_n = \mathfrak{X}_r \mathfrak{I}_{n-r}$ sein muss — eine Gleichung, die man als den Ausgangspunkt der nach ähnlichen Formen forschenden Untersuchung anzusehen hat. Genau auf dieselbe Weise wird man sich aber auch die Hilfsgleichung der (631) gelegentlich gestaltet denken können, in der Form nämlich:

$$\left(\mathfrak{u}_s \frac{d^s}{du^s} + \mathfrak{u}_{s-1} \frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} + \dots\dots\dots\dots + \mathfrak{u}_1 \frac{d}{du} + \mathfrak{u}_0\right) Q = 0, \tag{634}$$

wobei:

$$Q = \mathfrak{U}_{m-s} V^{(m-s)} + \mathfrak{U}_{m-s-1} V^{(m-s-1)} + \dots\dots\dots\dots + \mathfrak{U}_1 V' + \mathfrak{U}_0 V \tag{635}$$

erhalten wird. Nun: eine solche symbolische Zerlegung in Factoren ist entweder bei beiden Gleichungen — der vorgelegten und der Hilfsgleichung — möglich, oder bei beiden zugleich unmöglich, und ist sie bei einer derselben gelungen, so hat man sie bei der anderen auch. In der That: Hätte man die Hilfsgleichung auf diese Weise zerlegt, so würde man ihr durch Werthe von $V$ Genüge zu leisten suchen, welche die einfachere $Q = 0$ erfüllen. Die dieser letzteren entsprechende Hilfsgleichung wird nun einerseits offenbar von niedererer Ordnungszahl und wohl auch niedererer Gradzahl der Coefficienten sein als die Vorgelegte, und die ihr Genüge leistenden Werthe werden überdem eben die Vorgelegte (631) erfüllen — ihr Gleichungspolynom wird also offenbar für $P$ angenommen werden dürfen, aus welchem sich dann mit Hilfe der (631) der Werth der in (632) vorkommenden $\mathfrak{X}$ finden lassen muss. Übrigens

werden wir auf den hier nur obenhin angedeuteten Vorgang der Zerlegung einer Differentialgleichung in symbolische Factoren, von deren gelegentlichen Nutzen die §. 19, S. 341 angestellten Untersuchungen Zeugniss geben, ausführlicher im nächsten Abschnitte zu sprechen kommen.

Wenn wir endlich gesehen haben, dass die Integrale von Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten nur höchst selten und in ganz speziellen Fällen enthalten sind in solchen mit Coefficienten des ersten Grades wie $a+bx$, indem die Integration der ersteren von der Auflösung einer algebraischen Gleichung, die der letzteren von der Integration einer Hilfsgleichung der ersten Ordnung abhängig gemacht werden kann, so folgt daraus, dass eine Differentialgleichung mit Coefficienten vom zweiten Grade, die mit einer Hilfsgleichung der zweiten Ordnung in Verbindung steht, Genüge leistende Werthe besitzen werde in noch mannigfaltigeren und verwickelteren Formen, in denen die früher erwähnten nur als sehr spezielle Fälle enthalten sind. Man wird daher hier ganz vergebens nach geschlossenen Formen suchen, weil die Differentialgleichung, kraft ihres Coefficientenbaues, von dem Integrale Eigenschaften fordert, welche ein durch die gangbaren und in endlicher Zahl angebrachten Rechnungsoperationen zusammengekitteter Ausdruck nicht mehr besitzen kann, und wollte man dieser Unzulänglichkeit durch die Erfindung und Einführung neuer Transcendenten abhelfen, so wäre damit, falls diess auch durchführbar sein sollte, doch sehr wenig geholfen, weil man für Differentialgleichungen mit höher gebauten Coefficienten neuer stets und neuer Transcendenten benöthigte. Glücklicherweise stehen nun aber die Integrale aller dieser Differentialgleichungen wenigstens insoferne in einem erfassbaren Zusammenhange, als ihnen allen, was auch der Bau ihrer Coefficienten sein mag, einerlei Formen der Assymptoten zugehören, woraus folgt, dass sie sich doch, im Grossen der geometrischen Anschauung, auf eine und dieselbe Weise bildlich darbiethen, dass sich sohin die oberwähnten verwickelteren Eigenschaften, wenn sie auch eine Darstellung des Integrales in geschlossener Form unmöglich machen, dem geometrischen Vorstellungsvermögen vorgeführt, nur als Feinheiten präsentiren, bestehend etwa in einem gewissen besonderen Schwunge der Curve von geringem numerischen Bestimmungswerthe, und sohin auch für uns nur von geringer Bedeutung. Wir halten es um so weniger für nützlich, diesen Bemerkungen eine grössere Ausdehnung zu geben, als wir später bei der Aufstellung der Integrationsmethoden selbst auf denselben Gegenstand zurückzukommen genöthigt sein werden: eine Bestätigung jedoch der hier hingestellten Behauptungen in einigen einfachen Beispielen halten wir der Klarheit wegen für zuträglich, und diese soll der folgende Paragraph bringen, der die geschlossenen Formen, insoferne als sie Gegenstand der Formenlehre sein können, der Betrachtung zu unterwerfen bestimmt ist.

## §. 22.

## Unbestimmte Integrale.

Wer die Integration der Differentialgleichungen als Zweck ansieht, und nicht als Mittel zu einem höheren Zwecke: die Ermittlung der darin enthaltenen Naturgesetze nämlich, wird stets geneigt sein, geschlossene Formen aufzusuchen, falls er überhaupt zwischen mehreren verschiedenen Formen die Wahl hat. Die Mannigfaltigkeit jedoch der analytischen Gebilde, die hier zu erscheinen vermögen und sich auch sehr bald dem Auge des Forschers enthüllen, wird ihn sehr bald zwingen, unter geschlossenen Formen nicht bloss diejenigen, die so eigentlich diesen Namen verdienen: algebraische ganze Functionen nämlich und rationale Brüche zu verstehen, sondern die Benennung »geschlossene Form« auch auf Exponentiellen, trigonometrische Functionen, Kreisbögen, Logarithmen u. s. w. auszudehnen, wiewohl sie im Grunde nur eine Berechnung aus unendlichen Reihen, also einer nicht geschlossenen Form, zulassen. Diess lässt sich nun allenfalls noch dadurch rechtfertigen, dass man unter geschlossener Form eine solche versteht, welche die Function, die sie darzustellen berufen ist, durch eine Reihe von Rechnungsoperationen in endlicher Zahl liefert und unter die Rechnungsoperationen auch das Nachschlagen bereits berechneter Tafeln zählt. Allein diess ist noch nicht genug, man ist vielmehr, durch die vorerwähnte unendliche Mannigfaltigkeit der verschiedenen, einer Differentialgleichung zu genügen vermögenden Gestalten, gezwungen, den Begriff der geschlossenen Form noch weiter auszudehnen, auf Formen wie:

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V\, du \qquad \text{und} \qquad \frac{d^m}{du^m}\left[e^{ux}\, V\right]\Big\}_{\alpha},$$

deren numerische Berechnung durch keinerlei Tafeln unterstützt ist, wenn nur $V$ eine Function von $u$ bedeutet, die insoferne geschlossen ist, als sie aus $u$ durch eine endliche Reihe von Rechnungsoperationen im obenangedeuteten weiteren Sinne, nämlich das Nachschlagen von Tafeln darunter mitgezählt, gebildet wird. Man kann aber noch weiter gehen — man kann sich sämmtliche einer Differentialgleichung Genüge leistenden Werthe unter der Gestalt $e^{\int \varphi dx}$ denken und die verschiedenen $\varphi$ als Wurzeln einer höheren, algebraischen Gleichung betrachten, und kann diese Form auch noch eine geschlossene nennen, wenn jene algebraische Gleichung lauter geschlossene Coefficienten besitzt, auch wenn sie sich rational in Factoren nicht zerlegen lässt. Und so kann man fortschreiten ins Unendliche, so wird der Begriff der geschlossenen Form ein immer weiterer, aber je weiter, desto illusorischer, nutzloser.

Wir legen aber gleichwohl auf geschlossene Formen, besonders wenn sie einfach sind, auch dann noch, wenn sie weder die numerische Berechnung unterstützen, noch die klare Anschauung besonders fördern, keinen geringen Werth, weil wir, durch Erfahrung belehrt, von ihnen jedesmal gewisse Aufschlüsse über die Verwandtschaft der Functionen erwarten. Wir leiten daher beim Integrationsgeschäfte selbst ein sorgliches Augenmerk auf die geschlossenen Formen, an denen die Rechnung so zu sagen vorbeiführt, und erörtern die Bedingungen ihrer Existenz; finden uns aber, wie ganz natürlich, veranlasst, auch unbestimmte, erste, oder höhere, $r^{te}$ Integrale, wie etwa:

$$\int z \,.\, dx \qquad \text{oder} \qquad \int^{r} z \,.\, dx^{r}\,.$$

wenn $z$ eine geschlossene Function von $x$ ist, unter die geschlossenen Formen aufzunehmen, gleichgiltig, ob das 1^te oder $r$^te Integral als geschlossener Ausdruck darstellbar ist oder nicht; denn diese Gebilde stehen einerseits an Complication mit den obigen bestimmten Integralen auf einerlei Rangstufe, und tauchen andererseits häufig genug beim Integrationsgeschäfte auf. Es liegt daher der Formenlehre ob, über die Art des möglichen Vorhandenseins solcher Formen Untersuchungen anzustellen, wiewohl sie zur Unterscheidung der einzelnen particulären Integrale nichts beitragen, und auch, wenn vorhanden, den Gleichungscoefficienten keine unmittelbar in die Augen fallenden Merkmale aufdrücken.

Um zuvörderst darzuthun, dass sie in den particulären Integralen der linearen Differentialgleichungen zu erscheinen vermögen, und diess zwar sehr häufig und namentlich dann, wenn das allgemeine Integral zerlegt werden kann in mehrere geschlossene Gruppen, bemerken wir: dass sie unter anderen durch dieselbe Operation in eine Differentialgleichung eingeführt werden, durch welche man neue, Genüge leistende Werthe in Form von bestimmten Integralen einführt, d. h. die Gleichung Ein- oder mehrmal differenzirend und die durch Differentiation erhaltenen Resultate mit gewissen Constanten, oder auch einfachen algebraischen Polynomen multiplizirend und addirend. Die beiden zur Sprache gebrachten Formen, die nämlich des unbestimmten und die des bestimmten Integrales, stehen also in einer gewissen Verwandtschaft, welche wir zuvörderst in den einfachsten Fällen an einem Beispiele, dann aber so allgemein der Erörterung unterwerfen wollen, als diess zu unseren Zwecken dienlich erscheint.

Wenn es sich darum handelt, eine Differentialgleichung höherer Ordnung zu bilden, die irgend ein gegebenes particuläres Integral hat, z. B. das:

$$y = C \,.\, e^{\alpha x}\,(x - a)^{h}\,, \tag{636}$$

so kann diess geschehen auf unendlich viele verschiedene Weisen: indem man diesen Ausdruck einer gewissen Anzahl von Differentiationen unterwirft, und die gewonnenen Gleichungen so unter einander verbindet, dass die willkürliche Constante $C$ eliminirt wird, was nur auf eine einzige Weise geleistet werden kann, wenn die zu bildende Differentialgleichung der ersten Ordnung angehören soll, sich aber dagegen auf unendlich viele Arten thun lassen wird, wenn die Differentialgleichung eine höhere Ordnungszahl ausweist. Differenziren wir im gegenwärtigen Falle nur zweimal, wodurch wir zum folgenden Systeme von drei Gleichungen gelangen:

$$\begin{aligned} y &= C.e^{\alpha x}\,(x-a)^{h} \\ y' &= C.e^{\alpha x}\,(x-a)^{h-1}\left[\alpha\,(x-a) + h\right] \\ y'' &= C.e^{\alpha x}\,(x-a)^{h-2}\left[\alpha^{2}\,(x-a)^{2} + 2\alpha h\,(x-a) + h\,(h-1)\right]. \end{aligned} \tag{637}$$

Eliminiren wir aus der ersten und zweiten die Constante $C$, so ist die Eliminationsgleichung die folgende einzige und bestimmte Differentialgleichung der ersten Ordnung, die dieses bestimmte Integral hat:

$$(x-a)\,y' - \left[\alpha\,(x-a) + h\right]\,y = 0. \tag{638}$$

Wir können aber das $C$ auch aus allen drei Gleichungen (637) eliminiren, indem wir dieselben auf ganz willkürliche Art unter einander combiniren, z. B. indem wir, bei vollständiger Übergehung der zweiten unter ihnen, die erste und dritte zu diesem Zwecke verwenden, oder indem wir die aus der ersten und zweiten abgeleitete (638), jener Rechnungsoperation unterwerfen, die durch das Symbol $\left(\frac{d}{dx} - \beta\right)$ angedeutet wird u. s. w. Wir kommen auf diese Weise zu unzähligen Gleichungen der zweiten Ordnung nach $y$, von welchen wir nur die beiden auf die speciell erwähnte Weise abgeleiteten hiehersetzen:

$$(x-a)^2 y'' - \left[\alpha^2 (x-a)^2 + 2\alpha h (x-a) + h(h-1)\right] y = 0, \tag{639}$$

$$(x-a) y'' - \left[(\alpha+\beta)(x-a) + h - 1\right] y' + \left[\alpha\beta (x-a) - \alpha + h\beta\right] y = 0. \tag{640}$$

Alle kommen darin überein durch das Eine gegebene particuläre Integral (636) erfüllt zu werden, und unterscheiden sich im zweiten, welches erscheinen wird in Form eines Produktes aus eben dem ersten gegebenen in ein unbestimmtes Integral, oder auch, wenn man durch bestimmte Integrale Genüge zu leisten für gut findet, so ist es, in Übereinstimmung mit den in §. 19, S. 332 und 341 gemachten Bemerkungen, dieselbe Function $V$, welche allen diesen Gleichungen gemeinschaftlich wird. In der That: nehmen wir zuvörderst die der ersten Ordnung angehörige (638) vor, und bringen wir darauf die Integrationsmethode in Anwendung, die im II. Abschnitte auseinandergesetzt wurde. Statuiren wir also:

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V.du, \tag{641}$$

so wird hier:

$$U_1 = u - \alpha, \qquad U_0 = -a(u-\alpha) - h,$$

sohin die Hilfsgleichung:

$$U_1 V' + V(U_1' - U_0) = V'(u-\alpha) + V\left[a(u-\alpha) + h + 1\right] = 0, \tag{642}$$

$$\int \frac{U_0}{U_1} du = -au - h \log (u-\alpha),$$

$$V = \frac{e^{-au}}{(u-\alpha)^{h+1}} \quad \text{und zur Bestimmung der Gränzen} \quad \frac{e^{u(x-a)}}{(u-\alpha)^h} = 0. \tag{643}$$

und weil der letzteren, **für negative** $h$, die Werthe $u=\alpha$ und $u=\pm\infty$ Genüge leisten, je nachdem $x-a$ negativ wird oder positiv, so erscheint für negative $h$ der Werth von $y$ in der folgenden Form eines bestimmten Integrales:

$$y = C\int_{\alpha}^{\mp\infty} \frac{e^{u(x-a)}.du}{(u-\alpha)^{h+1}}; \tag{644}$$

dagegen genügen der obigen Gränzengleichung **für positive** $h$ die Werthe $u=+\infty\sqrt{-1}$ und $u=-\infty\sqrt{-1}$. Diess gibt nun ein $y$ entweder in der Form eines bestimmten Integrales, oder, nach dem bekannten Completirungsverfahren, in der eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl; d. h. wir erhalten:

(645)
$$y = C\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} \frac{e^{u(x-a)}.du}{(u-\alpha)^{h+1}}, \quad \text{oder} \quad y = C\frac{d^h}{du^h}\left[e^{u(x-a)}\right]\Big\}_{u=\alpha}.$$

Der vor Augen liegende Differentialquotient ist auch für negative $h$ giltig und, zusammt den erhaltenen beiden bestimmten Integralen, dem gegebenen particulären Werthe (636) offenbar identisch gleich. Wollte man aber der Hilfsgleichung durch ein bestimmtes Integral Genüge leisten, anstatt sie, wie hier geschehen, durch den obigen Werth (643) von $V$ direct zu integriren, indem man statuirte:

(646)
$$V = \int_{v'}^{v''} e^{-vu}\, W.dv,$$

so würde sich $W$ als abhängig herausstellen von der Integration der folgenden Differentialgleichung:

(647)
$$(v-a)\; W' - \left[\alpha\,(v-a) + h\right] W = 0\,,$$

die mit der Gegebenen (638) zusammenfällt, insoferne, als die eine aus der anderen durch Vertauschung von $W$, $v$ beziehungsweise mit $y$, $x$ hervorgeht, man demnach, die Form (636) im Auge habend:

$$W = C.e^{\alpha v}\,(v-a)^h$$

bekömmt. Hierdurch erscheint allerdings der Werth von $y$ in Form eines Doppelintegrals, d. h.:

(648)
$$y = C.e^{\alpha x}\,(x-a)^h = C\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}}\int_{a}^{\mp\infty} e^{u(x-v)}.e^{\alpha v}\,(v-a)^h.du.dv\,;$$

diess ist aber offenbar eine identische, der Fourier'schen nahe verwandte Gleichung (s. II. Absch. S. 84).

Wenden wir uns jetzt zur Differentialgleichung der zweiten Ordnung (640), welche, in Folge der Form ihrer Coefficienten, die Anwendung derselben Integrationsmethode verstattet. Wir gewinnen in derselben:

$$U_1 = u^2 - (\alpha+\beta)\,u + \alpha\beta\,, \qquad U_0 = -a.U_1 - u\,(h-1) + h\beta - \alpha\,,$$

also die Hilfsgleichung:

(649)
$$(u-\beta)\left[(u-\alpha)\;V' + \left(a\,(u-\alpha) + h + 1\right)V\right] = 0.$$

Wir gewahren an ihr den einfachsten Fall der Zerlegung in zwei Factoren, von welchen der eine $u-\beta$ der andere aber das alte Hilfsgleichungspolynom (642) ist. Diess kömmt daher, weil auch die Differentialgleichung der zweiten Ordnung in $y$, von welcher die Rede ist, vorausgesetztermassen eine sehr einfache Zerlegung in zwei symbolische Factoren gestattet, von denen der eine $\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)$ ist, der andere aber das alte Gleichungspolynom (638) darstellt. Wir gewinnen weiter:

$$\int\frac{U_0}{U_1}\,du = -au + \log\frac{u-\beta}{(u-\alpha)^h}, \qquad V = \frac{e^{-au}}{(u-\alpha)^{h+1}}.$$

und zur Bestimmung der Gränzen:

(650)
$$\frac{u-\beta}{(u-\alpha)^h}\,e^{u(x-a)} = 0.$$

Wurzeln dieser Gleichung sind, für **negative** $h$, die folgenden: $u=\alpha$, $u=\beta$, $u=\pm\infty$, je nachdem $x-a$ negativ ist, oder positiv, daher das allgemeine Integral für diesen Fall so geschrieben werden kann:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\mp\infty} \frac{e^{u(x-a)}.du}{(u-\alpha)^{h+1}} + C_2 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{e^{u(x-a)}.du}{(u-\alpha)^{h+1}}; \tag{651}$$

für **positive** $h$ hingegen geht uns die Eine Wurzel $u=\alpha$ verloren, ein Differentialquotient mit allgemeiner Ordnungszahl tritt auf, und das allgemeine Integral erhält folgende Gestalt:

$$y = C_1 \frac{d^h}{du^h}\left[e^{u(x-a)}\right]\Big\}_{\alpha} + C_2 \int_{\beta}^{\mp\infty} \frac{e^{u(x-a)}.du}{(u-\alpha)^{h+1}}. \tag{652}$$

Der erste Bestandtheil ist überall der angegebene, allen Differentialgleichungen gemeinschaftliche particuläre Werth (636), der zweite wird, für positive $h$ und reelle $\beta$ und $\alpha$, wenigstens wenn $\beta<\alpha$ ist, dem ersten Anscheine nach unbrauchbar, weil die Function unter dem Integralzeichen zwischen den Grenzen $\beta$ und $\infty$ für $u=\alpha$ einen unendlichen Werth bekömmt. Bei näherer Beleuchtung gewahrt man aber, dass eben dieser zweite Bestandtheil, weit entfernt unbrauchbar zu sein, wenigstens der Form nach das allgemeine Integral in sich enthalte. Um diess darzuthun, nehmen wir an, der dem $x$ ertheilte Werth liege unter $a$, so dass $x-a$ negativ ist, und bezeichnen eben diesen zweiten Bestandtheil mit $C_2\xi$, so dass:

$$\xi = \int_{\beta}^{\infty} \frac{e^{u(x-a)}\,du}{(u-\alpha)^{h+1}} \tag{653}$$

wird, und unterwerfen jetzt diese Gleichung jener Reihe von Rechnungsoperationen, die das Symbol $\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)^{h+1}$ andeutet, so erhalten wir:

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)^{h+1}\xi = \int_{\beta}^{\infty} e^{u(x-a)}\,du = -\frac{e^{\beta(x-a)}}{x-a}.$$

Diess ist aber eine Differentialgleichung in $\xi$, deren integrirender Factor $e^{-\alpha x}$ ist, mit welchem multiplizirt der erste Theil derselben in den vollständigen $(h+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten des Produktes: $e^{-\alpha x}\xi$ übergeht, so dass wir haben:

$$e^{-\alpha x}\,\xi = -\int^{h+1} \frac{e^{(\beta-\alpha)x-a\beta}}{x-a}\,dx^{h+1}.$$

ein Ausdruck, dem als Ergänzung eine Reihe von Gliedern wie folgt angehört:

$$B_0\,x^h + B_1\,x^{h-1} + B_2\,x^{h-2} + \ldots\ldots\ldots\,,$$

die sich zu einem algebraischen geschlossenen Polynome gestalten, wenn $h$ eine ganze Zahl ist, für gebrochene oder allgemeine $h$ jedoch eine unendliche Reihe darstellen. Die Coefficienten $B_0$, $B_1$, $B_2$, ... sind aber hier offenbar keine willkürlichen Constanten, sondern vielmehr in der Art zu bestimmen.

dass der vorgelegten Differentialgleichung (640) Genüge geleistet wird. Es erscheint sohin das vollständige $C_2 \xi$ in der nachfolgenden Form:

$$C_2 \xi = C_2 e^{\alpha x} (B_0 x^h + B_1 x^{h-1} + \ldots\ldots) - C_2 e^{\alpha x} \int^{h+1} \frac{e^{(\beta-\alpha)x - a\beta}}{x-a} dx^{h+1}. \tag{654}$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes besitzt, wenn er überhaupt von der Nulle verschieden gedacht wird, die Assymptote $e^{\alpha x}$; eben so kömmt dem zweiten die Assymptote $e^{\beta x}$ zu; da nun aber die Differentialgleichung (640) nur ein einziges particuläres Integral mit der Assymptote $e^{\alpha x}$, das (636) nämlich, besitzt, so ist der in (654) ersichtliche erste Bestandtheil mit ebendemselben zusammenfallend und wir sehen sohin, dass das dem Anscheine nach unbrauchbare particuläre Integral (653), mittelst des angewendeten Verfahrens in zwei Bestandtheile zerklüftet, der Form nach wenigstens, das Allgemeine der (640) repräsentire.

Man hätte aber auch die zweite, der Differentialgleichung (640) Genüge leistende Function auffinden können dadurch, dass man dieselbe, nach der S. 25, §. 5 des I. Abschnittes allgemein auseinandergesetzten, und S. 101 des II. Abschnittes auf einen besonderen Fall angewendeten Methode, von dem Einen bekannten particulären Integrale (636) befreit hätte. Macht man davon wirklich Gebrauch, so gelangt man zu einem neuen Ausdrucke für den zweiten noch fehlenden Werth, nämlich:

$$y = C e^{\alpha x} (x-a)^h \int \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(x-a)^{h+1}} dx, \tag{655}$$

welcher abermals die Eigenschaft hat das allgemeine Integral darzustellen, und zwar vollständig und nicht bloss der Form nach, indem zu dem als Factor vorkommenden unbestimmten Integrale eine willkürliche Constante hinzugefügt werden kann, und man namentlich ganz allgemein:

$$\int z dx = \int_0^x z dx + c \tag{656}$$

zu schreiben berechtigt ist, wo $c$ eine willkürliche Constante bedeutet. Nach dieser Schreibweise gestaltet sich aber der Werth von $y$ wie folgt:

$$y = C_1 e^{\alpha x} (x-a)^h + C_2 e^{\alpha x} (x-a)^h \int \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(x-a)^{h+1}} dx, \tag{657}$$

wodurch seine Eigenschaft ein allgemeines Integral zu sein in die Augen fällt. Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass diese Form der früher gewonnenen (654) identisch gleich sei, wenn auch die eine nur ein einfaches, die andere ein $(h+1)^{\text{tes}}$ unbestimmtes Integral in sich schliesst, und es lässt sich diese Identität ohne Schwierigkeit nachweisen. In der That braucht hier nur gezeigt zu werden, dass allgemein und für jedes $h$:

$$(x-a)^h \int \frac{e^{(\beta-\alpha)x} dx}{(x-a)^{h+1}} = b \int^{h+1} e^{(\beta-\alpha)x - a\beta} \frac{dx^{h+1}}{x-a} \tag{658}$$

sei, unter $b$ irgend eine Constante verstanden. Diess ist nun für $h=0$, und wenn man $e^{a\beta}$ anstatt

$b$ setzt, wie der Augenschein lehrt, vollkommen richtig und kann, für ganze und positive Werthe von $h$ dadurch dargethan werden, dass man zeigt, wie, unter der Voraussetzung der Giltigkeit der vorliegenden Formel für irgend ein $h$, auch diejenige richtig sei, die man aus ihr erhält, $h+1$ anstatt $h$ schreibend und allenfalls noch die Constante $b$ in eine andere $B$ verwandelnd, d. h. die:

$$(x-a)^{h+1}\int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}\,dx}{(x-a)^{h+2}} = B\int^{h+2} e^{(\beta-\alpha)x-\alpha\beta}\,\frac{dx^{h+2}}{x-a}, \qquad ($$

und diess bewerkstelligen wir auf folgende Weise: Wir multipliziren die obige als richtig angenommene Gleichung (658) mit $dx$ und integriren, so kömmt zunächst:

$$\int\left[(x-a)^h\int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}\,dx}{(x-a)^{h+1}}\right]dx = b\int^{h+1} e^{(\beta-\alpha)x-\alpha\beta}\,\frac{dx^{h+1}}{x-a}.$$

Bringen wir im ersten Theile dieser Gleichung das Verfahren des theilweisen Integrirens in Anwendung, so zwar, dass in der allgemeinen Formel $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ zuvörderst:

$$u = \int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}\,dx}{(x-a)^{h+1}}, \qquad dv = (x-a)^h\,dx$$

geschrieben wird, so erhalten wir zunächst:

$$\int\left[(x-a)^h\int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}\,dx}{(x-a)^{h+1}}\right]dx = \frac{(x-a)^{h+1}}{h+1}\int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}\,dx}{(x-a)^{h+1}} - \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(h+1)(\beta-\alpha)}$$

dann aber, dasselbe Verfahren noch einmal anwendend:

$$u = \frac{1}{(x-a)^{h+1}}, \qquad dv = e^{(\beta-\alpha)x}\,dx$$

setzend:

$$\int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}\,dx}{(x-a)^{h+1}} = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(\beta-\alpha)(x-a)^{h+1}} + \frac{h+1}{\beta-\alpha}\int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}\,dx}{(x-a)^{h+2}}.$$

Durch Einführung der so erhaltenen Werthe in die frühere Gleichung gelangt man zur nachfolgenden:

$$\int\left[(x-a)^h\int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}\,dx}{(x-a)^{h+1}}\right]dx = \frac{(x-a)^{h+1}}{\beta-\alpha}\int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}\,dx}{(x-a)^{h+2}} = b\int^{h+2} e^{(\beta-\alpha)x-\alpha\beta}\,\frac{dx^{h+2}}{x-a}.$$

woraus die (659) unmittelbar folgt, wenn $B=(\beta-\alpha)\,b$ vorausgesetzt wird. Es ist auch keinem Zweifel unterworfen, dass die hier für ganze und positive $h$ nachgewiesene Identität allgemein für alle Werthe dieses Exponenten fortbestehe, schon aus dem Grunde, weil offenbar beiderlei Ausdrücke ein und dasselbe particuläre Integral, somit eine und dieselbe Function von $h$ darstellen.

Wenden wir uns jetzt zur Differentialgleichung (639), so begegnen wir bei der Integration derselben Schritt für Schritt den ähnlichen Erscheinungen. Namentlich gelangen wir, das Integral in der Form $\int_{u'}^{u''} e^{ux}\,V\,du$ auffassend, zur folgenden Hilfsgleichung der zweiten Ordnung in $V$:

$$(660)\quad (u^2-\alpha^2)V''+\left[2a(u^2-\alpha^2)+4u+2\alpha h\right]V'+\left[a^2(u^2-\alpha^2)+a(4u+2\alpha h)-h(h-1)+2\right]V=0,$$

da wir aber wissen, dass die Gleichung in $y$, zu welcher sie gehört, ein particuläres Integral in endlicher Form besitze, nämlich dass von der Integration der (638) abhängige (636) und sich somit symbolisch in zwei Factoren zerlegen lasse, von welchen der eine eben das Gleichungspolynom der (638) sein muss, was sich, wenn man will, auch *a posteriori* nachweisen lässt, nachdem unsere Gleichung in $y$ auch so geschrieben werden kann:

$$(661)\quad \left[(x-a)\frac{d}{dx}+\alpha x-a\alpha+h-1\right]\left[(x-a)y'-(\alpha x-a\alpha+h)y\right]=0,$$

so folgt hieraus, dass die ihr entsprechende Hilfsgleichung eine ähnliche das Integriren erleichternde Zerlegung in zwei symbolische Factoren gestatten werde, von welchen der eine eben das bereits bekannte Gleichungspolynom (642) derjenigen Hilfsgleichung sein wird, die zur (638) gehört, und in der That lässt sich die (660) auch so wiedergeben:

$$(662)\quad \left[(u+\alpha)\frac{d}{du}+au+a\alpha-h+2\right]\left[(u-\alpha)V'+(au-a\alpha+h+1)V\right]=0,$$

und wird so offenbar erfüllt: erstens durch denjenigen Werth von $V$, den wir bereits kennen, den (643) nämlich, der das Hilfsgleichungspolynom (642), welches in der vorliegenden Gleichung als zweiter Factor erscheint, auf Null bringt, und zweitens durch die besondere Auflösung der completen Differentialgleichung:

$$(663)\quad (u-\alpha)V'+\left[au-a\alpha+h+1\right]V=C_2(u+\alpha)^{h-2}e^{-au},$$

die sich alsbald darbietet, wenn man in (662) den zweiten Factor durch den Buchstaben $z$ ersetzt, und von der so gewonnenen:

$$(u+\alpha)\frac{dz}{du}+\left[au+a\alpha-h+2\right]z=0$$

den Genüge leistenden Werth sucht, als welchen man:

$$z=C_2(u+\alpha)^{h-2}e^{-au}$$

erhält — eine Gleichung, die offenbar in die (663) übergeht, wenn anstatt des $z$ der durch dasselbe vorgestellte Ausdruck wiedereingesetzt wird. Man gelangt so endlich zum folgenden, mit zwei willkürlichen Constanten versehenen, also das allgemeine Integral der (660) darstellenden Werthe, nämlich:

$$(664)\quad V=C_1\frac{e^{-au}}{(u-\alpha)^{h+1}}+C_2\frac{e^{-au}}{(u-\alpha)^{h+1}}\int(u+\alpha)^{h-2}(u-\alpha)^h\,du.$$

Auf dieselbe Weise vermag man sich auch das zweite, annoch unbekannte Integral der Gleichung (639) zu verschaffen, welches übrigens noch leichter durch Befreiung der (639) vom ersten auf dem schon vorhin betretenen Wege gewonnen werden kann, und man erhält:

$$y = C_1 e^{ax} (x-a)^k + C_2 e^{ax} (x-a)^k \int_0^x \frac{e^{-2ax}}{(x-a)^{2k}} dx. \tag{665}$$

also abermals einen mit zwei willkürlichen Constanten versehenen, und dadurch seine Allgemeinheit beurkundenden Ausdruck, und es ist klar, dass, so oft man bei einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung ein erstes particuläres Integral mit einer einzigen Constante aufgefunden hat, das zweite dazu gehörige vermittelst derselben Rechnung gegeben werde, in Form eines Produktes aus dem aufgefundenen ersten, in ein unbestimmtes Integral durch eine Formel, die ganz den Charakter des allgemeinen Integrales an sich trägt.

Erwägt man nun, ganz allgemein, eine Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung ins Auge fassend, dass sich gelegentlich von ihr ein einziges particuläres Integral in geschlossener Form finden lassen wird, wenn gewisse Bedingungen zwischen den constanten Parametern, die sie enthält, erfüllt sind, etwa $y = C_1 y_1$, erwägt man ferner, dass in einem solchen Falle die Gleichung vermittelst der Substitution $y = C_1 y_1 \int z\,dx$ von diesem ersten Integrale befreit, und in eine andere in $z$ verwandelt werden könne, die sich um die Einheit in der Ordnungszahl niederer gestaltet, die aber wieder gelegentlich ein einzelnes geschlossenes particuläres Integral, etwa $z = z_1$, zulassen kann, wenn gewissen Bedingungen zwischen den constanten Parametern Genüge geleistet wird, wodurch sie wieder geeignet wird, vermittelst der Substitution $z = z_1 \int u\,dx$, in eine andere von der nächstniedrigeren Ordnung überzugehen u. s. w., so ist die Möglichkeit begründet, dass zuletzt als particulärer Schlusswerth ein $y$ gelegentlich erhalten werden kann in der complizirten, aber geschlossenen Form:

$$y = C_1 . y_1 \int z_1 . dx \int u_1 . dx \int v_1 . dx \int \ldots\ldots\ldots \int \xi_1\, dx \int \eta_1\, dx \int \zeta_1\, dx, \tag{666}$$

geschlossen insofern, als die $n$ an der Zahl vorhandenen Functionen $y_1, z_1, u_1, v_1, \ldots\ldots \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ sämmtlich geschlossene Ausdrücke sind. Dieser Werth von $y$ trägt übrigens ganz die Eigenschaften des allgemeinen Integrales mit $n$ willkürlichen Constanten aus dem Grunde, weil jedes der unbestimmten Integrale, $n-1$ an der Zahl, wenn durch Rechnung ermittelt, den Zusatz einer willkürlichen Constante erheischt, wodurch zu der Einen $C_1$ noch fernere $n-1$ an der Zahl im allgemeinen hinzutreten. Will man das Zerfallen der allgemeinen Form (666) in ihre $n$ Bestandtheile dem Auge ersichtlich machen, so bemerkt man zuerst, dass $\int \zeta_1\, dx = \int_0^x \zeta_1\, dx + c_2$ sei, wodurch der obige Werth in zwei Bestandtheile zerfällt, nämlich:

$$y = C_1 y_1 \int z_1 dx \int u_1 dx \int \ldots \int \xi_1 dx \int \eta_1 dx \int_0^x \zeta_1 dx + C_1 c_2 y_1 \int z_1 dx \int u_1 dx \int \ldots \int \xi_1 dx \int \eta_1 dx:$$

von diesen zerlegt sich der Letztere, wegen $\int \eta_1\, dx = \int_0^x \eta_1\, dx + c_3$, abermals in zwei, von diesen der Letztere aus einem ähnlichen Grunde wieder in zwei u. s. w., so dass man zuletzt bei einem Werthe von $y$ anlangt, der die folgende dem allgemeinen Integrale zukommende Form trägt:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int_0^x z_1 dx + C_3 y_1 \int z_1 dx \int_0^x u_1 dx + C_4 y_1 \int z_1 dx \int u_1 dx \int_0^x r_1 dx + \tag{667}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + C_n y_1 \int z_1 dx \int u_1 dx \int v_1 dx \int \ldots\ldots \int \xi_1 dx \int \eta_1 dx \int_0^x \zeta_1 dx,$$

und in welcher auch alle Integralzeichen, nicht bloss die in jedem Gliede vorkommenden letzten, mit den Gränzen 0 und $x$ versehen werden können, weil man hiedurch nur auf die dem betreffenden Integrale zuzusetzende willkürliche Constante Verzicht leistet, was man zu thun berechtigt ist, aus dem Grunde, weil die hinzugefügte Constante zu keinem neuen particulären Integrale, sondern nur zu einem solchen führt, das bereits in der Formel (667) enthalten ist, und dem ins Auge gefassten Gliede vorangeht. Wir hätten hiemit eine neue, sehr merkwürdige analytische Form kennen gelernt, die (666) nämlich, welche, eindeutig auf den ersten Blick, bei näherer Beleuchtung in die durch die Gleichung (667) dem Auge dargelegten $n$ verschiedenen Bedeutungen zerfällt, und desshalb in einiger Verwandtschaft steht mit den irrationalen Grössen der Algebra, und namentlich mit den $n^{\text{ten}}$ Wurzeln, die ebenfalls $n$-deutig sind; nur waltet hier der eigenthümliche, in der Natur der linearen Differentialgleichungen wesentlich begründete Unterschied ob, dass, während eine $n^{\text{te}}$ Wurzel, wo sie in unseren Rechnungen erscheint, irgend einen, entweder bestimmten oder unbestimmt gelassenen, jedenfalls aber nur Einen ihrer Werthe anzeigt, der zweite Theil der Gleichung (666) die Bedeutung eines, und zwar beliebigen der vorhandenen particulären Integrale $n$ an der Zahl, oder auch der Summe von einigen von ihnen oder von allen besitzt. Da nun diese sehr interessante Form, schon wegen ihres nachgewiesenen häufigen Vorkommens, unserer Beachtung vorzugsweise werth ist, so wird es erspriesslich sein, an diesem Orte einiger ihrer Haupteigenschaften Erwähnung zu thun. Wir bemerken daher von derselben zuvörderst, dass auch dann, wenn sie im obigen Sinne eine geschlossene ist, die $(n-1)$-Integrationen, die sie erheischt, wenn durchführbar, zu Logarithmen, Kreisbögen, elliptischen Functionen und anderen ähnlichen Transcendenten führen können, die nun offenbar das allgemeine Integral aufzuweisen haben wird, wenn man seine in Rede stehende Form (666) in die wohlbekannte assymptotische verwandelt. Bei der Construction der Differentialgleichung nun, welche dieses assymptotische allgemeine Integral hat, wird man sich offenbar um die Elimination der oberwähnten Transcendenten nicht zu kümmern haben, sie werden vielmehr von selbst herausfallen; wir schliessen hieraus umgekehrt, dass die particulären Integrale einer vorgelegten Differentialgleichung, nebst den in ihnen enthaltenen Exponentialgrössen, deren Elimination nothwendig ist, auch Logarithmen, Kreisbögen und andere ähnliche Transcendenten bergen können, ohne dass es desshalb unbegreiflich wird, wie eine Form dieser Art, ohne in mehrere je für sich genügende Bestandtheile zu zerfallen, einer Differentialgleichung Genüge leisten könne, welche ganze algebraische Coefficienten hat — eine Thatsache, welche abermals geeignet ist, uns von der Unerspriesslichkeit der üblichen Eintheilung der Functionen in algebraische und transcendente, wenigstens in diesem Theile der Integralrechnung, zu überzeugen.

Halten wir nun dieser Form (666) diejenige andere gegenüber, in welcher wir uns mitunter das allgemeine Integral einer Differentialgleichung gedacht haben, nämlich die:

wo $\varphi_1$, $\varphi_2$, ..... $\varphi_n$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung sind, — eine Form die wir, vielleicht etwas uneigentlich, als eine geschlossene betrachteten, wenn jene algebraische Gleichung ganze algebraische Coefficienten aufweist, so erkennen wir alsbald, dass wir ein Gebilde vor Augen hatten, welches in dem gegenwärtigen, geschlossen gedachten (666) als specieller Fall enthalten ist, und von demselben an Allgemeinheit bei weitem übertroffen wird. Es lässt sich in der That die assymptotische Formel. die einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung entspricht:

$$y = C_1\, e^{\int \varphi_1\, dx} + C_2\, e^{\int \varphi_2\, dx} \tag{669}$$

auch so schreiben:

$$y = C.e^{\int \varphi_1 dx} \int (\varphi_2 - \varphi_1)\; dx . e^{\int (\varphi_2 - \varphi_1) dx} = C.\, e^{\int \varphi_1 dx} \int \frac{d}{dx} \left[ e^{\int (\varphi_2 - \varphi_1) dx} \right] dx. \tag{670}$$

Eben so wird die einer Differentialgleichung der dritten Ordnung angehörige assymptotische Form:

$$y = C_1\, e^{\int \varphi_1 dx} + C_2\, e^{\int \varphi_2 dx} + C_3\, e^{\int \varphi_3 dx}, \tag{671}$$

sich auch so wiedergeben lassen:

$$y = C.e^{\int \varphi_1 dx} \int (\varphi_2 - \varphi_1) dx . e^{\int (\varphi_2 - \varphi_1) dx} \int dx \left[ \frac{(\varphi_3 - \varphi_2)(\varphi_3 - \varphi_1)}{\varphi_2 - \varphi_1} + \frac{(\varphi'_2 - \varphi'_1)}{\varphi_2 - \varphi_1} - \frac{(\varphi_3 - \varphi_1)(\varphi'_2 - \varphi'_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)^2} \right] e^{\int (\varphi_3 - \varphi_2) dx},$$

oder was dasselbe ist:

$$y = C.e^{\int \varphi_1 dx} \int \frac{d}{dx} \left[ e^{\int (\varphi_2 - \varphi_1) dx} \right] dx \int \frac{d}{dx} \left[ \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}\, e^{\int (\varphi_3 - \varphi_2) dx} \right] dx \tag{672}$$

u. s. w., was augenscheinlich die Form (666) ist, jedoch für den sehr speciellen Fall, wo sich alle Integrationen der irrationalen Differentialfunctionen in geschlossener Form bewerkstelligen lassen. Hieraus folgt, dass, wenn es in unserem Wunsche liegt durch geschlossene Formen zu integriren, wir in der Regel vortheilhafter und mit unvergleichbar mehr Aussicht auf Erfolg von der Voraussetzung der umfassenderen neuen Form (666) ausgehen, als von jener der assymptotischen.

Gleichwohl ist aber doch begreiflicherweise die vielerwähnte Form des unbestimmten Integrales, wie sie in der Gleichung (666) enthalten ist, als geschlossene Form betrachtet, die umfassendste und allgemeinste nicht; sie kann vielmehr dadurch zu noch weiterer Ausdehnung gebracht werden, dass man, anstatt der darin erscheinenden einfachen Integralzeichen, wiederholte, $r^{te}$ Integrale setzt, unter $r$ eine beliebige, wenn man will auch allgemeine Zahl verstanden. Man gewinnt dadurch eine Form, in der selbst die (666) nur die Rolle eines sehr speciellen Falles spielt, und vergrössert dadurch bei dem Aufsuchen geschlossener Formen die Wahrscheinlichkeit des Erfolges. Hiemit ist aber auch die Veranlassung gegeben, bezüglich der mannigfaltigen, der mathematischen Einbildungskraft durch die gegenwärtigen Betrachtungen sich aufdringenden, aus mehrfachen unbestimmten Integralen und Irrationalgrössen zusammengefügten Formen, die dreifache Frage aufzuwerfen: wie man die Differentialgleichung con-

struiren könne, der eben dieselben Genüge leisten; wie man sie als neue particuläre Integrale in eine gegebene Gleichung einzuführen habe, endlich ob und welche Spuren einer solchen Einführung entweder den Coefficienten, oder den aus ihnen abgeleiteten analytischen Gebilden anhängen bleiben.

Erledigen wir also zuerst die Frage: **wie lässt sich am bequemsten die Differentialgleichung bilden, die das allgemeine Integral (667) hat?** Es bietet sich uns hier folgende Methode als die allereinfachste, zuerst in die Augen fallende: Man schreibt zuvörderst die Gleichung der ersten Ordnung nieder, deren Integral $z = c_1 z_1$ ist; sie lautet:

$$z_1 \frac{dz}{dx} - z'_1 . z = 0, \tag{673}$$

sodann führt man eine neue abhängige Veränderliche ein mit Hilfe der Substitution: $z = \frac{d\mathfrak{z}}{dx}$. Die Differentialgleichung erhebt sich dadurch zur zweiten Ordnung, geht über in die:

$$z_1 \frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2} - z'_1 \frac{d\mathfrak{z}}{dx} = 0, \tag{674}$$

und besitzt jetzt ein allgemeines Integral:

$$\mathfrak{z} = c_1 \int_0^x z_1 \, dx + c_2 \tag{675}$$

mit zwei Genüge leistenden Werthen, deren einer seinen Ursprung aus der früheren Gleichung zieht und $\mathfrak{z}_1 = c_1 \int_0^x z_1 \, dx$ ist; der andere $\mathfrak{z}_2 = c_2$ aber die Gleichung $\frac{d\mathfrak{z}}{dx} = 0$ erfüllt. Lässt man nun hierauf eine fernere Änderung der abhängigen Veränderlichen $\mathfrak{z}$ eintreten, vermittelst der Substitution: $\mathfrak{z} = \frac{\eta}{\eta_1}$, also $\eta = \eta_1 . \mathfrak{z}$, wo $\eta$ die neu eingeführte Veränderliche und $\eta_1$ die unter diesem Namen in der (666) erscheinende Function ist, so gelangt man zu einer neuen Gleichung, deren allgemeines Integral offenbar:

$$\eta = c_1 \eta_1 \int_0^x z_1 \, dx + c_2 \eta_1 \tag{676}$$

ist, und die wieder durch die Einführung einer neuen Veränderlichen, im Wege der Substitution $\eta = \frac{d\mathfrak{y}}{dx}$, um die Einheit in der Ordnungszahl wächst, und das allgemeine Integral:

$$\mathfrak{y} = c_1 \int_0^x \eta_1 \, dx \int_0^x z_1 \, dx + c_2 \int_0^x \eta_1 \, dx + c_3 \tag{677}$$

bietet, dessen zwei erste Bestandtheile aus der vorhergehenden entspringen, der dritte aber, die Constante $c_3$ nämlich, $\frac{d\mathfrak{y}}{dx} = 0$ macht. Nun lässt man zunächst die Substitution: $\mathfrak{y} = \frac{\xi}{\xi_1}$, also $\xi = \xi_1 . \mathfrak{y}$ folgen, und gelangt endlich in dieser Weise fortschreitend zu der Differentialgleichung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, die das allgemeine Integral (667) hat.

Es dürfte wohl keinem Leser entgehen, dass sich der hier eingeschlagene Weg auch mit einigen Abänderungen gehen lasse, kraft welcher nicht der Ausdruck (667), sondern ein anderer, höhere als erste Integrale und sonstige Gebilde enthaltender als eingeführtes allgemeines Integral dastünde. Anstatt nämlich $z = \frac{d\mathfrak{z}}{dx}$ zu setzen, hätte man eben so gut $z = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2}$ schreiben können, wodurch

die Differentialgleichung (673) nicht zur zweiten, sondern zur dritten Ordnung erhoben worden wäre, mit eingeführten nicht Einem, sondern zweien particulären Integralen, so, dass sich statt der (675):

$$\mathfrak{z} = c_1 \int^2 Z_1 . dx^2 + c_2 x + c_3 \tag{678}$$

ergeben hätte; man würde aber auch, vermittelst der Substitution: $Z = \frac{d^r \mathfrak{z}}{dx^r}$, $r^{\text{te}}$ unbestimmte Integrale und einen particulären, mit $r$ willkürlichen Constanten versehenen neuen Werth haben erhalten können, wodurch an die Stelle des Werthes (675) der nachfolgende:

$$\mathfrak{z} = c_1 \int^r Z_1 . dx^r + c_2 x^{r-1} + c_3 x^{r-2} + \dots\dots\dots + c_r x + c_{r+1} \tag{679}$$

getreten wäre. Diess ist sogar einer noch viel allgemeineren Auffassung fähig: Man hätte nämlich vermittelst einer Substitution wie:

$$Z = \mathfrak{X}_r \frac{d^r \mathfrak{z}}{dx^r} + \mathfrak{X}_{r-1} \frac{d^{r-1}\mathfrak{z}}{dx^{r-1}} + \dots\dots\dots + \mathfrak{X}_1 \frac{d\mathfrak{z}}{dx} + \mathfrak{X}_0 \mathfrak{z}, \tag{680}$$

die sich aber auch für $\eta$ oder $\xi$, kurz in einem jeden beliebigen Stadium der Rechnung hätte machen lassen, und wo $\mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_{r-1}, \dots \mathfrak{X}_0$ algebraische ganze Functionen von $x$ bedeuten, die Einführung einer neuen Veränderlichen $\mathfrak{z}$ und zugleich eine Erhebung um $r$ Einheiten in der Ordnungszahl veranlassen können, wodurch einerseits $r$ neue particuläre Integrale hinzugetreten wären, diejenigen nämlich, welche die Gleichung:

$$\mathfrak{X}_r \frac{d^r \mathfrak{z}}{dx^r} + \mathfrak{X}_{r-1} \frac{d^{r-1}\mathfrak{z}}{dx^{r-1}} + \dots\dots\dots + \mathfrak{X}_1 \frac{d\mathfrak{z}}{dx} + \mathfrak{X}_0 \mathfrak{z} = 0 \tag{681}$$

erfüllen, andererseits aber bei den bereits in der Gleichung in $Z$, oder $\eta$, oder $\xi$ vorhandenen eine Umwandlung Platz gegriffen hätte, dergestalt, dass, wenn man die Gleichung in $Z$ etwa mit $\boldsymbol{Z}=0$ bezeichnet und ihr allgemeines Integral mit einer oder mehreren Constanten $Z = f(x)$ sein lässt, der durch Umwandlung aus diesem $Z$ entspringende Theil des Werthes von $\mathfrak{z}$ eben die besondere Auflösung ist, die der completen Differentialgleichung:

$$\mathfrak{X}_r \frac{d^r \mathfrak{z}}{dx^r} + \mathfrak{X}_{r-1} \frac{d^{r-1}\mathfrak{z}}{dx^{r-1}} + \dots\dots\dots + \mathfrak{X}_1 \frac{d\mathfrak{z}}{dx} + \mathfrak{X}_0 \mathfrak{z} = f(x) \tag{682}$$

angehört und keine anderen als die in $f(x)$ enthaltenen willkürlichen Constanten beherbergt. Es ist hiebei nicht zu übersehen, dass die neu gewonnene Differentialgleichung in $\mathfrak{z}$ eine symbolische Zerlegung in zwei Factoren verstattet, mit welcher ein Erscheinen des allgemeinen Integrals in zwei von einander gesonderten Gruppen verknüpft ist und dieser letzteren Erscheinung wird man daher, wenn man nach geschlossenen Formen strebt, im allgemeinen nachforschen müssen, was sich nach Belieben in der Differentialgleichung oder in der ihr zugehörigen Hilfsgleichung thun lassen wird; denn gelingt eine solche symbolische Zerlegung bei der einen, so gelingt sie auch bei der anderen.

Schreiten wir jetzt zur Beantwortung der zweiten Frage, nämlich: Wie kann man in eine gegebene Gleichung neue particuläre Integrale von der betrachteten Form

**einführen**, solche nämlich, welche unbestimmte Integrale, einfache oder $r^{\text{te}}$, von einer angegebenen Differentialfunction $z.dx$ oder $z.dx^r$ in sich schliessen? — Hier lässt sich zuerst darthun, dass, wenn man Ein particuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung:

$$X_n\, y^{(n)} + X_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + X_1\, y' + X_0\, y = 0, \tag{683}$$

die wir mit algebraischen, ganzen Coefficienten voraussetzen, etwa $y = y_1$ in geschlossener Form kennt, man zu demselben ein anderes:

$$y = y_1 \int z\, dx \tag{684}$$

gesellen könne, unter $z$ eine ebenfalls geschlossene Function verstanden, und dass die Gleichung dadurch der geschlossenen Beschaffenheit ihrer Coefficienten unbeschadet, zur Ordnung $n+1$ erhoben werde. Man bewirkt diess einfach durch dieselbe Fundamentalmethode der Einführung neuer particulärer Integrale, die wir in §. 2 dieses Abschnittes kennen gelernt haben. Wir erhalten nämlich, wegen:

$$y = y_1 \int z dx$$

$$y' = y'_1 \int z dx + y_1 . z$$

$$y'' = y''_1 \int z dx + 2 . y'_1 . z + y_1\, z'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = y_1^{(n-1)} \int z dx + \binom{n-1}{1} y_1^{(n-2)} z + \binom{n-1}{2} y_1^{(n-3)} z' + \ldots\ldots + y_1\, z^{(n-2)}$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \int z dx + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)} z + \binom{n}{2} y_1^{(n-2)} z' + \ldots\ldots + \binom{n}{1} y'_1 z^{(n-2)} + y_1\, z^{(n-1)}.$$

einen Werth des S. 149 mit $P_1$ bezeichneten Substitutionsresultates, welcher so aussieht:

$$\begin{aligned}
P_1 = \int z dx\, &(X_n\, y_1^{(n)} + X_{n-1}\, y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + X_1\, y'_1 + X_0\, y_1) \\
&+ z^{(n-1)} .\quad X_n y_1 \\
&+ z^{(n-2)} \left[\binom{n}{1} X_n y'_1 + X_{n-1} y_1\right] \\
&+ z^{(n-3)} \left[\binom{n}{2} X_n y''_1 + \binom{n-1}{1} X_{n-1} y'_1 + X_{n-2} y_1\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ z' \left[\binom{n}{2} X_n y_1^{(n-2)} + \binom{n-1}{2} X_{n-1} y_1^{(n-3)} + \binom{n-2}{2} X_{n-2} y_1^{(n-4)} + \ldots\ldots + X_2 y_1\right] \\
&+ z \left[\binom{n}{1} X_n y_1^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} X_{n-1} y_1^{(n-2)} + \binom{n-2}{1} X_{n-2} y_1^{(n-3)} + \ldots\ldots + 2X_2 y'_1 + X_1 y_1\right].
\end{aligned} \tag{685}$$

Die in der ersten Zeile vorhandenen mit dem Factor $\int z dx$ versehenen Glieder verschwinden aus dem Grunde, weil, der Voraussetzung nach, $y_1$ ein geschlossenes particuläres Integral der gegebenen Gleichung (683) ist; die übrigen aber bilden offenbar ein geschlossenes Aggregat. Es ist daher auch $\frac{P'_1}{P_1} = \frac{M}{N}$ ein

geschlossener Ausdruck und die S. 150 sub (12) ersichtliche Hauptgleichung in $z$ mit geschlossenen Coefficienten versehen. Gleichwie man nun aber zu dem particulären Integrale $y=y_1$ ein anderes $y=y_1\int z dx$ einzuführen im Stande war, der geschlossenen Beschaffenheit der Coefficienten unbeschadet, eben so wird man zu einem zweiten ebenfalls geschlossenen Werthe $y=y_2$ der (683) einen neuen von der Form $y=y_2\int v dx$ gesellen können u. s. w., bis die Gruppe der vorhandenen geschlossenen Werthe erschöpft ist.

Um nun über die Wirkung der Einführung eines solchen neuen particulären Integrales Aufschluss zu erhalten, denken wir uns etwa beide Functionen $y_1$ und $z$ von derselben wohlbekannten Form, nämlich:

$$y_1 = e^{\int \varphi dx} \quad \text{und} \quad z = e^{\int \psi dx}, \tag{686}$$

so lehrt die Ansicht der Gleichung (685), dass, der Form nach:

$$P_1 = e^{\int (\varphi+\psi) dx} R \tag{687}$$

sein wird, und somit:

$$\frac{P'_1}{P_1} = \frac{P'}{P} = \frac{M}{N} = \varphi + \psi + \frac{R'}{R},$$

woraus wir schliessen, dass ein solches neu eingeführtes particuläres Integral im allgemeinen dieselben Merkmale aufprägen werde, wie das $y=y_1 z = e^{\int(\varphi+\psi)dx}$ und namentlich wird, wenn $\varphi$ und $\psi$ verschiedene Gradzahlen besitzen, von denen Eine wenigstens die negative Einheit überschreitet, von diesen beiden Gradzahlen die grössere die Assymptote sammt der Ansteigung in dem zugehörigen Coefficientenpaare bestimmen, woraus wir dann umgekehrt schliessen, dass der Coefficientenbau der Differentialgleichung in Bezug auf ihre Gradzahlen zwischen den beiden Formen $y=y_1\int z dx$ und $y=y_1 z$ keinen Unterschied mache. Es können aber auch gelegentlich $\varphi$ und $\psi$ einerlei Gradzahl besitzen, dergestalt, dass sie sich von den höchsten Gliedern an ganz oder theilweise aufheben. In einem solchen Falle ist es z. B. möglich, dass der Coefficientenbau der Differentialgleichung, vermöge eines Abfalls von Einer Einheit in den letzten Coefficientenpaaren, auf Ein particuläres Integral der ersten Functionsklasse hinweist, während doch in demselben der zweiten Klasse angehörige Exponentialgrössen erscheinen können. Diess wäre z. B. der Fall, wenn man etwa hätte: $y=e^{-x^2}\int e^{+x^2} Q\, dx$, wo $Q$ der ersten Klasse angehört; dass aber ein solcher Ausdruck auch wirklich eine Function der ersten Klasse sei, und eben desshalb den Gleichungscoefficienten keine anderen als die dieser Klasse entsprechenden Merkmale aufzudrücken vermöge, fällt von selbst in die Augen.

Mit denjenigen etwa vorhandenen Werthen von $x$, welche $\varphi$ oder $\psi$ unendlich machen, hat es dieselbe Bewandtniss. Ist nämlich $\varphi=\frac{\Phi}{(x-\alpha)^p}$ und $\psi=\frac{\Psi}{(x-\alpha)^q}$, so ist von den beiden Exponenten $p$ und $q$ der grössere, etwa $p$, falls er die Einheit überschreitet, in der Art massgebend, dass die Differentialgleichung dieselben Merkmale aufweist, welche auch dem neu eingeführten particulären Integrale $y=e^{\int\frac{\Phi}{(x-\alpha)^p}}$ angehören, so dass auch hier wieder die beiden Formen $y=y_1 z$ und $y=y_1\int z dx$ in Bezug auf die der Differentialgleichung aufgeprägten Merkmale keinen Unterschied dar-

bieten. Eine andere Bewandtniss hat es jedoch mit dem stets $k$ genannten Exponenten; hätte man nämlich $y_1 = \frac{Q}{(x-\alpha)^r}$ und $z = \frac{R}{(x-\alpha)^s}$, so wird der berechnete Werth von $k$ nicht gleich $r+s$ erscheinen, sondern gleich $r+s-1$, weil das auf $z$ sich erstreckende Integrationszeichen ihn, wie leicht einzusehen, um die Einheit verringern muss. Es folgt hieraus, dass für $r = -s+1$ ein Verhalten auftreten könne, als ob das particuläre Integral von einem Factor oder Divisor $(x-\alpha)$ gar keine Spur an sich trüge, was denn natürlich nur insoferne richtig ist, als für $x=\alpha$ kein Unendlichwerden Platz greift. Diess lässt sich verallgemeinern, und man kann ganz allgemein sagen, dass, wenn mehrere Integrationszeichen auf die Function $z$ hintereinander Bezug nehmen, ein jedes derselben eine ähnliche Verringerung um die Einheit zur Folge habe.

Jetzt kann noch ferner gezeigt werden, dass, wenn die vorgelegte Differentialgleichung zwar kein einzelnes geschlossenes particuläres Integral darbietet, wohl aber eine $r$-gliedrige Gruppe von irrationalen solchen, entsprechend einer geschlossenen algebraischen Gleichung des $r^{\text{ten}}$ Grades:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots\dots + C_r y_r, \tag{688}$$

zu derselben eine neue gleichfalls $r$-gliedrige Gruppe hinzugesetzt werden könne, nämlich die:

$$y = (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots\dots + C_r y_r)\int z.dx, \tag{689}$$

und dass die hierdurch zur $(n+r)^{\text{ten}}$ Ordnung hinaufsteigende Differentialgleichung jedesmal geschlossene rationale Coefficienten besitzen werde, so oft $z$ eine geschlossene rationale Function ist. Diess lässt sich so beweisen: Man bezeichne dasjenige, was aus dem hier für $P_1$ gewonnenen Ausdrucke (685) wird, wenn man in demselben $y_1$ der Reihe nach in $y_2, y_3, \dots\dots y_r$ umsetzt, bezüglich mit $P_2, P_3, \dots\dots P_r$, so gewinnt man, nach dem Vorgange des §. 2, die nachfolgende Gleichung in $z$:

$$P = X_n z^{(n)} + X_{n-1} z^{(n-1)} + \dots\dots + X_1 z' + X_0 z = C_1 P_1 + C_2 P_2 + \dots\dots + C_r P_r. \tag{690}$$

aus der wir, durch das $r$-mal wiederholte Verfahren des Differenzirens, Werthe für $P', P'', \dots P^{r}$ ziehen, um sodann, durch Elimination der Constanten $C_1, C_2, \dots C_r$ aus den so erhaltenen $r+1$ Gleichungen, zu der gesuchten Differentialgleichung in $P$ zu gelangen. Die Coefficienten dieser letzteren sind nun zunächst zweiwerthige rationale Functionen der $P_1, P_2, \dots P_r$ und ihrer Differentialquotienten, sodann aber, kraft der ihnen zukommenden durch die Formel (685) bestimmten Werthe auch rationale und geschlossene zweiwerthige Functionen von $y_1, y_2, \dots\dots y_r$, ja sogar, wenn man den obigen Voraussetzungen gemäss:

$$y_1 = e^{\int \varphi_1 dx}, \qquad y_2 = e^{\int \varphi_2 dx}, \qquad \dots\dots\dots \qquad y_r = e^{\int \varphi_r dx} \tag{691}$$

statuirt, eben solche Functionen von $\varphi_1, \varphi_2, \dots\dots \varphi_r$, aus welchen allen der symmetrische Factor $e^{\int(\varphi_1+\varphi_2+\dots\dots+\varphi_r)dx}$ gesondert, und als sämmtlichen Coefficienten gemeinschaftlich, weggelassen werden kann. Durch Multiplication mit einer beliebigen zweiwerthigen Function, die bei allen möglichen Vertauschungen nur das Zeichen ändert, werden sofort lauter nach den $\varphi_1, \varphi_2, \dots\dots \varphi_r$ und ihren Differentialquotienten symmetrische Formen gewonnen, in denen zuvörderst jedwedes differenzirte $\varphi$ durch

das undifferenzirte, und zwar auf rationale Weise ausdrückbar erscheint, so dass zuletzt lauter symmetrische Formen erhalten werden, die sich endlich durch die Coefficienten der algebraischen Gleichung in $\varphi$ selbst wiedergeben lassen in rationaler und geschlossener Form. Man findet eine ausführlichere Darstellung des hier nur obenhin angedeuteten Verfahrens in §. 9 dieses Abschnittes.

Genau auf dieselbe Weise lässt sich aber auch darthun, dass, wenn die gegebene Gleichung in $y$ ein einzelnes particuläres Integral $y = y_1$ in geschlossener Form besässe, demselben andere, $s$ an der Zahl, der geschlossenen Beschaffenheit der Coefficienten unbeschadet, zugesellt werden können, enthalten in der Form:

$$y = y_1 \int (D_1 z_1 + D_2 z_2 + \dots\dots\dots + D_s z_s)\, dx, \qquad ($$

wo $D_1, D_2, \dots\dots D_s$ willkürliche Constanten, ferner:

$$z_1 = e^{\int \psi_1 dx}, \qquad z_2 = e^{\int \psi_2 dx}, \qquad \dots\dots\dots \qquad z_s = e^{\int \psi_s dx} \qquad ($$

sind, und $\psi_1, \psi_2, \dots\dots \psi_s$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen und geschlossenen Coefficienten bedeuten. — Der Leser wird keine Mühe haben den Beweis dieser analytischen Thatsache dem unmittelbar vorangehenden Schritt für Schritt nachzubilden.

Wäre das in der Formel (684) enthaltene $y_1$ nicht geschlossen, oder nicht rational, so wäre auch die Differentialgleichung, welche durch Einführung der in Rede stehenden $s$-gliedrigen Gruppe particulärer Integrale erhalten wird, nicht mit geschlossenen oder rationalen Coefficienten versehen. Diess würde z. B. dann eintreten, wenn $y_1 = e^{\int \varphi_1 dx}$ wäre, unter $\varphi_1$ Eine der früher erwähnten irrationalen Wurzeln einer algebraischen Gleichung verstanden. Allein, wenn man in einem solchen Falle nicht die $s$-gliedrige Gruppe (692) einzeln, sondern die folgenden $r$ an der Zahl vorhandenen, entsprechenden, je $s$-gliedrigen Gruppen miteinander in die Differentialgleichung (683) einführt, und sie dadurch um $rs$ Einheiten in der Ordnungszahl erhebt, so erhält man wieder eine Differentialgleichung mit geschlossenen, rationalen Coefficienten. Die Gruppen, von denen die Rede ist, sind:

$$\begin{aligned} y = \; & y_1 \int (D_1 z_1 + D_2 z_2 + \dots\dots\dots + D_s z_s)\, dx \\ & + y_2 \int (E_1 z_1 + E_2 z_2 + \dots\dots\dots + E_s z_s)\, dx \\ & + y_3 \int (G_1 z_1 + G_2 z_2 + \dots\dots\dots + G_s z_s)\, dx \qquad ( \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + y_r \int (K_1 z_1 + K_2 z_2 + \dots\dots\dots + K_s z_s)\, dx. \end{aligned}$$

Da es aber keinem Zweifel unterworfen ist, dass man weitergehend die Arten der Einführung solcher neuer geschlossener Formen auch vervielfältigen könne in unzähligen Abzweigungen, so gelangen wir auch rückschliessend zu der Folgerung, dass dem nach geschlossenen Formen strebenden Rechner bei einer Differentialgleichung von hoher Ordnung und hoch gebauten Coefficienten mannigfaltige und zahlreiche Gebilde dieser Art sich darbieten können, zusammengesetzt aus Irrationalgrössen, die Wurzeln

einer algebraischen Gleichung sind mit geschlossenen Coefficienten, und mit unbestimmten, einfachen oder höheren Integralen, die sich auf geschlossene, oder Wurzeln der angedeuteten Art enthaltende Differentialfunctionen erstrecken.

Hieran knüpft sich nun ganz natürlich die dritte Frage: Hat die Formenlehre Criterien des Vorkommens solcher geschlossener, analytischer Gebilde und welche? — eine Frage, auf die sich aus den bisherigen Betrachtungen, die verneinende Antwort allsogleich ableiten lässt. Der Begriff, den wir mit dem Worte »geschlossene Form« verbinden, ist ein viel zu willkürlicher, von dem Zustande der Wissenschaft, vom freiwilligen Übereinkommen u. s. w. abhängiger, mit dem Verhalten der Differentialquotienten in zu geringem oder gar keinem Zusammenhange stehender, als dass wir hoffen könnten die Differentialgleichung werde sich um ihn kümmern, und werde sich durch ihn zum Niederlegen gewisser sichtbarer Merkmale in die Coefficienten bewegen lassen. Die ersten, dem numerischen Werthe nach vorherrschenden und wichtigsten Bestandtheile der particulären Integrale — die Assymptoten — sind es, zu deren Kenntniss die Formenlehre auf Grundlage des Coefficientenbaues gelangen kann, und nicht die letzten, deren identisches Nullwerden, von irgend einem Gliede angefangen, eben die geschlossene Form bedingt. Es liegt daher der Formenlehre nicht ob geschlossene Formen aufzusuchen, wohl aber der wirklichen Integration sie anzudeuten falls die Rechnung daran vorüberführt, und die Bedingungen ihres Vorhandenseins aufzustellen. Demungeachtet lässt uns aber die Formenlehre auch hier nicht ganz im Dunkel, und namentlich sind es folgende Andeutungen, die bei der Aufsuchung geschlossener Formen von Nutzen sein können:

Fürs Erste sind solche gerne dann vorhanden, wenn die der Differentialgleichung $R=0$ Genüge leistenden Werthe in mehrere von einander verschiedene Gruppen zerfallen, von denen mindestens Eine eine niederere Differentialgleichung $Q=0$ mit geschlossenen Coefficienten erfüllt. Erstere wird sich dann symbolisch in zwei Factoren zerlegen, d. h. in der Form:

$$R = F\left(x, \frac{d}{dx}\right) Q = 0 \tag{695}$$

schreiben lassen, und es wird ihr Genüge geleistet sein zuvörderst durch diejenigen Werthe von $y$, die $Q=0$ machen, sodann aber noch durch gewisse andere auf folgende Weise erhaltene: Man integrirt die Gleichung $F\left(x, \frac{d}{dx}\right) Q = 0$ und erhält für $Q$ ein allgemeines Integral versehen mit der gehörigen Anzahl Constanten, das wir $Q=f(x)$ nennen wollen, und sucht endlich von der Gleichung $Q=f(x)$, etwa vermittelst der Methode der Variation der Constanten oder einer anderen ihr äquivalenten, die besondere Auflösung, welche nur die in $f(x)$ enthaltenen und keine neue willkürliche Constante in sich enthält. Bekam man nun, die $Q=0$ integrirend, geschlossene Formen in irgend einem Sinne, so liefert die eben erwähnte besondere Auflösung neue geschlossene in demselben Sinne dazu nur mit dem Unterschiede, dass hier noch unbestimmte Integrale hinzutreten, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann, den Werth (56) auf S. 29 des I. Abschnittes, zu welchem die Methode der Variation der Constanten leitet, ins Auge fassend. Besondere Fälle hievon enthalten die Gleichungen (245) S. 102, (334) S. 123, (339) S. 124 des II. Abschnittes, und es lässt sich noch bemerken, dass, wenn eine solche

symbolische Zerlegung in Factoren bei der $R=0$ durchgeführt werden kann, sie auch bei ihrer Hilfsgleichung möglich ist, man selbe daher bei derjenigen von beiden versuchen wird, bei welcher die einfachsten Rechnungen in Aussicht stehen.

**Zweitens** deutet die der vorgelegten Differentialgleichung entsprechende **Hilfsgleichung** sehr oft auf unbestimmte Integrale hin, die in den Genüge leistenden Werth eingehen, und diess zwar bereits durch die Beschaffenheit ihres ersten Coefficienten. In der That, wenn $U_m$ Einen oder mehrere Factoren $u-\mathfrak{a}$ enthält, dergestalt, dass nach den Ergebnissen der Formenlehre hieraus auf einen Divisor wie $(u-\mathfrak{a})^k$ in Einem oder mehreren der Werthe von $V$ geschlossen werden kann, so ergibt sich hieraus einerseits ein particuläres Integral von der Form:

$$y=\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\left[e^{ux}\,(u-\mathfrak{a})^k\;V\right]\Big|_{\mathfrak{a}} \tag{696}$$

oder mehrere solche; andererseits aber werden sich unter denjenigen particulären Integralen, welche in der Form $y=\int_{u'}^{u''}e^{ux}\,V\,du$ erscheinen, bei gewisser Beschaffenheit der Gränzen, etwa 0 und $\infty$, solche finden können, die ihrem Werthe nach desshalb unbestimmt, sohin zur Berechnung untauglich sind, weil $V$ die Eigenschaft hat für das dazwischenfallende $u=\mathfrak{a}$ unendlich zu werden. Wir benehmen uns beim Eintreten eines solchen Falles auch hier, wie an mehreren anderen Orten (siehe z. B. S. 103, (249)) auf folgende Weise: Wir unterwerfen, um die unstatthafte Form in eine andere zu verwandeln, dieses $y$ derjenigen Reihe von Rechnungsoperationen, die das Symbol: $\left(\frac{d}{dx}-\mathfrak{a}\right)^k$ andeutet und erhalten:

$$\left(\frac{d}{dx}-\mathfrak{a}\right)^k y=\int_{u'}^{u''}e^{ux}\,(u-\mathfrak{a})^k\;V.\,du. \tag{697}$$

Nun trifft es sich aber oft, dass die Integration zwischen den Gränzen $u'$ und $u''$ in diesem Ausdrucke in geschlossener Form gelingt, nachdem der Nenner $(u-\mathfrak{a})^k$ aus dem Werthe von $V$ weggefallen ist, während sie früher nicht durchführbar war. Ihr Ergebniss sei $\chi(x)$, so dass:

$$\left(\frac{d}{dx}-\mathfrak{a}\right)^k y=\chi\,(x) \tag{698}$$

wird, so liegt uns eine lineare Differentialgleichung in $y$ vor, deren integrirender Factor $e^{-\mathfrak{a}x}$ ist, mit welchem der erste Theil multiplizirt den vollständigen $k^{\text{ten}}$ Differentialquotienten des Productes $e^{-\mathfrak{a}x}y$ darstellt. Man erhält sonach, $k$-mal integrirend:

$$y=e^{\mathfrak{a}x}\int^k e^{-\mathfrak{a}x}\,\chi\,(x)\,dx^k+e^{\mathfrak{a}x}\,(C_1\,x^{k-1}+C_2\,x^{k-2}+\,\ldots\ldots\ldots) \tag{699}$$

einen Ausdruck, dessen erster Bestandtheil eine nach unserem Übereinkommen geschlossen zu nennende Function ist, und in welchem das $k^{\text{te}}$ Integral auch einer Umgestaltung in ein erstes solches fähig ist. Im zweiten Bestandtheile hingegen ist Alles, was das für $y$ angenommene bestimmte Integral dem Werthe nach Unbestimmtes in sich enthält, einbegriffen; bestimmt man in demselben die Constanten

$C_1$, $C_2$, ..... so, dass sie mit den Coefficienten der Entwicklungsglieder des $(k-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten in der Formel (696) zusammenfallen, so stellt dieser zweite Bestandtheil für sich ein assymptotisches particuläres Integral, nämlich eben das (696) dar, daher denn auch der erste, und zwar nicht nur in diesem Falle, sondern in allen Fällen, der Differentialgleichung Genüge leisten wird.

Es könnte aber $V$ nicht nur den die Integration zwischen den Gränzen $u'$ und $u''$ hindernden Divisor $(u-a)^k$, sondern nebst demselben noch einen zweiten $(u-b)^h$ besitzen. Wenn diess ist, so schreiben wir zuvörderst:

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux} (u-a)^k \, V . du = z, \tag{700}$$

und bringen hier diejenige Reihe von Rechnungsoperationen an, die das Symbol $\left(\frac{d}{dx} - b\right)^h$ erheischt, multipliziren sofort mit dem integrirenden Factor $e^{-bx}$, integriren $h$-mal, und gewinnen, falls sich:

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux} (u-a)^k (u-b)^h \, V . du = \omega(x) \tag{701}$$

in geschlossener Gestalt erhalten lässt, zuvörderst:

$$z = e^{bx} \int^h e^{-bx} \omega(x) \, dx^h + e^{bx} (D_1 x^{h-1} + D_2 x^{h-2} + \dots\dots\dots). \tag{702}$$

Diesen Werth führen wir anstatt $\chi(x)$ in die Gleichung (699) ein und gewinnen:

$$y = e^{ax} \int^k e^{(b-a)x} dx^k \int^h e^{-bx} \omega(x) \, dx^h + e^{ax} \int^k e^{(b-a)x} dx^k (D_1 x^{h-1} + D_2 x^{h-2} + \dots\dots) \tag{703}$$
$$+ e^{ax} (C_1 x^{k-1} + C_2 x^{k-2} + \dots\dots\dots)$$

einen Ausdruck, in dessen erstem Bestandtheile eine Zurückführung der $k^{\text{ten}}$ und $h^{\text{ten}}$ Integrale auf erste versucht werden mag, dessen letzter ferner das unter der Form eines Differentialquotienten erscheinende assymptotische Integral (696) ist, welchem der Nenner $(u-a)^k$ von $V$ angehört, und dessen zweiter Theil dasjenige, dem Divisor $(u-b)^h$ zugehörige assymptotische Integral darstellt, welches auch die Formel:

$$y = \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \left[ e^{ux} (u-b)^h \, V \right] \Big\}_b \tag{704}$$

geliefert hätte. So fortschreitend gelangt man zum Schlusse, dass ein in Form eines bestimmten Integrales erscheinender Werth von $y$ auf andere Formen hinzudeuten vermöge, in denen Ein, zwei, drei, oder allgemein so viele unbestimmte Integralzeichen enthalten sind, als es verschiedene Divisoren wie $(u-a)^k$ in $V$ gibt. Hiebei ist es offenbar nicht nothwendig, dass jenes bestimmte Integral unbrauchbar werde, denn es könnte z. B. immerhin $a$ eine reelle Zahl, die Integrationsgränzen aber 0 und $\infty\sqrt{-1}$ sein, also gar kein Unendlichwerden der Function zwischen den Integrationsgränzen eintreten, und die obige Rechnung dennoch zu Recht bestehen, von der sich noch bemerken lässt, dass die Anzahl der

Integralzeichen zu denen sie leitet, nicht grösser sein kann, als die Gradzahl des ersten Coefficienten $U_m$ der Hilfsgleichung.

Wir verkennen nicht, dass die hier zur Sprache gebrachten Anzeichen geschlossener Formen nichts weniger als mit vollkommener Sicherheit zu solchen führen, und dass ihnen im Grunde nur der Werth unsicherer Muthmassungen zustehe; da diess aber in der Natur der Sache liegt, wie wir schon oben angedeutet haben, da ferner die folgenden Abschnitte, die Transformationslehre nämlich und die Integrationsmethoden, abermals derlei Kennzeichen bringen werden, so, dass das ganze Integrationsgeschäft gewissermassen von ihnen durchzogen ist: Kennzeichen, welche theils negativer Natur sind, andeutend, dass geschlossene Formen gewisser Art im allgemeinen nicht vorhanden sein können, theils auch mehr positiver Beschaffenheit, nämlich die Bedingungen angebend, unter welchen solche geschlossene Formen wirklich bestehen: so setzt am Ende doch der Inbegriff derartiger Kennzeichen geschlossener Formen den aufmerksamen Rechner in den Stand ihrer habhaft zu werden, so oft sie in irgend einer Weise als Integrale nicht allzu complizirter Differentialgleichungen auftauchen.

## §. 23.

## Zusammenfassende Wiederholung der Vorschriften der Formenlehre.

Die Formenlehre, insofern als sie Gegenstand unserer Untersuchungen ist, hat den doppelten Zweck: Erstens: Die Formen zu erforschen, in welchen die einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen, rationalen und ganzen Coefficienten Genüge leistenden Integrale vorkommen können, und Zweitens: so viele Merkmale, nicht mehr und auch nicht weniger, der in einer bestimmten Form vorausgesetzten particulären Integrale anzugeben, als nothwendig sind, um einzeln jedes von ihnen von allen übrigen zu unterscheiden, auf dass man im Stande sei, sich analytisch und ohne Zweideutigkeit für jedes einzelne von ihnen zu erklären und es der Analysis abzuverlangen. Die zu diesem Zwecke dienlichen Vorschriften, die wir im Verlaufe des gegenwärtigen Abschnittes begründet haben, sollen hier noch einmal aufgezählt, und mit einigen Beispielen belegt, ohne sonstige Erläuterung zur Sprache kommen, damit sie, in der ihnen eigenthümlichen Einfachheit dem Leser vorgeführt, fester im Gedächtnisse haften bleiben.

Die zur Sprache gebrachten Hauptformen der allgemeinen Integrale, die entweder einzeln und explizit, oder gruppenweise und implizit, z. B. durch Auflösung einer höheren algebraischen Gleichung, oder durch Integration von Differential-Functionen und -Gleichungen, aus der Rechnung hervorgehen können, sind:

die assymptotische,
die Reihenform,
die Form des bestimmten Integrales,
die Form des Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl.
die Form des unbestimmten Integrales.

Wir beginnen mit der in den meisten Fällen durchsichtigsten und daher auch wichtigsten assymptotischen Form und fassen eine lineare Differentialgleichung ins Auge mit algebraischen, rationalen und ganzen Coefficienten. Sie heisse:

$$X_n\, y^{(n)} + X_{n-1}\, y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + X_1\, y' + X_0\, y = 0. \tag{705}$$

Ihr allgemeines Integral denken wir uns vorhanden in der Form:

$$y = C_1\, e^{\int \varphi_1 dx} + C_2\, e^{\int \varphi_2 dx} + \dots\dots\dots + C_n\, e^{\int \varphi_n dx}, \tag{706}$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ von einander verschiedene, der ersten Klasse angehörige Functionen von $x$ andeuten, deren Gradzahlen $p_1, p_2, \dots p_n$ zunächst im Coefficientenbaue ersichtlich sind. Namentlich kann man in dem einfachsten speziellen Falle, wo sie alle von einander verschieden und alle ganz und grösser sind als die negative Einheit, sagen, dass einem jeden $\varphi$ in der Differentialgleichung Ein Coefficientenpaar eigenthümlich angehöre, und zwar dem der Gradzahl nach höchsten $\varphi$ das erste, dem nächstniedrigeren das zweite u. s. w., dem niedrigsten das letzte Coefficientenpaar, und man erhält die Gradzahl $p$ eines jeden $\varphi$ aus den beiden Gradzahlen des ihm angehörigen Coefficientenpaares, wenn man die erste d. h. die des vorangehenden Coefficienten von der zweiten d. h. der des nachfolgenden Coefficienten subtrahirt; umgekehrt: wenn eine Differentialgleichung vorliegt, mit Unterschieden zwischen den Gradzahlen je zweier nächstaufeinanderfolgenden Coefficienten, die alle von einander verschiedene, absteigend geordnete Zahlen sind, wie z. B. die folgende:

$$y^{IV} + ax^2 . y''' + bx^4 . y'' + cx^5 . y' + (gx^6 + h)\, y = 0, \tag{707}$$

wo diese Unterschiede, der Reihe nach:

$$3, \quad 2, \quad 1, \quad 0$$

sind, so stellen dieselben eben die Gradzahlen von:

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \varphi_4$$

in den einzelnen particulären Integralen der (707) dar. Dieser einfache Zusammenhang zwischen den Gradzahlen der $\varphi$ und jenen der Coefficienten besteht nicht mehr, wenn unter den $p$ gleiche vorkommen und man gebraucht dann zur Ermittlung derselben folgendes nicht viel complizirtere Verfahren:

Man errichtet auf einer gezogenen Abscissenaxe in gleichen Abständen von einander Ordinaten; auf diese trägt man der Reihe nach die nach einem beliebigen Maassstabe abgefassten, offenbar ganzen Ordnungszahlen der successiven Coefficienten $X_n, X_{n-1}, \dots X_0$. Die geradlinig verbundenen Endpunkte geben eine Polygonallinie, von der man die einspringenden Winkel geradlinig abschneidet, wodurch sich eine andere — die normale Polygonallinie — ergibt, bis zu welcher man alle Ordinaten verlängert und die Längenunterschiede je zweier nächster Ordinaten, die dieser neuen, normalen Polygonallinie angehören, so lange sie grösser sind als die negative Einheit, gleichviel übrigens ob von ganzem oder gebrochenem Zahlenwerthe, sind zugleich die Gradzahlen $p_1, p_2, \dots\dots p_n$ der betreffenden Func-

tionen $\varphi_1$, $\varphi_2$, ... $\varphi_n$ in natürlicher Ordnung, und von der grössten angefangen. — Man gelangt zu ihnen, ohne Zeichnung, auch durch folgenden analytischen Vorgang: Man forscht, ausgehend von dem ersten Coefficienten $X_n$ nach einem nächsten, zweiten, Eckcoefficienten (er entspricht der nächsten normalen Polygonecke), bis zu welchem die auf das Coefficientenpaar entfallende Steigung die grösste ist, und bezeichnet ihn als solchen, zugleich jene Steigung so oft notirend, als Coefficientenpaare vorhanden sind, auf die sie Bezug hat. Von diesem zweiten Eckcoefficienten ausgehend, forscht man eben so nach dem dritten, bis zu welchem die auf das Coefficientenpaar entfallende Steigung die grösste ist (er entspricht abermals einer Polygonecke), notirt auch diese Steigung zu jedem Paare u. s. w. Allenfallsige Abfälle werden hiebei als negative Steigungen angesehen, und eben so behandelt, und die so gewonnenen, absteigend geordneten Repartitionszahlen sind dieselben Gradzahlen der $\varphi$, die auch das graphische Verfahren liefert. Unter ihnen können, in Folge des angewandten Repartitionsverfahrens, gleiche und gebrochene vorkommen — letztere nur gruppenweise: Halbe wenigstens 2 an der Zahl, Drittel mindestens 3 an der Zahl, ... $q^{tel}$ wenigstens $q$ an der Zahl, es können ihrer aber auch $2q$, $3q$, ... $rq$ vorhanden sein. Auch negative Repartitionszahlen vermögen zu erscheinen, sind aber nur verlässlich, wenn sie die negative Einheit überschreiten; darunterliegende, wie — 2, — 3, kann man sich durch die negative Einheit ersetzt denken. Die so gewonnenen Repartitionszahlen verwendet man zunächst dazu, um in der Differentialgleichung die Coefficienten auf ihre normale, d. h. dem normalen Polygone angehörige Gradhöhe zu ergänzen, und man bezeichnet sorgfältig diejenigen unter ihnen, die sich wirklich zu dieser Höhe erheben. Ein Beispiel wird diesen Vorgang verdeutlichen. — Die vorgelegte Gleichung sei:

$$x.y^{IX} + ax^2.y^{VIII} + (bx^3 + cx)\,y^{VII} + gx^4.y^{VI} + (hx^4 + kx^3)\,y^{V} + \\ + l.y^{IV} + mx^2.y''' + nx^3.y'' + (px^2 + qx + r)\,y' + s.y = 0. \qquad (708)$$

Das ihr entsprechende Polygon ist S. 169 zu sehen mit abgeschnittenen einspringenden Winkeln, sohin in seiner normalen Gestalt, in der die Ordinatenunterschiede bereits den Ordnungszahlen der $\varphi$ gleichen. Durch das analytische Verfahren ermittelt man sie hier auf folgende Weise: Die grösste Steigung findet Statt vom ersten auf den zweiten Coefficienten, beträgt hier 2 Einheiten, und dehnt sich nur aus auf dieses einzige Paar. Es ist also 2 die höchste der Ordnungszahlen der $\varphi$, und gehört nur zu einer einzigen dieser Functionen. Vom zweiten Coefficienten bis zum vierten bemerkt man jetzt die nächst niedrigere, auf das Coefficientenpaar entfallende Steigung von $\frac{1}{2}$ Einheit auf das Paar, und ausgedehnt auf zwei nacheinander folgende Paare. Diess deutet auf zwei particuläre Integrale, bei welchen die $\varphi$ genannten Functionen die Gradzahl $\frac{1}{2}$ tragen. Vom vierten Coefficienten an ist 0 die grösste bis zum fünften stattfindende Steigung und deutet auf ein einziges $\varphi$ vom Grade 0. Vom fünften bis zum achten tritt der geringste alldort vorhandene Abfall von $\frac{1}{3}$ Einheit auf das Coefficientenpaar an die Stelle der grössten Steigung; dann kommen noch zwei Abfälle von 1 und 2 Einheiten vom achten zum neunten, und vom neunten zum zehnten, letzten Coefficienten. Diess führt zu den bereits S. 170 angeführten Repartitionszahlen:

$$2,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad 0,\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3},\quad -1,\quad -2,$$

von welchen die ersten sieben die Gradzahlen eben so vieler Functionen $\varphi$ ganz verlässlich angeben, die zwei letzten aber auf zwei $\varphi$ hindeuten, deren Gradzahl entweder die negative Einheit ist, oder unter derselben liegt. Schreiben wir jetzt die wirklichen und die etiquettenmässig bestimmten d. h. dem normalen Polygone entsprechenden Gradzahlen der Coefficienten untereinander.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 3, & 3, & 4, & 4, & 0, & 2, & 3, & 2, & 0, \\ 1, & 3, & \frac{7}{2}, & 4, & 4, & \frac{11}{3}, & \frac{10}{3}, & 3, & 2, & 0, \end{array}$$

so bemerken wir alsogleich, dass von den oberen Gradzahlen die erste, zweite, vierte, fünfte und achte sich zur Höhe der unteren erheben, woraus folgt, dass die ebensovielten Coefficienten in der Gleichung zur ferneren Unterscheidung der particulären Integrale von einander verwendet werden können. Dagegen fordern der neunte und zehnte Coefficient hiezu, trotz der vorhandenen Übereinstimmung ihrer Gradzahlen in den beiden vorstehenden Reihen, eine eigene Behandlung, von wegen der unter die negative Einheit fallenden Repartitionszahlen, die weiter unten zur Sprache kommen wird.

Als vollkommen genügendes Unterscheidungsmittel dient aber hier die jedem particulären Integrale zustehende Assymptote, die entweder exponentiell ist, oder algebraisch, je nachdem die Gradzahl $p$ des $\varphi$ ober der negativen Einheit liegt oder nicht, und die der Form nach aus den bisherigen Erhebungen gefolgert werden kann. Sind nämlich $p_1, p_2, \ldots p_r$ die ober der negativen Einheit liegenden Gradzahlen der $\varphi$ in absteigender Folge, so sind die Gleichungen der den betreffenden particulären Integralen angehörigen Assymptoten:

$$(709)\qquad \begin{aligned} y &= e^{\int \mathfrak{A}_1 x^{p_1} dx} = e^{\frac{\mathfrak{A}_1}{p_1+1} \cdot x^{p_1+1}}, \\ &= e^{\int \mathfrak{A}_2 x^{p_2} dx} = e^{\frac{\mathfrak{A}_2}{p_2+1} x^{p_2+1}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= e^{\int \mathfrak{A}_r x^{p_r} dx} = e^{\frac{\mathfrak{A}_r}{p_r+1} x^{p_r+1}}; \end{aligned}$$

diess sind aber nur die exponentiellen; von den übrigen $n - r$ an der Zahl, die algebraisch sind, wollen wir später sprechen. Die in ihnen vorhandenen Repartitionszahlen $p_1, p_2, \ldots p_r$ dienen, wenn unter denselben auch gleiche vorkommen, nicht zur vollständigen Unterscheidung; es hat vielmehr noch die Kenntniss der Coefficienten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_r$ hinzuzutreten und diese verschafft man sich auf folgende Art:

Einem jeden durch Repartition gewonnenen Werthe von $p$, gleichviel ob es ein einzelner oder wiederholter ist, entspricht eine ganze Seite des normalen Polygons. Im Bereiche dieser Seite schreibe man diejenigen Gleichungsglieder auf, deren Coefficienten die etiquettenmässige Höhe erreichen; nehme

aber von ihnen nur den Coefficienten des mit der höchsten Potenz nach $x$ verbundenen Gliedes, und setze anstatt des Differentialquotienten von $y$ die gleichnamige Potenz einer Unbekannten $\theta$, so hat man eine höhere Gleichung in $\theta$, deren von der Nulle verschiedene Wurzeln die entsprechenden mit $\mathfrak{A}$ bezeichneten Coefficienten sind. In dem speciellen eben angeführten Beispiele (708) haben wir in der ersten Polygonseite nur zwei in Rechnung kommende Coefficienten, die beide ihre etiquettenmässige Höhe besitzen. Die das $\mathfrak{A}_1$ bestimmende Gleichung ist daher:

$$\theta^1 + a\,.\,\theta^0 = 0, \qquad \text{oder} \qquad \theta = \mathfrak{A}_1 = -\,a.$$

Der zweiten Polygonseite entsprechen drei Coefficienten, von welchen nur der erste und dritte die etiquettenmässige Höhe haben. Sie geben die Gleichung in $\theta$:

$$a\,.\,\theta^2 + g\,.\,\theta^0 = 0, \qquad \text{oder} \qquad \theta^2 = -\frac{g}{a},$$

woraus sich Werthe für $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ unmittelbar ergeben, als:

$$\mathfrak{A}_2 = +\sqrt{-\frac{g}{a}}, \qquad \mathfrak{A}_3 = -\sqrt{-\frac{g}{a}}.$$

Die dritte Polygonseite umspannt abermals nur Ein Coefficientenpaar und liefert:

$$\theta = \mathfrak{A}_4 = -\frac{h}{g}.$$

Die vierte Seite dehnt sich über vier Coefficienten, von denen aber begreiflicherweise, der gebrochenen Repartitionszahlen wegen, nur der erste und vierte die ihm nach der Etiquette zukommende Höhe erreichen. Wir gelangen daher zur Gleichung:

$$\theta^3 = -\frac{n}{h},$$

was für $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{A}_7$ die nachfolgenden Werthe gibt:

$$\mathfrak{A}_5 = \sqrt[3]{-\frac{n}{h}}, \quad \mathfrak{A}_6 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{-\frac{n}{h}}, \quad \mathfrak{A}_7 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{-\frac{n}{h}}.$$

Es gehören daher zu sieben particulären Integralen unserer zum Beispiele gewählten Differentialgleichung, welchen die folgenden Gradzahlen $p$ der $\varphi$ benannten Functionen zukommen:

$$p_1 = 2, \qquad p_2 = p_3 = \frac{1}{2}, \qquad p_4 = 0, \qquad p_5 = p_6 = p_7 = -\frac{1}{3},$$

die folgenden zu ihrer Unterscheidung vollkommen zureichenden Assymptotengleichungen, ebenfalls sieben an der Zahl, nämlich:

$$y_5 = e^{\sqrt{-\frac{n}{h_0}\int x^{-\frac{1}{3}}dx}} \qquad = e^{2\sqrt{\cdots}} .$$

$$y_6 = e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{-\frac{n}{h_0}\int x^{-\frac{1}{3}}dx}} = e^{\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{-\frac{n}{h}x^2}} .$$

$$y_7 = e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{-\frac{n}{h_0}\int x^{-\frac{1}{3}}dx}} = e^{\left(-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{-\frac{n}{h}x^2}} .$$

Als zweites Beispiel diene die Kummer'sche Gleichung, d. h. die folgende:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + x \cdot y = 0. \tag{711}$$

Die Ordnungszahlen ihrer Coefficienten, bezüglich Ordinaten des umspannenden Polygones, dann die Ordinaten des normalen Polygones, gewonnen durch Abschneiden des einspringenden Winkels in dem vorigen, endlich die Repartitionszahlen $p$, zugleich Ordinatenunterschiede und Gradzahlen der $\varphi$ genannten Functionen, haben hier, in drei Reihen untereinandergesetzt, die sehr einfachen Werthe:

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 0, & 0, & 0, & \dots\dots\dots & 0, & 1, \\ 0, & \frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \frac{3}{n}, & \dots\dots\dots & \frac{n-1}{n}, & 1. \\ & \frac{1}{n}, & \frac{1}{n}, & \frac{1}{n}, & \dots\dots\dots & & \frac{1}{n}. \end{array}$$

Die in der Form $e^{\int \varphi dx}$ gedachten particulären Integrale unterscheiden sich also nicht durch die Gradzahlen $p$ der Functionen $\varphi$, die sämmtlich $= \frac{1}{n}$ sind; jede von ihnen, nach absteigenden Potenzen von $x$ in Reihen entwickelt, fängt an mit einem Gliede wie $a\sqrt[n]{x}$; die Werthe von $a$ bieten also den Unterschied. Zu ihrer Bestimmung concurriren nur zwei Eckcoefficienten: der erste und letzte, beide gleich 1. Als Werthe von $a$ gelten daher die $n$ Wurzeln der Gleichung: $\theta^n + 1 = 0$; sie seien der Reihe nach $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots\dots \theta_n$, so sind die $n$ Assymptotengleichungen der particulären Integrale enthalten in folgender einzigen:

$$y = e^{\frac{n\theta_1}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}}, \quad e^{\frac{n\theta_2}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}}, \quad e^{\frac{n\theta_3}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}}, \quad \dots\dots\dots \quad e^{\frac{n\theta_n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}}. \tag{712}$$

Die gleiche Behandlung können wir der ähnlichen Differentialgleichung angedeihen lassen, die als drittes Beispiel hier stehen mag:

$$x \frac{d^n y}{dx^n} + y = 0. \tag{713}$$

Ihre Assymptotengleichungen sind in folgender einzigen enthalten:

$$y = e^{\frac{n\theta_1}{n-1} x^{\frac{n-1}{n}}}, \quad e^{\frac{n\theta_2}{n-1} x^{\frac{n-1}{n}}}, \quad e^{\frac{n\theta_3}{n-1} x^{\frac{n-1}{n}}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad e^{\frac{n\theta_n}{n-1} x^{\frac{n-1}{n}}}, \tag{714}$$

unter $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\ldots \theta_n$ dieselben Werthe verstanden, wie im vorhergehenden Beispiele.

Hiemit sind aber alle Assymptoten der particulären Integrale noch keineswegs aufgezählt, und es fehlen nicht nur die algebraischen, wie schon gesagt, sondern auch diejenigen, die den einfachen Factoren von der Form $x - \alpha$ des ersten und der folgenden Gleichungscoefficienten entsprechen. Da nämlich, bei dem Vorhandensein Eines oder mehrerer solcher Factoren, Eines oder einige der particulären Integrale für $x = \alpha$ unendlich werden können, aber nicht müssen, so wird gelegentlich die der Abscisse $x = \alpha$ entsprechende Ordinate den Namen einer geradlinigen und zur Axe der $y$ parallelen Assymptote verdienen. Will man nun, bei dem möglichen Vorkommen mehrerer solcher particulären Integrale mit derselben geradlinigen Assymptote, einen Unterschied unter ihnen angeben, so ist man genöthigt nach derjenigen Curve zu forschen, die sich, längs der, durch geometrische Construction der particulären Integrale erhaltenen, in der Nähe von $x = \alpha$ assymptotisch hinzieht, und derselben näher kömmt als die Gerade $x = \alpha$, die demnach wieder eine Assymptote sein wird in zweiter Annäherung. Zu ihrer Ermittlung dient folgendes, dem früher auseinandergesetzten analoge geometrische Verfahren:

Man errichte auf einer gezogenen Abscissenaxe, in gleichen Abständen von einander Ordinaten; auf diese trage man der Reihe nach die, nach einem beliebigen Massstabe abgefassten, offenbar ganzen Anzahlen von Factoren $x - \alpha$ in den Coefficienten $X_n, X_{n-1}, \ldots\ldots X_1, X_0$. Die geradlinig verbundenen Endpunkte geben dann eine Polygonallinie, von der man die ausspringenden Winkel geradlinig abschneidet, wodurch sich eine andere, die normale Polygonallinie ergibt, die gegen die Abscissenaxe convex ist, während die früher zur Sprache gebrachte gegen ebendieselbe concav war. Man notire die Ordinatenunterschiede der so erhaltenen normalen Polygonallinie, sie seien $m_1, m_2, \ldots\ldots m_r$, in natürlicher Ordnung und vom grössten angefangen, so entsprechen einer solchen Differentialgleichung particuläre Integrale $r$ an der Zahl, von einer Form wie folgt:

$$y = e^{\int \frac{\psi_1 dx}{(x-\alpha)^{m_1}}}, \quad e^{\int \frac{\psi_2 dx}{(x-\alpha)^{m_2}}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad e^{\int \frac{\psi_r dx}{(x-\alpha)^{m_r}}}, \tag{715}$$

allwo $\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots \psi_r$ Functionen von $x$ sind, welche für $x = \alpha$ weder Null werden, noch unendlich. Derselben mit $m$ bezeichneten Exponenten bemächtigt man sich auch, ohne Zeichnung, durch folgenden analytischen Vorgang: Man forscht, von dem ersten Coefficienten $X_n$ ausgehend, nach einem nächsten, zweiten Eckcoefficienten (er entspricht der nächsten Ecke des normalen Polygons), bis zu welchem der

auf das Coefficientenpaar repartirte Abfall den grössten Zahlenwerth hat, bezeichnet ihn als Eckcoefficienten, zugleich jenen Abfall so oft notirend, als Coefficientenpaare vorhanden sind, auf die er Bezug hat. Von diesem Eckcoefficienten ausgehend, forscht man eben so nach dem dritten, von diesem sodann nach dem vierten, u. s. w., so lange man noch Repartitionszahlen erhält, die nicht unter der positiven Einheit liegen. Es ist nun klar, dass dieses Repartitionsverfahren gelegentlich auch Gruppen gleicher Werthe von $m$, item gebrochener solcher zu liefern fähig sei, Halbe wenigstens zwei, Drittel mindestens drei, u. s. w. Sind wirklich solche vorhanden, so dienen sie nicht zur näheren Bezeichnung des particulären Integrales, und man wird zur Namhaftmachung eines Unterschiedes die Eckcoefficienten, und überdiess noch diejenigen zu Hilfe nehmen müssen, denen im ursprünglichen und im normalen Polygone einerlei Höhe, bezüglich einerlei Anzahl von Factoren $x-\alpha$ zukömmt. Ein Beispiel möge diesen Vorgang verdeutlichen: Es sei gegeben die Gleichung:

$$\begin{aligned} & x^8(x^2-1)\,y^{IX}+ax^6(x-1)\,y^{VIII}+x^6(bx+c)\,y^{VII}+gx^3\,.\,y^{VI}+\\ & +x^2(hx+j)\,y^{V}+lx^2\,.\,y^{IV}+mx\,.\,y''+(nx^3+p)\,y'+qx^2\,.\,y=0. \end{aligned} \tag{716}$$

Der erste Coefficient bietet, zerlegt, die einfachen Factoren: $x$, $x-1$, $x+1$; von ihnen muss, jeder für sich, abgesondert der Betrachtung unterzogen werden. Wir fassen also zuvörderst den erstgenannten, d. h. $x$ ins Auge, und sehen, Gebrauch machend von dem oberwähnten analytischen Verfahren, dass der stärkste Abfall in der Anzahl von Factoren $x$ stattfinde von dem ersten auf den zweiten Coefficienten, und zwei Einheiten betrage. Wir haben also $m_1=2$. Vom zweiten auf den vierten Coefficienten gewahren wir den nächst niedrigeren Abfall von 3 Einheiten auf zwei Paare, sohin von $\frac{3}{2}$ Einheiten auf das einzelne Paar; es ist daher $m_2=m_3=\frac{3}{2}$. Eben so finden wir $m_4=1$; die übrigen, die Einheit nicht erreichenden Repartitionszahlen haben wegzufallen. Die Ordinatenhöhen, im ursprünglichen und im normalen Polygone untereinander geschrieben, sind:

$$\begin{array}{ccccc} 8, & 6, & 6, & 3, & 2, \\ 8, & 6, & \frac{9}{2}, & 3, & 2, \end{array}$$

und es findet für den ersten, zweiten, vierten und fünften Coefficienten eine Gleichheit der betreffenden Ordinatenhöhen statt; diese sind daher zur ferneren Unterscheidung der particulären Integrale verwendbar.

Um nun diese allgemein zu bewerkstelligen, bemerkt man, dass jede der $\psi$ genannten Functionen in (715) nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$, vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel in eine Reihe entwickelt werden könne, die man, für sehr kleine $x-\alpha$, in erster Annäherung mit dem ersten Gliede wird abbrechen können. Es seien also die ersten Glieder der erwähnten Reihenentwicklungen für $\psi_1$, $\psi_2$, ..... $\psi_r$ bezüglich $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ..... $\mathfrak{A}_r$, so nähern sich offenbar die, durch geometrische Construction der particulären Integrale (715) entstandenen Curven, für sehr nahe an $\alpha$ liegende $x$, den in der folgenden einzigen Gleichung enthaltenen Assymptoten zweiter Approximation:

$$y=e^{\mathfrak{A}_1\int\frac{dx}{(x-\alpha)^{m_1}}},\quad e^{\mathfrak{A}_2\int\frac{dx}{(x-\alpha)^{m_2}}},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad e^{\mathfrak{A}_r\int\frac{dx}{(x-\alpha)^{m_r}}}, \tag{717}$$

die für Werthe von $m$, welche die Einheit überschreiten, exponentiell, für der Einheit gleiche hingegen offenbar algebraisch sind, und zwar geradlinig für $\mathfrak{A}=1$, parabolisch für positive $\mathfrak{A}$, hyperbolisch endlich für negative Werthe dieses Coefficienten. Sind nun unter den Exponenten $m$ gleiche vorhanden, so bilden zunächst die dem $\mathfrak{A}$ zukommenden Werthe, zwischen den ihnen entsprechenden particulären Integralen, den Unterschied. Um sich dieselben zu verschaffen, verfährt man beinahe ganz auf die früher auseinandergesetzte, zur Ermittlung der Coefficienten gleichen Namens dienende Weise:

Einem jeden durch Repartition gewonnenen Werthe von $m$, gleichviel ob einzeln oder wiederholt, entspricht eine ganze Seite des normalen Polygons. Im Bereiche dieser Seite nun nehme man diejenigen Gleichungsglieder, deren Coefficienten die normale Höhe mit der Anzahl ihrer Factoren $x-\alpha$ nicht überschreiten, so jedoch, dass man sie sich nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ in Reihen entwickelt denkt, von welchen man aber nur das erste Glied, mit Weglassung der in ihm enthaltenen Factoren $x-\alpha$ nimmt, und die übrigen wegwirft. Schreibt man sodann anstatt der betreffenden Differentialquotienten von $y$ die ebensovielten Potenzen einer Unbekannten $\theta$, so hat man eine höhere Gleichung in $\theta$ vor Augen, deren von der Nulle verschiedene Wurzeln die entsprechenden mit $\mathfrak{A}$ bezeichneten Coefficienten sind.

In dem beigebrachten speciellen Beispiele (716) ist, bezüglich des einfachen Factors $x$, für welchen also $\alpha=0$ ist, $m_1=2$ ein einzelner Werth. Das ihm zugehörige $\mathfrak{A}_1$ geht aus der Gleichung hervor: $-\theta^9-a\theta^8=0$; man hat also $\mathfrak{A}_1=-a$. Sodann folgen zwei gleiche Werthe von $m$, nämlich $m_2=m_3=\frac{3}{2}$ angehörig der zweiten Polygonseite. Die ihnen entsprechenden $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ sind die zwei von der Nulle verschiedenen Wurzeln der algebraischen Gleichung: $-a.\theta^3+g.\theta^5=0$, folglich $\mathfrak{A}_2=\sqrt{\frac{g}{a}}$ und $\mathfrak{A}_3=-\sqrt{\frac{g}{a}}$. Diess gibt die folgenden drei, zu eben so vielen particulären Integralen gehörigen exponentiellen Assymptoten, die in der einzigen Gleichung enthalten sind:

$$y=e^{-a\int\frac{dx}{x^2}},\qquad e^{\sqrt{\frac{g}{a}}\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}},\qquad e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}}. \tag{718}$$

Wenn unter den Werthen der mit $m$ bezeichneten Exponenten der Einheit gleiche vorhanden sind, so hört die Formel (717) zwar nicht auf die Assymptotengleichungen auch in solchen Fällen in sich zu enthalten, nur werden dann mehrere derselben, vonwegen der im Exponenten durchführbaren Integration, welche einen Logarithmus liefert, ihren exponentiellen Charakter verlieren und die algebraische Gestalt:

$$y=\frac{Q}{(x-\alpha)^k} \tag{719}$$

annehmen, und nun wird man offenbar den Werth von $k$ verwenden können, um das betreffende particuläre Integral näher zu bezeichnen. Um aber anzugeben, wie dieser allgemein gefunden werde, beginnen wir von dem einfachsten Falle, voraussetzend, dass in der gegebenen Differentialgleichung (705) der erste Coefficient $X_n$ einen einzigen Factor $x-\alpha$, der zweite aber $X_{n-1}$ keinen solchen habe. In diesem

gewöhnlichsten aller Fälle gewinnt man das $k$ (zufolge §. 7, S. 177) durch dasselbe bekannte Verfahren, welches zur Zerlegung des algebraischen Bruches $\frac{X_{n-1}}{X_n}$ in Partialbrüche verwendet wird; es ist nämlich:

$$k = \frac{X_{n-1}}{X_n}(x-\alpha)\Big\}_{\alpha} - (n-1) = \frac{X_{n-1}}{X'_n}\Big\}_{\alpha} - (n-1). \tag{720}$$

Hätten die Anfangscoefficienten der gegebenen Differentialgleichung, $r+1$ an der Zahl, d. h. die $X_n$, $X_{n-1}$, $X_{n-2}$, ... $X_{n-r}$, der Reihe nach, Factoren $x-\alpha$ bezüglich $r$, $r-1$, $r-2$, ... 2, 1, 0, so bestehen $r$ particuläre Integrale von der Form (719), die sich zunächst durch die ihnen zukommenden Werthe von $k$ unterscheiden. Diese sind die Wurzeln der folgenden algebraischen Gleichung des $r^{ten}$ Grades (s. §. 7, S. 178):

$$\begin{aligned}\Big\{\frac{X_n}{(x-\alpha)^r}(k+n-1)\ldots\ldots(k+n-r) - \frac{X_{n-1}}{(x-\alpha)^{r-1}}(k+n-2)\ldots\ldots(k+n-r) + \\ + \ldots\ldots\ldots \mp \frac{X_{n-r+1}}{x-\alpha}(k+n-r) \pm X_{n-r}\Big\}_{\alpha} = 0,\end{aligned} \tag{721}$$

die auch dann nicht aufhört verlässliche Werthe von $k$ zu liefern, wenn Einer oder mehrere der Coefficienten $X_n$, $X_{n-1}$, ... $X_{n-r}$ eine grössere als die obenbezeichnete Anzahl von Factoren $x-\alpha$ in sich enthielten, was zunächst ein Verschwinden Eines oder mehrerer Glieder der Gleichung (721) und, so diess Anfangsglieder sind, ein Heruntergehen der Gradzahl $r$ zur Folge haben würde. Das vorhergehende Beispiel mag wieder dienen das Verfahren zu erläutern: Der erste Coefficient der Gleichung (716) besitzt den Factor $x+1$, folglich ist Ein particuläres Integral von der Form $\frac{Q}{(x+1)^k}$ vorhanden, allwo:

$$k = \frac{ax^6(x-1)}{x^6(x^2-1)}(x+1)\Big\}_{x=-1} - 8 = a - 8 \tag{722}$$

ist. Ein fernerer Factor des ersten Coefficienten ist $x-1$, sohin leistet der Gleichung auch Ein particuläres Integral Genüge, enthalten in der Form $\frac{Q}{(x-1)^k}$. Hier ist:

$$k = \frac{ax^6(x-1)}{x^6(x^2-1)}(x-1)\Big\}_{x=1} - 8 = -8, \tag{723}$$

ein Werth, von dem wir noch bemerken, dass er ganz, negativ und numerisch kleiner als die Ordnungszahl der Gleichung sei, wodurch er zwar nicht unrichtig wird, sich aber so zu sagen von selbst versteht, d. h.: jede Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung wird gewöhnlich erfüllt durch ein particuläres Integral mit dem Factor $(x-\alpha)^{n-1}$, oder $(x-\alpha)^{n-2}$ ... bis $(x-\alpha)^1$, was auch $\alpha$ bedeuten mag, selbst dann, wenn $x-\alpha$ als Factor nirgends in der Gleichung erscheint. Ist Ein particuläres Integral mit einem Nenner, wie $(x-\alpha)^k$ vorhanden, welchem der einzige Factor $x-\alpha$ im ersten Coefficienten entspricht, so tritt in der Regel dieses an die Stelle des anderen mit dem Factor $(x-\alpha)^{n-1}$, das dann wegfällt. Sind zwei solche particuläre Integrale vorhanden, angedeutet durch 2, 1, 0 Factoren in

den ersten Gleichungscoefficienten, so treten sie an die Stelle der dann wegfallenden, mit den Factoren $(x-\alpha)^{n-1}$, $(x-\alpha)^{n-2}$ versehenen, u. s. w.

Endlich sind im ersten und in den folgenden Coefficienten der (716) Factoren $x$ verhanden, und zwar bezüglich:

$$8, \quad 6, \quad 6, \quad 3, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 0$$

an der Zahl — eine Reihe, unter die wir die folgende andere, in einigen Gliedern mit derselben congruente und in den übrigen geringere Zahlenwerthe ausweisende schreiben, mit der gemeinsamen Differenz 1, nämlich:

$$6, \quad 5, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0, \quad 0.$$

Wir können daher $r=6$ annehmen und erhalten in der algebraischen Gleichung (721), die zur Bestimmung von $k$ dient, drei verschwindende Anfangsglieder und zwei der Nulle gleiche am Ende, so, dass nur deren zwei von der Nulle verschiedene übrig bleiben, mithin die Gleichung in $k$ so aussieht:

$$\left\{\frac{gx^3}{x^3}(k+5)(k+4)(k+3) - \frac{x^2(hx+j)}{x^2}(k+4)(k+3)\right\}_{x=0} = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$g(k+5)(k+4)(k+3) - j(k+4)(k+3) = 0,$$

und die drei Wurzeln für $k$ besitzt:

$$k = \frac{j}{g} - 5, \qquad -4, \qquad -3, \tag{724}$$

von welchen die zwei letzteren abermals zwar nicht unrichtig sind, sich jedoch von selbst verstehen. Wir wären sonach, durch die fünf gerechneten Werthe von $k$, zu ebenso vielen Assymptotengleichungen von der Form (719) gelangt, die wir in der einzigen zusammenfassen:

$$y = \frac{Q_1}{(x+1)^{a-5}}, \qquad Q_2(x-1)^8, \qquad \frac{Q_3}{x^{\frac{j}{g}-5}}, \qquad Q_4 . x^4, \qquad Q_5 . x^3, \tag{725}$$

die aber nicht nothwendig zu fünf verschiedenen particulären Integralen gehörig sind, weil Ein particuläres Integral mehrere Assymptoten dieser Art besitzen, und umgekehrt eine und dieselbe Assymptote mehreren particulären Integralen zukommen kann. Die drei letzteren jedoch gehören entschieden zu drei verschiedenen der Differentialgleichung Genüge leistenden Werthen (s. §. 18, S. 314 u. s. w.) — und diess sind die Ergebnisse, zu denen die Untersuchung der Differentialgleichung selbst führt.

Um zu ferneren Aufschlüssen zu gelangen über die Formen, deren das allgemeine Integral einer Differentialgleichung fähig ist, zugleich der algebraischen Assymptotengleichungen erster Art habhaft zu werden, die uns noch fehlen, und die denjenigen Abfällen in der Gradzahl der Coefficienten gegen den letzten derselben entsprechen, welche auf das Paar die Einheit oder mehr als die Einheit betragen, setzen wir die Genüge leistenden Werthe voraus in Gestalt eines bestimmten Integrales wie:

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{ux} V.du, \tag{726}$$

und gelangen (s. §. 19) zur nachfolgenden, das $V$ bestimmenden, sogenannten **Hilfsgleichung**:

$$\begin{aligned}
&V^{m)} \cdot U_m \\
&+ V^{m-1)} \left[\binom{m}{1} U'_m - U_{m-1}\right] \\
&+ V^{m-2)} \left[\binom{m}{2} U''_m - \binom{m-1}{1} U'_{m-1} + U_{m-2}\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ V' \left[\binom{m}{1} U_m^{(m-1)} - \binom{m-1}{1} U_{m-1}^{(m-2)} + \binom{m-2}{1} U_{m-2}^{(m-3)} - \cdots\cdots \mp U_1\right] \\
&+ V \left[U_m^{(m)} - U_{m-1}^{(m-1)} + U_{m-2}^{(m-2)} - \cdots\cdots \mp U'_1 \pm U_0\right] = 0,
\end{aligned} \tag{727}$$

die zu der in der nachstehenden Form als gegeben vorausgesetzten Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
&+ (a_n + b_n x + c_n x^2 + \cdots\cdots g_n x^{m-1} + h_n x^m) y^{(n)} \\
&+ (a_{n-1} + b_{n-1} x + c_{n-1} x^2 + \cdots\cdots g_{n-1} x^{m-1} + h_{n-1} x^m) y^{(n-1)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ (a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \cdots\cdots g_1 x^{m-1} + h_1 x^m) y' \\
&+ (a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + \cdots\cdots g_0 x^{m-1} + h_0 x^m) y = 0,
\end{aligned} \tag{728}$$

gehörig ist, und in welcher man hat:

$$\begin{aligned}
U_m &= h_n u^n + h_{n-1} u^{n-1} + h_{n-2} u^{n-2} + \cdots\cdots + h_1 u + h_0. \\
U_{m-1} &= g_n u^n + g_{n-1} u^{n-1} + g_{n-2} u^{n-2} + \cdots\cdots + g_1 u + g_0. \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U_1 &= b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + b_{n-2} u^{n-2} + \cdots\cdots + b_1 u + b_0, \\
U_0 &= a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + a_{n-2} u^{n-2} + \cdots\cdots + a_1 u + a_0,
\end{aligned} \tag{729}$$

Man behandelt nun die besagte Hilfsgleichung auf folgende Weise: Man beachtet bei ihr, wie früher bei der (728), zuvörderst die Gradzahlen ihrer Coefficienten, namentlich aber die in ihr vorfindigen Ansteigungen, und bildet nach ihnen auf die kurz vorher auseinandergesetzte Weise die exponentiellen Assymptotengleichungen. Es sei Eine von diesen:

$$V = e^{\int \theta u^s du} = e^{\frac{\theta u^{s+1}}{s+1}}, \tag{730}$$

so ergibt sich aus ihr eine Gruppe von particulären, der gegebenen Gleichung Genüge leistenden Integralen wie folgt:

$$y = C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{ux} V_1\, du, \quad C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{ux} V_1\, du, \quad \ldots\ldots, \quad C_{s+1} \int_0^{\mu_{s+1} \infty} e^{ux} V_1\, du, \tag{731}$$

wo $V_1$ gerade dasjenige particuläre Integral der Hilfsgleichung bedeutet, das die eben angeführte Assymp-

tote (730) hat; ferner bedeuten $\mu_1\infty$, $\mu_2\infty$, ... $\mu_{s+1}\infty$, die verschiedenen unendlichen Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$\frac{\theta u^{s+1}}{s+1} = -\infty; \tag{732}$$

endlich sind $C_1$, $C_2$, ... $C_{s+1}$ Constanten, welche nur die Beziehungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + \dots\dots\dots + C_{s+1} = 0 \tag{733}$$

zu erfüllen haben und sonach $s$ willkürliche Constanten vorstellen. Diess gilt nicht bloss unter der Voraussetzung, dass $s$ eine ganze Zahl ist, sondern mit einigen Veränderungen auch dann, wenn $s = \frac{p}{q}$, d. h. gleich einem unabkürzbaren Bruche wird. Nur hat man dann nicht Eines, sondern mehrere particuläre Integrale der Hilfsgleichung, nämlich mindestens $q$ an der Zahl, mit Assymptoten wie die (730), die sich aber durch verschiedene Werthe des Coefficienten $\theta$ unterscheiden. Die Gleichung:

$$\frac{\theta u^{s+1}}{s+1} = \frac{q.\theta u^{\frac{p+q}{q}}}{p+q} = -\infty \tag{734}$$

kann hiebei als fortbestehend betrachtet werden, hat aber nicht mehr Wurzeln $\frac{p}{b} + 1 = s + 1$ an der Zahl; es genügen ihr vielmehr alle diejenigen $p+q$ Werthe, welche die einzige:

$$\theta^q u^{p+q} = \pm \infty \tag{735}$$

erfüllen. In Folge dieses Umstandes liefert ein einziges der erwähnten, $q$ an der Zahl vorhandenen und mit $V$ bezeichneten particulären Integrale der Hilfsgleichung einen $(p+q)$-theiligen Ausdruck für $y$, mit eben so vielen Constanten, deren Summe wie in (733) der Nulle gleich sein muss; dagegen sind nicht alle in Rede stehenden Werthe von $V$ brauchbar, sondern nur derjenige oder diejenigen, in welchen im Exponenten der Exponentielle $e^{\frac{\theta u^{s+1}}{s+1}} = e^{\frac{q}{p+q}\sqrt[q]{\theta^q u^{p+q}}}$, die Wurzelgrösse $\sqrt[q]{\theta^q u^{p+q}}$ in einem solchen Sinne genommen ist, dass die eben besagte Exponentielle selbst, für alle aus der Gleichung (735) gezogenen unendlichen Werthe von $u$ verschwindet.

Sodann müssen die Coefficienten der Hilfsgleichung, von dem ersten derselben $U_m$ angefangen, zerlegt werden in ihre einfachen Factoren von der Form $u - a$, von welchen, falls sie alle von einander verschieden sind, jeder Ein particuläres Integral der ursprünglich vorgelegten Gleichung liefert, in Gestalt eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl. Man hat nämlich, wenn $u - a$ ein solcher Factor ist, demselben entsprechend, Einen Werth für $V$ zu erwarten in der Gestalt:

$$V = \frac{W}{(u-a)^k}, \tag{736}$$

wo $k$ durch das oberwähnte Verfahren des Zerlegens in Partialbrüche gefunden wird, das gegenwärtig auf die Hilfsgleichung angewendet:

$$k = -\frac{U_{m-1}}{U_m}(u-a)\Big|_a + 1 \tag{737}$$

liefert, und aus diesem particulären Werthe von $V$ geht ein Integral der ursprünglichen Gleichung hervor, welches so aussieht:

$$y = C \frac{d^{k-1}}{du^{k-1}} \left[ e^{ux} W \right] \Big\}_{u=\mathfrak{a}}, \tag{738}$$

und, durch Entwicklung des $(k-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten des Produktes $e^{ux} W$, auch anders geschrieben werden kann, nämlich:

$$y = C \cdot e^{\mathfrak{a}x} \left[ W_{\mathfrak{a}}\, x^{k-1} + \binom{k-1}{1} W'_{\mathfrak{a}}\, x^{k-2} + \binom{k-1}{2} W''_{\mathfrak{a}}\, x^{k-3} + \ldots\ldots \right], \tag{739}$$

sohin eine Assymptote besitzt, deren Gleichung, für von der Nulle verschiedene Werthe von $\mathfrak{a}$, die Exponentielle $y = e^{\mathfrak{a}x}$ ist, für $\mathfrak{a} = 0$ hingegen $y = x^{k-1}$ sohin algebraisch wird. Zu bemerken ist hier, dass man dem letzteren Falle jedesmal begegne, so oft von dem vorletzten zum letzten Coefficienten der ursprünglichen Gleichung ein Abfall um die Einheit oder um mehr als die Einheit in der Gradzahl vorhanden ist — und so hätten wir denn die einem solchen Abfalle entsprechende **algebraische Assymptote**, die bisher fehlte, ermittelt. Besitzt daher der Coefficient $U_m$ mehrere einfache Factoren $u - \mathfrak{a}_1$, $u - \mathfrak{a}_2$, $u - \mathfrak{a}_3$, ..., so entsprechen ihnen particuläre Integrale der Urgleichung wie:

$$y = C_1 \frac{d^{k_1-1}}{du^{k_1-1}} \left[ e^{ux} W_1 \right] \Big\}_{u=\mathfrak{a}_1}, \quad C_2 \frac{d^{k_2-1}}{du^{k_2-1}} \left[ e^{ux} W_2 \right] \Big\}_{u=\mathfrak{a}_2}, \quad C_3 \frac{d^{k_3-1}}{du^{k_3-1}} \left[ e^{ux} W_3 \right] \Big\}_{u=\mathfrak{a}_3}, \ldots\ldots\ldots \tag{740}$$

sie unterscheiden sich genügend durch ihre exponentiellen Assymptoten, so lange die mit $\mathfrak{a}$ bezeichneten Coefficienten von einander verschieden sind, so dass man die $k$ genannten Exponenten, die der Reihe nach sind:

$$k_1 = -\frac{U_{m-1}}{U_m}(u - \mathfrak{a}_1) \Big\}_{\mathfrak{a}_1} + 1, \qquad k_2 = -\frac{U_{m-1}}{U_m}(u - \mathfrak{a}_2) \Big\}_{\mathfrak{a}_2} + 1, \ldots\ldots\ldots \tag{741}$$

hiezu gar nicht braucht, den Fall ausgenommen, wenn unter den $\mathfrak{a}$ gleiche, oder verschwindende vorkommen. Um auch diesen Fall zu erledigen, nehmen wir an, es wären in den successiven Coefficienten der Hilfsgleichung Factoren $u - \mathfrak{a}$ bezüglich:

$$r, \quad r-1, \quad r-2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2, \quad 1, \quad 0,$$

oder theilweise auch mehrere vorhanden, so schliessen wir zunächst auf höchstens $r$ Werthe von $V$, wie $V = \frac{W}{(u-\mathfrak{a})^k}$, die sich durch ihre $k$ unterscheiden werden, welche ihrerseits der folgenden algebraischen Gleichung als Wurzeln angehören (s. §. 21, S. 355):

$$\begin{aligned}
&(k+m-1)\ldots(k+m-r)\,.\quad \mathfrak{U}_m \\
&- r\,(k+m-2)\ldots(k+m-r)\left[\binom{m}{1}\mathfrak{U}_m - \mathfrak{U}_{m-1}\right] \\
&+ r(r-1)(k+m-3)\ldots(k+m-r)\left[\binom{m}{2}\mathfrak{U}_m - \binom{m-1}{1}\mathfrak{U}_{m-1} + \mathfrak{U}_{m-2}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (-1)^{r-1} r(r-1)\ldots 3.2(k+m-r)\left[\binom{m}{r-1}\mathfrak{U}_m - \binom{m-1}{r-2}\mathfrak{U}_{m-1} + \binom{m-2}{r-3}\mathfrak{U}_{m-2} - \ldots + (-1)^{r-1}\mathfrak{U}_{m-r+1}\right] \\
&+ (-1)^r\, r(r-1)\ldots 3.2.1 \left[\binom{m}{r}\mathfrak{U}_m - \binom{m-1}{r-1}\mathfrak{U}_{m-1} + \binom{m-2}{r-2}\mathfrak{U}_{m-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^r\mathfrak{U}_{m-r}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{742}$$

allwo $\mathfrak{U}_{m-s} = U_{m-s}^{(r-s)}\Big\}_{\mathfrak{a}}$ ist. Hieraus entspringen nun so viele particuläre Integrale der ursprünglichen Gleichung, als Werthe von $k$ aus der obenstehenden algebraischen hervorgehen. Sind nämlich diese $k_1$, $k_2$, $k_3$, ..., so bekömmt man eine Gruppe von Werthen der Veränderlichen $y$, nämlich:

$$y = C_1 \frac{d^{k_1-1}}{du^{k_1-1}}\left[e^{ux} W_1\right]\Big\}_{u=\mathfrak{a}}, \quad C_2 \frac{d^{k_2-1}}{du^{k_2-1}}\left[e^{ux} W_2\right]\Big\}_{u=\mathfrak{a}}, \quad C_3 \frac{d^{k_3-1}}{du^{k_3-1}}\left[e^{ux} W_3\right]\Big\}_{u=\mathfrak{a}}, \quad \ldots\ldots\ldots \tag{743}$$

Ihnen allen kömmt ein und dieselbe exponentielle Assymptote $e^{\mathfrak{a}x}$ zu; sie sind sohin nur durch ihre $k$ unterschieden. Hätte man $\mathfrak{a} = 0$, wäre somit $U_m$ mit $r$ oder mehr Factoren $u$ versehen, was sich unter anderen jedesmal ereignen wird, wenn in der Urgleichung ebensoviele Abfälle von Einer oder mehreren Einheiten auf das Paar vorkommen, so geht die Eine exponentielle Assymptote in eine Gruppe von so vielen algebraischen über, als Werthe von $k$ vorhanden sind, d. h.:

$$y = x^{k_1-1}, \quad x^{k_2-1}, \quad x^{k_3-1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{744}$$

und mit ihnen sind nun alle exponentiellen und algebraischen Assymptoten der sämmtlichen particulären Integrale, insoferne sie aus den Gradzahlen der Coefficienten hervorgehen, vollständig bekannt, die Unterscheidung und Sichtung ebenderselben vollendet, und hiemit das nothwendige und zureichende Mittel an die Hand gegeben, sie zu isoliren und einzeln der Berechnung zu unterwerfen.

Ein besonderes Augenmerk hat man auf den öfters, und namentlich dann vorkommenden Werth $k = 1$ zu wenden, wenn in der gegebenen Differentialgleichung die letzten Coefficienten stärkere Abfälle bieten, als je um Eine Einheit auf das Paar, weil er auf ein particuläres Integral hindeutet, das, in der assymptotischen Form $e^{\int \varphi dx}$ gedacht, ein $\varphi$ enthält, dessen Gradzahl unter der negativen Einheit liegt. Ein Beispiel bietet die Gleichung (708); geht man über zu der ihr entsprechenden Hilfsgleichung, so hat man, mit Rücksicht auf die Werthe (729):

$$\begin{aligned}
U_m &= U_4 = gu^6 + hu^5, \\
U_{m-1} &= U_3 = au^8 + bu^7 + nu^2, \\
U_{m-2} &= U_2 = ku^5 + mu^2 + pu, \\
U_{m-3} &= U_1 = u^9 + cu^7 + qu, \\
U_{m-4} &= U_0 = lu^4 + ru + s:
\end{aligned} \tag{745}$$

Die aufeinanderfolgenden Coefficienten der Hilfsgleichung beherbergen somit Factoren $u$ bezüglich:

$$5, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 0,$$

an der Zahl, die, mit der natürlichen Reihe abnehmender Zahlen:

$$3, \quad 2, \quad 1, \quad 0, \quad 0,$$

verglichen, $r = 3$ in der Gleichung (742) erschliessen lassen. Diese letztere wird nun, wegen:

$$\mathfrak{U}_m = \mathfrak{U}_4 = 0, \quad \mathfrak{U}_{m-1} = \mathfrak{U}_3 = 2n, \quad \mathfrak{U}_{m-2} = \mathfrak{U}_2 = p, \quad \mathfrak{U}_{m-3} = \mathfrak{U}_1 = 0$$

die folgende Gestalt erhalten:

$$n\,(k^2 - 3k + 2) + p\,(k - 1) = 0,$$

und besitzt für $k$ die beiden Wurzeln:

$$k = 1, \qquad k = 2 - \frac{p}{n} \tag{746}$$

andeutend, dass jedenfalls in Einem, und, wenn $n = p$ ist, sogar in zweien particulären Integralen, die Gradzahl der Function $\varphi$ unter der negativen Einheit liege. Noch ist zu bemerken, dass auch für von der Nulle verschiedene Werthe von $\alpha$ gelegentlich $k = 1$ werden könne, was dann auf ein particuläres Integral wie $e^{\int(\alpha+\psi)dx}$ hindeutet, in welchem die Gradzahl von $\psi$ unter die negative Einheit fällt.

Wenn die Anzahlen von Factoren $u - \alpha$, in den aufeinanderfolgenden Coefficienten der Hilfsgleichung, eine andere als die abnehmende Reihe der natürlichen Zahlen $r, r-1, \ldots 2, 1, 0$ bieten würden, so hätte man, wie oben, S. 401 gesagt, das gewisse Polygon zu bilden, oder sich nur gebildet zu denken, und die Repartitionszahlen, nach weggeschnittenen ausspringenden Winkeln, zu ermitteln; kommen unter diesen Repartitionszahlen solche vor, die die Einheit überschreiten, und nennt man irgend eine derselben $s$, so entspricht ihr Ein particuläres Integral der Hilfsgleichung (727) in $V$, dessen Assymptotengleichung die folgende ist:

$$V = e^{\int \frac{\theta\,du}{(u-\alpha)^s}} = e^{-\frac{\theta}{(s-1)(u-\alpha)^{s-1}}}. \tag{747}$$

Bezeichnen wir nun dieses particuläre Integral mit $V_1$ und denken wir uns zugleich in dem Ausdrucke $e^{ux}\,V_1\,du$ anstatt $u$ eine neue Veränderliche $v$ eingeführt, vermittelst der Substitution $\frac{1}{u-\alpha} = v$, oder $u = \frac{1}{v} + \alpha$, so lässt sich aus diesem Einen, also in eine Function von $v$ verwandelten particulären Integrale, eine $(s-1)$-gliedrige Gruppe von particulären Werthen für $y$ ableiten, wie folgt:

$$y = C_1\int_0^{\mu_1\infty} e^{\left(\frac{1}{v}+\alpha\right)x}\,V_1\,\frac{dv}{v^2}, \quad C_2\int_0^{\mu_2\infty} e^{\left(\frac{1}{v}+\alpha\right)x}\,V_1\,\frac{dv}{v^2}, \quad \ldots\ldots, \quad C_{s-1}\int_0^{\mu_{s-1}\infty} e^{\left(\frac{1}{v}+\alpha\right)x}\,V_1\,\frac{dv}{v^2}. \tag{748}$$

Zwischen den Constanten $C_1, C_2, \ldots\ldots C_{s-1}$ besteht gar keine Bedingungsgleichung; sie bedeuten daher wirklich $s-1$ vorhandene, willkürliche Constanten, und es sind $\mu_1\infty, \mu_2\infty, \ldots\ldots \mu_{s-1}\infty$, die $s-1$ unendlichen Wurzeln der binomischen Gleichung: $-\frac{\theta . v^{s-1}}{s-1} = -\infty$, diess jedoch nur in dem Falle, wenn $s$ eine ganze Zahl ist; für gebrochene $s$ gilt die Bemerkung S. 407, mit dem Unterschiede, dass in den Gleichungen (734) und (735) anstatt $u$, $s+1$, $p+q$ und $-\infty$, bezüglich: $v$, $s-1$, $p-q$ und $+\infty$ zu stehen kommen.

Mit diesen Merkmalen sind nun die analytischen Mittel gegeben, die particulären Integrale, in den verschiedenen hier zur Sprache gebrachten Formen, zu vereinzeln, und dadurch ihre Berechnung vorzubereiten.

Die besagten particulären Integrale werden auf diesem Wege offenbar explicit erhalten, manchmal erscheinen sie auch in geschlossener Form. Die Bedingungen, unter welchen diess geschieht, gehören nicht hieher, sondern zur wirklichen Integration, die der fünfte Abschnitt bringen wird.

Streben wir nur nach geschlossenen Formen, so können wir uns mitunter veranlasst finden, einer impliciten Form, falls sie geschlossen ist, vor der expliziten, wenn sie's nicht ist, den Vorzug zu geben. Es wird daher vorkommen, dass man gelegentlich, einige oder alle particulären Integrale einer Differentialgleichung in der assymptotischen Gestalt $e^{\int \varphi dx}$ auffassend, die algebraische Gleichung sucht, die die verschiedenen, $\varphi$ genannten Functionen zu Wurzeln hat. Um die darauf bezügliche Rechnung einzuleiten, genügt es im Wesentlichen zu wissen, dass ein und dasselbe Polygon, in Bezug auf die Gradzahlen, die algebraische und die Differentialgleichung umspanne, mit allfälliger Ausnahme derjenigen Seiten, auf die ein stärkerer Abfall, als um die Einheit auf das Coefficientenpaar kömmt. Im Übrigen kann man sogar noch sagen, dass die beiden Gleichungen — die algebraische und die differentiale — in den constanten Multiplicatoren der höchsten Glieder aller derjenigen Coefficienten übereinstimmen werden, welche die normale, ihnen etiquettenmässig zustehende Höhe wirklich erreichen. So entsprechen den beiden, in §. 18 ausführlicher behandelten, alldort unter (433) und (435) ersichtlichen Gleichungen:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - b^2x\,.\,y = 0 \quad \text{und} \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - b^2x\,.\,y = 0, \tag{749}$$

beziehungsweise die beiden algebraischen:

$$\left(x^2 - \frac{1}{b^2}\right)\varphi^2 - 2x.\varphi - b^2x^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2.\varphi^2 + 2x\,.\,\varphi - (b^2x^2 - 1) = 0. \tag{750}$$

bei welchen die erwähnte Übereinstimmung in die Augen fällt. Zudem lässt sich noch bemerken, dass die höchsten, zu den übereinstimmenden und die normale Höhe erreichenden Coefficienten gehörigen Potenzen von $x$ insoferne willkürlich gewählt werden können, als es frei steht, nach Belieben, die Differentialgleichung oder auch die Algebraische, mit irgend einer Potenz von $x$ oder einer anderen Function dieser Veränderlichen zu multipliziren, daher es denn erlaubt ist die erwähnten, übereinstimmenden, d. h. dem ursprünglichen und dem normalen Polygone gemeinschaftlichen Glieder, mit unveränderten Exponenten nach $x$, von der einen auf die andere zu übertragen. Eine Veranlassung das allgemeine Integral, oder überhaupt einen der Gleichung Genüge leistenden Werth, in dieser impliciten Form zu suchen, hat man, so oft die nach den Grundsätzen der Formenlehre eingeleitete Untersuchung der Differentialgleichung auf irrationale particuläre Integrale hinweist, was geschehen kann, Erstens: durch gebrochene Repartitionszahlen, gleichviel, ob sie als Gradzahlen der mit $\varphi$ bezeichneten Functionen erscheinen, oder als Exponenten eines Factors $x-\alpha$, der irgendwie in $\varphi$ enthalten ist, und Zweitens, selbst bei gänzlichem Mangel solcher gebrochener Repartitionszahlen, durch gruppenweise vorkommende, negative und gebrochene Werthe des mit $k$ bezeichneten, zu einem Factor $x-\alpha$ gehörigen Exponenten, die zu einander stehen im Verhältnisse der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ..... So deuten einzelnstehende negative Halbe, als Werthe für $k$ gewonnen, auf Quadratwurzeln, also auf einen Übergang eines Paares von Functionen $\varphi$ aus reell in imaginär, der für $x=\alpha$ Statt findet. Ebenso weisen zweigliedrige Gruppen von Dritteln als Werthe

für $k$, wie etwa: $k = -\frac{r}{3}, -\frac{2r}{3}$, unter $r$ eine ganze positive Zahl verstanden, auf dritte Wurzeln in dreien der Functionen $\varphi$ hin, also auf Irrationalgrössen, wie sie aus der Auflösung einer Gleichung des dritten Grades hervorgehen. Genau auf dieselbe Weise lassen drei Werthe, wie $k = -\frac{r}{4}, -\frac{2r}{4}, -\frac{3r}{4}$ auf Irrationalgrössen schliessen, die durch die Auflösung einer Gleichung des vierten Grades geliefert werden, u. s. w. — diess alles zwar nicht mit der vollsten Gewissheit, aber doch mit einer an Gewissheit grenzenden Wahrscheinlichkeit. (Siehe die §§. 10 bis 13 dieses Abschnittes.) Und diess sind die von der Formenlehre dargebrachten Kennzeichen der verschiedenen Formen particulärer Integrale, die einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten Genüge zu leisten vermögen, und die zur Sonderung der einzelnen particulären Integrale zu gleicher Zeit nothwendig sind und zureichend.

**Ende des ersten Bandes.**

# Inhalt des ersten Bandes.

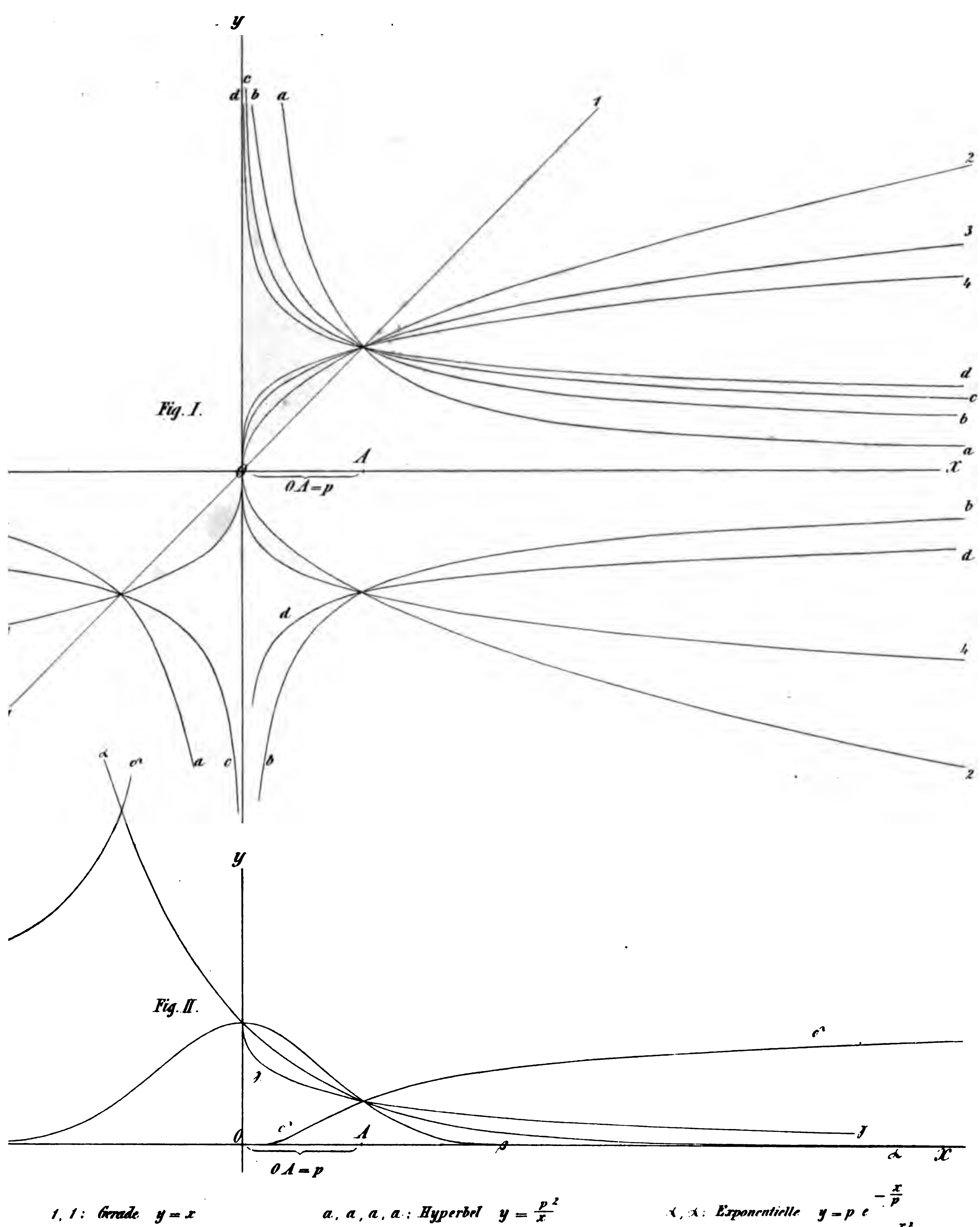
## III. Abschnitt.

### Formenlehre.

Gedruckt bei Leopold Sommer.

# Druckfehler.

| Seite | Zeile | | statt: | lies: |
|---|---|---|---|---|
| S. 61; | Z. 9, | v. u. | $x \frac{d^2y}{dy^2}$, | $x \frac{d^2y}{dx^2}$. |
| » 190; | » 14, | v. u. | $\psi'' = \psi' T_2 = T_1 T_2$, | $\psi'' = \psi' T_2 + S_2 = T_1 T_2 + S_2$. |
| » » | » 13, | v. u. | wo $T_2$, sowie $T_1$, | wo $T_1$, $T_2$ und $S_2$. |
| » 267; | » 7, | v. u. | Divisoren, | Multiplicatoren. |
| » 334; | » 10, | v. ob. | $x^{r-2} U_r V x^{r-1} - (U_r V)'$, | $x^{r-1} . U_r V - x^{r-2} (U_r V)'$ |
| » 345; | » 11, | v. u. | $A_1 u^{\frac{n+1}{2}} = \infty$ | $A_1 u^{\frac{n+1}{2}} = -\infty$ |
| » 346; | » 10, | v. ob. | und die Wurzeln u. s. w. | , was man auch für gerade $n$ zu thun berechtigt sein wird, nur hat man dann die Wurzeln u. s. w. |
| » 351; | » 6, | v. u. | $V, V, V'', \ldots$ | $V, V', V'', \ldots$ |
| » 364; | » 7, | v. ob. | S. 367, | S. 359. |
| » » | » 10, | v. ob. | S. 369, | S. 361. |
| » 365; | » 11, | v. ob. | $v^{\frac{r-s}{2}-1}$, | $v^{\frac{r+s}{2}-1}$. |
| » 389; | » 2, | v. u. | $e^{\int \frac{\Phi}{(x-\alpha)^p}}$ | $e^{\int \frac{\Phi \, dx}{(x-\alpha)^p}}$. |




| | | |
|---|---|---|
| 1, 1: Gerade $y = x$ | a, a, a, a: Hyperbel $y = \frac{p^2}{x}$ | α, α: Exponentielle $y = p\,e^{-\frac{x}{p}}$ |
| 2, 2: Parabel $y^2 = px$ | b, b, b, b: d° $y^2 = \frac{p^3}{x}$ | β, β: d° $y = p\,e^{-\frac{x^2}{p^2}}$ |
| 3, 3: d° $y^3 = p^2x$ | c, c, c, c: d° $y^3 = \frac{p^4}{x}$ | γ, γ: d° $y = p\,e^{-\sqrt{\frac{x}{p}}}$ |
| 4, 4: d° $y^4 = p^3x$ | d, d, d, d: d° $y^4 = \frac{p^5}{x}$ | δ, δ, δ, δ: d° $y = p\,e^{-\frac{p}{x}}$ |

